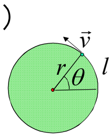
# 力学

- 重要な物理量
  - エネルギー、運動量、角運動量
- 保存量（運動定数）
  - 運動中、一定に保たれる量
- 運動方程式の解
  - 振り子の運動（単振動）
  - 自由落下
    - TV番組で取り上げられた話題

# 準備－三角関数－

- 角度の単位ラジアン（rad）

$\theta = l / r$

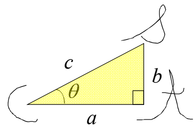



  - 例：$360° = 2\pi r / r = 2\pi_{(rad)}$
  - 速さ：$v = \dot{l} = r\dot{\theta} = r\omega$

$\omega$ ：角速度

- 三角関数

$\cos\theta = a / c$
$\sin\theta = b / c$
$\tan\theta = b / a$



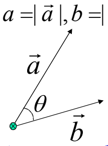

# 準備－ベクトル積－

- 内積：スカラー量 $\vec{a}\cdot\vec{b}$

$a = |\vec{a}|, b = |\vec{b}|$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$
$(\theta = 90° \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0)$

- 外積：ベクトル量 $\vec{a}\times\vec{b}$



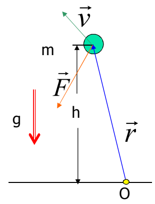

$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin\theta$ ：平行四辺形の面積

方向：$\vec{a},\vec{b}$ に垂直で $\vec{a}$ から $\vec{b}$ に回した右ねじの進む向き

$(\theta = 0° \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0})$

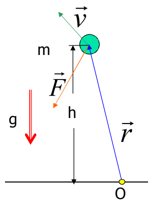
# 重要な物理量

- 記号
  - m:物体の質量
  - $\vec{r}$:位置ベクトル
  - h:物体位置の高さ
  - $\vec{v}$:速度ベクトル
  - v:速さ $|\vec{v}|$
  - g:重力加速度
  - $\vec{F}$: 力ベクトル



# 重要な物理量

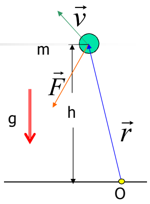
- エネルギー（仕事量）:　$W = \vec{F}\cdot d\vec{r}_{(J=N\cdot m)}$
  - 運動エネルギー
    $K = mv^2/2$
  - 位置エネルギー
    $U = mgh$
  - 力学的エネルギー
    $E = K + U$
  - その他
    - 熱、電磁気、核エネルギー等




# 重要な物理量

- 運動量:　$\vec{p} = m\vec{v}$
  $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$　:運動方程式
- 角運動量　$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$
  $\dot{\vec{L}} = \vec{N}$　:角運動量方程式
  $\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F}$ : 力のモーメント（またはトルク）
  円運動の場合: $\dot{\theta} = \omega$　:角速度

$$\vec{L} = mrv\vec{k} = mr^2\dot{\theta}\vec{k} = mr^2\omega\vec{k}$$
$$\therefore d(mr^2\omega)/dt = N_z = rF_\theta$$

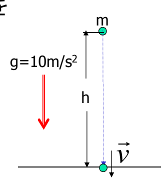



# 保存量（運動定数）

- 運動中も時間変化せず、一定値をとる量
  - 全エネルギーは保存量:
    （力学的エネルギー）
    ＋（熱等その他すべてのエネルギー）＝（一定）
    - 例: 平面上を物体が動く場合、振り子の運動
    - 注: $E=mc^2$
  - 熱等のエネルギーが無いと見なせる場合、
    力学的エネルギーは保存量
    $E = K + U = mv^2/2 + mgh = const.$

# 保存量（運動定数）

- 例: 自由落下（空気抵抗を無視できる場合）
  力学的エネルギーは保存量
  $E = K + U = mv^2/2 + mgh$
  - 高さ20m（h=20m）から静かに物体を落下させた場合、着地時の速さは？
    $mgh = mv^2/2 \therefore v = \sqrt{2gh}$
    $v = \sqrt{2\cdot 10\cdot 20} = \sqrt{400} = 20m/s$
    $= 20\times 3600m/h = 72km/h$



# 保存量(運動定数)

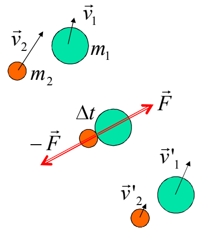
- (合)力が働かなければ運動量は保存量 $\because \dot{\vec{p}} = \vec{F}$
  - 例:2物体の衝突
    - 系の全運動量が保存する

$$m_1\vec{v}'_1 - m_1\vec{v}_1 = \vec{F}\Delta t$$

$$+)\ m_2\vec{v}'_2 - m_2\vec{v}_2 = -\vec{F}\Delta t$$

$$(m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2) - (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = \vec{0}$$

$$\therefore m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$




# 保存量(運動定数)

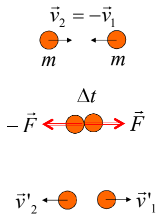
- 運動量保存の適用例
  - 例:同じ質量をもつ2物体の正面衝突

$$m\vec{v}'_1 + m\vec{v}'_2 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

$$= \vec{0}$$

  - $\therefore \vec{v}'_1 = -\vec{v}'_2$ :対称性!

衝突後の速さはエネルギーロスで決まる



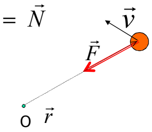

# 保存量(運動定数)

- (合)トルクが働かなければ角運動量は保存量 $\because \dot{\vec{L}} = \vec{N}$
  - 例:中心力
    - 系の全角運動量が保存する

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$$

$\because$ $\vec{r}$と $\vec{F}$ は平行($\theta = 0$)

$$\therefore \dot{\vec{L}} = \vec{0}, \vec{L} = const.$$




# 保存量(運動定数)

- 角運動量保存の適用例
  - 例:糸で引っ張られた玉の平面円運動(中心力)

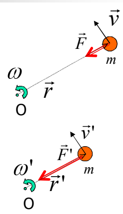
$$d(mr^2\omega)/dt = N_z = rF_\theta = 0$$

$$L'_\theta = mr'^2\omega' = mr^2\omega = L_\theta$$

$$\therefore \omega' = (r/r')^2\omega$$

$$\therefore v' = r'\omega' = (r/r')^2 r'(v/r) = (r/r')v$$

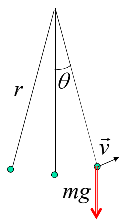
$$\therefore K' = 1/2mv'^2 = (r/r')^2 1/2mv^2 = (r/r')^2 K$$



## 運動方程式の解

- 振り子の運動（単振動）

$$m\dot{v} = -mg\sin\theta$$
$$v = r\omega = r\dot{\theta}$$
$$\therefore mr\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$$
$$\therefore \ddot{\theta} = -(g/r)\theta$$
$$\therefore \theta = A\cos(\Omega t + B), \Omega = \sqrt{g/r}$$
$$\therefore T = 2\pi\sqrt{r/g}$$

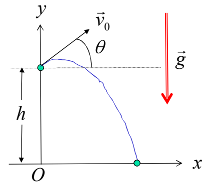



振り子の等時性

## 運動方程式の解

- 自由落下(空気抵抗が無い場合）

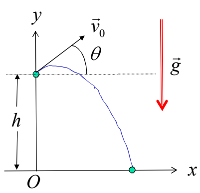
$$m\dot{\vec{v}} = m\vec{g}$$
$$\therefore \dot{v}_x = 0, \dot{v}_y = -g$$
$$v_x = (v_x)_0 = v_0\cos\theta$$
$$v_y = (v_y)_0 - gt = v_0\sin\theta - gt$$
$$x = (v_0\cos\theta)t$$
$$y = h + (v_0\sin\theta)t - (1/2)gt^2$$




## 運動方程式の解

- 自由落下(空気抵抗が無い場合）

$$x = (v_0\cos\theta)t$$
$$y = h + (v_0\sin\theta)t - (1/2)gt^2$$




- 放物線

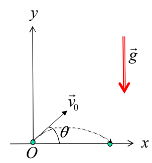
$$\therefore y = h + (\tan\theta)x - \{g/(2v_0^2\cos^2\theta)\}x^2$$

## 運動方程式の解

- 遠投(空気抵抗が無い場合）
  - h=0,$V_0$とした場合、落下最大水平距離を与える角度は？

$$x = (v_0\cos\theta)t$$
$$y = (v_0\sin\theta)t - (1/2)gt^2$$

$$y = 0 \Rightarrow t = 0, (2v_0/g)\sin\theta$$
$$\therefore x = (v_0^2/g)(2\sin\theta\cos\theta) = (v_0^2/g)\sin(2\theta)$$
$$\theta = \pi/4 = 45^\circ \Leftrightarrow x = x_{max} = (v_0^2/g)$$




- 空気抵抗があると45度より少し小さめに投げ出すと最大遠投距離となる。

## 運動方程式の解

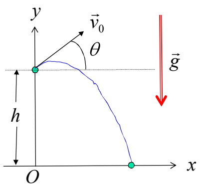
- 自由落下(空気抵抗がある場合)

$$m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - Cv\vec{v}$$

- C:空気抵抗係数に比例する定数

$$m\dot{v}_x = -C\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,v_x$$

$$m\dot{v}_y = -C\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,v_y - mg$$




## Bullet Hits Mom a Mile Away!

- 1998年、アメリカのある丘で、若者が撃ったライフルの弾が、1マイル離れた所で日光浴していた女性に命中した！

⇩

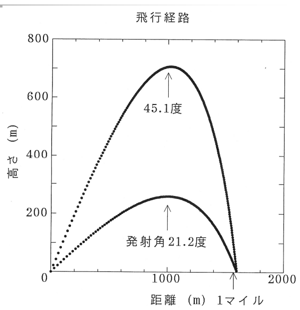
自由落下の応用問題


BULLET FIRED IN THE AIR HITS MOM A MILE AWAY

She was sunbathing in her own backyard!

## Bullet Hits Mom a Mile Away!

- 銃弾を半径3.8mmの球、質量2.6gとし、初速を時速1134km、抵抗係数を0.17と仮定した。
- 角度によっては1マイル届く！
- 1マイル飛ぶ角度が2つある！



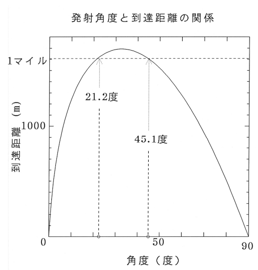

## Bullet Hits Mom a Mile Away!

- 当たる確立は、

1千万分の1！

⇩

ビデオ



## 飛び降り自殺？

- 人がマンションから落下したが、フェンスに激突して一命を取りとめた。
- 高さ26mの地点からの落下で、フェンスの高さが1m、その位置がマンションから9mであった。
- 自殺か？事故か？

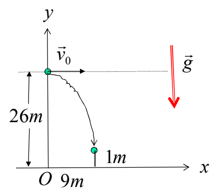
⇩

自由落下の応用問題！


## 飛び降り自殺？

- 自由落下(空気抵抗が無い場合）

$$x = v_0 t$$
$$y = 25 - (1/2)gt^2$$
$$y = 0 \Rightarrow t = \sqrt{50/g} = \sqrt{5}$$
$$x = v_0 t = v_0\sqrt{5} = 9$$
$$\therefore v_0 = 4m/s = 14km/h$$




- 自転車のスピード程度

## 飛び降り自殺？

- 人がマンションから落下したが、フェンスに激突して一命を取りとめた。
- TBSウオッチ
- TBSブロードキャスター
  - 屋上テラスの柵に足をかけて斜め上向きに飛び出したかも？
  - その場合、9m届く初速度は？（空気抵抗を考慮）