

運動の法則 - ニュートン力学 -

■ 運動の記述法

- アキレスと亀
- 位置、速度、加速度(ベクトルと微分・積分)

■ 運動の3法則

- ニュートン力学

■ ラーメンのスープ

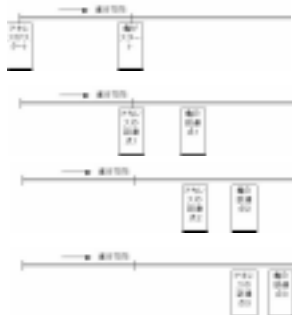
- 微分積分の応用例

ゼノンのパラドックス 「アキレスと亀」



- 運動とは？
 - 時間、空間、位置、速度、加速度
- 俊足のアキレスは前を行く亀を追い越せない！ → 考えてみよう
- 「<http://www6.plala.or.jp/swansong/007400taikakusen.html>

ゼノンのパラドックス 「アキレスと亀」



?

ゼノンのパラドックス 「アキレスと亀」



運動の記述法 1

■ 位置、速度、加速度

■ ベクトル

- 大きさと方向をもつ量



- 位置ベクトル: $\vec{r} = \vec{r}(t)$

- 速度ベクトル: $\vec{v} = \vec{v}(t)$

- 加速度ベクトル: $\vec{a} = \vec{a}(t)$

運動の記述法 2

■ (時間) 微分と積分:

$$\vec{f} \xrightarrow{\text{積分}} \vec{g} = d\vec{f} / dt (= \dot{\vec{f}})$$

- 位置ベクトル: $\vec{r} = \vec{r}(t)$

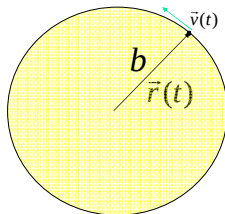
- 速度ベクトル: $\vec{v} = d\vec{r} / dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$

- 加速度ベクトル: $\vec{a} = d\vec{v} / dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$

運動の記述法 3

■ 例: 等速円運動

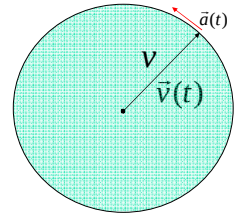
- 半径 b の円周上を一定の速さ v で回る運動
- 位置ベクトル: $\vec{r}(t)$
- 速度ベクトル: $\vec{v}(t)$
 - 大きさ: v
 - 方向・向き: 位置における軌道の接線方向で粒子が軌道を回る向き



運動の記述法 4

■ 例: 等速円運動:

- 加速度ベクトル: $\vec{a}(t)$
 - 円の半径は b , $\vec{v}(t)$ の先端は $2\pi b/v$ で一回りする。よってその速さは、 $2\pi v / (2\pi b/v) = v^2/b$
 - 大きさ: v^2/b
 - 方向・向き: 半径方向で円軌道の中心に向かう



運動の法則1 ニュートン力学

■ アイザック・ニュートン

- 1643年 - 1727年
- イングランドのウールズソープ生まれ
- ライプニッツとは独立に微積分法(流率法)を発明
- 運動の法則を導いて古典力学(ニュートン力学)を創始
「自然哲学の数学的諸原理(プリンキピア)」(1687年刊)
- 万有引力($F=GmM/r^2$)を発見して天体の運動を解明
- 反射望遠鏡を発明
- 光のスペクトル分析を行う



Sir Isaac Newton



運動の法則2 ニュートン力学

- 「自然哲学の数学的諸原理(プリンキピア)」(1687年刊)
- 第一法則: 慣性の法則
- 第二法則: 運動の法則(運動方程式)
- 第三法則: 作用・反作用の法則

運動の法則3 ニュートン力学

- 第一法則: 慣性の法則
 - 力が働かない限り、どんな粒子も静止あるいは等速直線運動を続ける
 - 慣性系を指定している

運動の法則4 ニュートン力学

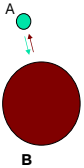
- 第二法則: 運動の法則
 - 粒子の質量を m とすると
 - 運動方程式 $\rightarrow \frac{d}{dt} \{m \vec{v}(t)\} = \vec{f}(t)$
 - 運動量 $m \vec{v} \equiv \vec{p} \rightarrow \dot{\vec{p}} = \vec{f}(t)$
 - 質量、力の定義でもあり、運動の法則でもある。
 - m が一定なら、 $m \vec{a} = \vec{f}(t)$
 - $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$, $1 \text{ kgW} \quad 9.8 \text{ N} \quad (\quad g \quad 9.8)$

運動の法則5 ニュートン力学

■ 第三法則：作用・反作用の法則

■ 力が作用すると、それと同じ大きさの力が逆向きに反作用する。

■ 2つの粒子A,Bがあって、AがBに力を及ぼすと、必ずBはAに力を及ぼし返す。AがBに及ぼす力と書くなどすれば、 $\vec{f}_{AB} = -\vec{f}_{BA}$



運動の法則6 ニュートン力学

■ 運動の法則の応用：向心力

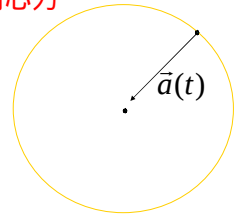
■ 例：等速円運動：

■ 加速度ベクトル： $\vec{a}(t)$

- 大きさ： v^2/b
- 方向・向き：半径方向で円軌道の中心に向かう

■ よって、(向心)力は

- 大きさ： mv^2/b
- 方向・向き：半径方向で円軌道の中心に向かう

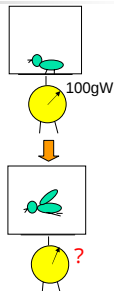


運動の法則7 ニュートン力学

■ 運動の法則の応用

■ 飛び上がった鳥の重さ

- 密閉した箱の中
- 鳥と箱の重さ100gW
- 飛び上がって空中静止
- 重量計の目盛りは？
 - 1) 100gWより少ない
 - 2) 100gW
 - 3) 100gWより多い



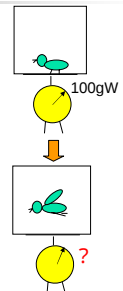
運動の法則8 ニュートン力学

■ 飛び上がった鳥の重さ

■ 重量計の目盛りは？

- 2) 100gW

- 第二法則から、合力は0
- 第三法則から、空気は翼から鳥の重さ分だけ下に押されている
- 空気は箱を下にその分押す
- 計りは箱から鳥と箱の重さ分押されているはず



ラーメンのスープ

西山豊「サイエンスの香り」日本評論社

■ ラーメンのスープ

- なかなか減らないが、食べ終わってみると意外に少ない → ？

■ 理由

- 麺が入っているので汁の量を多く感じる
- 食べ始めは熱いので減る速さが遅い

■ スープの量の判断 → 表面と重さ

- 陶器の鉢は不透明、スープも不透明

ラーメンのスープ

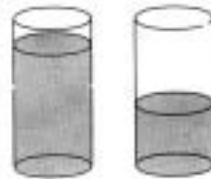


図7 二次元的な広がり

ラーメンのスープ

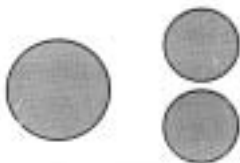


図8 二次元的な広がり

$$\sqrt{2} \approx 1.41$$

ラーメンのスープ



図9 三次元的な広がり

$$\sqrt[3]{2} \approx 1.26$$

ラーメンのスープ



図1 表面の変化

ラーメンのスープ

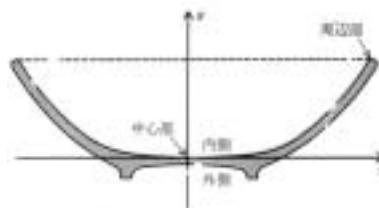


図2 ラーメン鉢の断面図

ラーメンのスープ



図4 回転体の体積

ラーメンのスープ

- 鉢の形: $y = Ax^\alpha$ (A, α は定数)
- ラーメンの容積 V と表面積 S の関係

$$S = \pi x^2 = \pi (y / A)^{2/\alpha} = \pi A^{-2/\alpha} y^{2/\alpha}$$

$$V = \int_0^y S dy = \int_0^y \pi A^{-2/\alpha} y^{2/\alpha} dy = \frac{\pi^{-\alpha/2} A \alpha}{\alpha + 2} S^{1+\alpha/2}$$
 - $\alpha = 3 \rightarrow V \propto S^{5/2}$
- ラーメンの容積 V と重さ W の関係
 - 鉢の重さ $\sim 475\text{g}$ 、スープの重さ $\sim 200\text{g (cc)}$

ラーメンのスープ

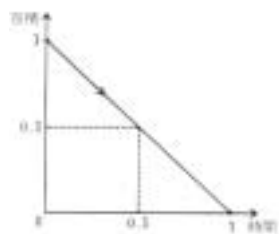


図3 容積の時間変化

ラーメンのスープ

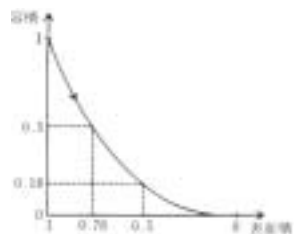


図5 容積と表面積

ラーメンのスープ



図4 容積と重さ