表現

三井隆久 ©
Department of Physics, Keio University School of Medicine,
4-1-1 Hiyoshi, Yokohama, Kanagawa 223-8521, Japan
(Dated: May 14, 2019)

自然現象を数値や数式で表現するための決まりと方法、数値や数式で得られた結果を身の回りの日常的な現象に対応させる方法、物理学における自然現象の定式化の規則やモデル化について述べる。数学の演習問題と物理の演習問題の違い、スカラー・ベクトル物理量がただの数値の羅列と異なること、内積・外積・ベクトル演算子など物理学の基本法則に用いることが許される演算などについて理解していただきたい。

I. 序論

「自然という書物は数学の言葉で書かれている」、ガリレオの有名な言葉であるが、**身の回りの物に数字は書かれていない**。どのようにして数字で自然を表したらよいだろうか。ここでは、自然と数値との対応関係について述べる。身長や体重の測定、目の前に置かれた物体の落下のように身近な目に見える事象を扱う場合には、自然現象と数値との対応関係について明確な規則を定義しなくても大きな間違いをすることはないだろう。しかし、138 億光年かなたの宇宙や原子核内部、タンパク質の分子構造や人体内部を間接的な計測から推定する場合、初めてであう病気に対する処方（投薬後の推定）などの場合には、五感による推測・判断には説得力がない。このような場合には、知られている事項を正当性が保証されている方法で組み合わせ、定義に基づいて推論する、すなわち**論理的な推論に基づき判断し説明する**ことが最も信頼性の高い方法である。

先人の努力により、論理的に推論するための優れた方法（数学など）が考案されてきた。しかし、実際に目の前の現実に対処するためには論理の世界に対する知識だけでは不十分であり、自然界と論理の世界との対応関係を明確にする必要がある。これにより、**現実世界に対する論理的な推論に基づいた判断が可能になる**。

物理学の成果が自然現象の記号による表現をもとに得られて来たのは言うまでもないが、**的確な記号化により発展した例**は他にもある。**ドレミを用いた楽譜**は今では当たり前の音の表現方法である。これにより、音楽を記号として保存・伝承できるようになっただけでなく、解析や分類など詳しく調べることが可能になり、編曲などがやりやすくなった。**ルービックキューブ**が発明されてすぐに、**回転操作を記号で表すことに成功**し、その後、群論など**数学を駆使して解法が見出された**。単に 1 つの解法が見出されるだけでなく、最小手順か否かの検証や、ランダムに色付けしたキューブを回転操作のみで色を揃えられるか否かの検証などができる。**折り紙**は日本の伝統的な遊びであるが、現在では極めて進歩している。折った紙を広げたときの**折り目の研究から紙を折る操作の記号化に成功**し、折り紙は数学の言葉で論理的に表せるようになった。これにより、**1 枚の紙を折ることのみで極めて複雑な造形ができる**ようになった。この成果—1 枚の紙を折って造形する—は、エアバックの袋のたたみ方、人工衛星の太陽電池を小さくたたんでロケットに入れる方法、体内へ入れる医療器具の小型化など実用面でも役立っている。**紐の結び目**の数式による表現も確立され、様々な紐、文字通りの紐・宇宙の構造・DNA 等、現在も発展している。**適切な表現は、文化の保存（文字や楽譜）、数学との連携による解析など人類の進歩を導いている。**

II. 表現とは

物や概念が歴然として目前にある事を前提とし、これらを記号や数値に置き換えることを**表現**という。物理学に限らず**写生**や**作文**、**楽譜**などが例に挙げられる。

A. 基底

写生による表現では、直線の引き方、丸の書き方等の基本要素があり、文章による表現には、日本語の単語や文の終わりには丸を書くというような基本要素がある。楽譜には基本的な音階とその配置の規則がある。これらの基本要素をうまく組み合わせることで必要なことを表現する。表現をする場合の基本要素のことを**基底**という。**表現は基底を組み合わせることによってなされる。**

基底の選択は自由であるが、自然現象を表現する場合は**自然界と直接むすび付いている物 (具体的な物とする、抽象的な物はだめ)** を基底に選ぶ。この基底が**単位**や**座標系**である。

B. 表現の変換

月にロケットを飛ばす場合、ロケットの進むべき軌道を求める必要がある。しかし、物体の運動について分かるのは、ニュートンの運動の 3 法則と地球と月の位置関係である。この法則は、知りたい情報ではないが、容易に手に入る。そこで、運動の 3 法則を用いて、**計算**をすることにより、ロケットを飛ばすために必要な最善の軌道を求める。

別な例であるが英語が不得意な人が英語で文章の提出を要求されたとき、最も良い方法は、得意な言語 (日本語) で内容のしっかりとした作文をして、英語に**翻訳**してもらうことである。こうすれば、英語が母国語の専門家が読むに耐える英文ができる。

民謡によいメロディーがあったとしてもそれを世界中に広めるのはなかなか難しいが、オーケストラに**編曲**すれば、多くの人が受け入れやすくなる。

必要な情報と容易に入手できる情報が異なるとき、容易に入手できた情報を**翻訳**や**計算**などにより必要な情報に変換することを、**表現の変換**という。翻訳は、日本語の単語

の組み合わせ、すなわち日本語の基底で書かれた文章を、英語の単語の組み合わせ、すなわち英語の基底で書かれた同じ物や概念を表す文章に変換する作業である。編曲は（例外は多いが）楽器の組み合わせを変える場合が多い。

翻訳も計算も中身は同じ (同値) 状態を保ったまま変換する必要がある。中身が同じなのだから表現の変換は無駄な作業のように思えるかもしれないが、先の例で示したように現実に利用できる表現方法になっていないと使用することができず意味がない。表現の変換は極めて重要なことである。

C. 数学の演習問題と物理の演習問題

諸君の中には数学の演習問題は得意でも、物理の演習問題は苦手という人も多い。両者がどのように違うのか、典型的な問題で考えてみよう。

数学によく出てくる因数分解

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1), \tag{1}$$

は、同値な別表現を求めることなので、翻訳とよく似ており、（私の経験では）語学の先生に得意な方々が多い。

数学の演習問題
2000 円を A 君、B 君、C 君で分けた。C 君の金額は A 君の 3 倍より 50 円少なく、B 君の金額は A 君と C 君の金額の合計より 300 円少ない。A 君の金額を求めよ。
答え

$$2000 = A + 3A - 50 + (A + 3A - 50 - 300), \tag{2}$$

を解いて、$A = 300$ 円。

物理の演習問題
水平面から θ 度傾き摩擦係数 μ の斜面に物体 (質量 m) を置いた。静止した物体が斜面を t 秒間滑り下りるときの移動距離を求めよ。下向きの重力加速度を g とする。
答え
斜面に対する垂直抗力は $mg\cos\theta$ なので、摩擦力は $\mu mg\cos\theta$。一方、斜面を滑り下りる方向への重力は $mg\sin\theta$ である。両者の合力により物体は斜面に沿って運動する。物体の質量が m なので、運動方程式から、斜面を滑り下りる加速度は、$a = g\sin\theta - \mu g\cos\theta$ となる。物体は等加速度 a で滑り降りるから、t 秒間の移動距離は $at^2/2$ である。

数学の演習問題は、日本語で表現された問題文を数式に表現変換（翻訳、編曲）することが解法の主な部分である。一方、物理では、現実世界における状況を理解して、数式で表現する部分が最も重要である。演習問題を解くという観点では、数学と物理は全く違う。語学の得意な文系に数学の得意な人がしばしばいるが、そのような人でも物理は全く分からないという場合が多い。物理で自然現象を数式で表現するのは、風景を見て写生するのと似ている。写生では、景色を見て松の木があるとか、人がいてボールを投げているとかの認識をし、そのうえで重要な点を押さえて、それらしく書く。おそらく、初めてみる物の集合からなる景色の写生は、かなりな困難を伴うだろう。

諸君はこれから、医者として、生命系の研究者として生きていくことになるが、目の前で生じている自然現象を定量的に解析する必要があり、状況を理解して数式で表現する手法を物理学から学んでほしい。これにより、定量的な議論や、未知の現象の論理的推測が可能になる。

注 : 高校までの数学の演習問題にこのような例が多いということである。表現の変換は、数学という学問のごく一部を形成しているにすぎない。

D. 理論物理学の研究

理論研究の主な仕事は同値変形、すなわち計算である。これでは新しい発見が無いように思えるかもしれないが、そうではない。民謡をオーケストラに編曲するとき、少し音符を付け加えることでバイオリンやフルートに合った立体的な曲になったりする。同じように、理論研究をする場合、プランクの量子仮説やアインシュタインの光速不変原理のように新しい条件を少し付け加えた上で、同値変形を行い、得られた結論と現実との比較を行い検証することで、それまでに無かった自然界のより適切な理解を得ることができる。

III. 自然現象を定量的に表現する

A. 物理量の数値による表現—自然界は人間の表現方法とは無関係に存在する—

自然界は様々な物、運動・変化に富んでいる。この中には定量化可能な部分があり、時間、質量、速度、加速度、エネルギー、運動量などのように定量的に表現し、これらの概念を物理量とよぶ。物理量を用いた自然界の表現には、重要な決まりがある:

自然界は人間の表現方法とは無関係に存在するので、表現された物理量は表現方法に依存せずに実態を表している必要がある。

これは、物理量を表現基底である単位と数値を対にして表すことで達成できる。

B. 物理量の表現の変換 (単位を変えること)

表現変換のよりどころは、物理量はどのような表現方法を用いても同じということである。たとえば、70 kg の体重を g にする場合、

$$70\text{kg} = x\text{g} \quad (\text{基底に依存せず物理量は同じ}), \tag{3}$$

ここで、x は g 単位で表現した質量である。また、この式の等号 (=) は、左辺と右辺の物理量が等しいことを意味しており、数値が等しいという意味ではない。

次に基底どうしの関係を示す辞書が必要である。この場合に必要な辞書の中身は、

$$1\text{kg} = 1000\text{g} \quad (\text{辞書}), \tag{4}$$

である。英文和訳に用いる辞書は、たとえば「I = わたしは」のように書いてあり、基底の変換に用いる辞書という点では単位の変換と同じ用途のものである。式 (3), (4) から x を求め、70 kg を g 単位で表現すると 70000 g となる。

C. 自然界を定量的に表現するために必要な単位： 国際単位系

単位は表現基底であるから、自然界と直接結びついている物を選ぶ。人類はこれまでに多数の物理量を発見・考案し、それぞれの単位を勝手に決めてきた。無数の単位が乱立するなかで、**いくつかの基本単位を決めれば、そのほかの単位は基本単位を組み合わせることで表現できる**ことが分かってきた。これは、**物理法則が充実し、多数の物理量の間の関係が分かるようになった**からである。

このような状況で、基本単位を世界的に統一しようという努力がフランスを中心にしてはじまった。この流れを受け継ぐ**単位系**を国際単位系 (**SI 単位系**、Le Systeme International d'Unites) という。

(1) メートルは、1／299792458 秒の時間に光が真空中を伝わる行程の長さ。

(2) キログラムは、質量の単位であって、1 kg はプランク定数の値を正確に 6.62607015×10^{-34}Js と定めることによって設定される。

(3) 秒は、^{133}Cs 原子の基底状態の 2 つの超微細準位の間の遷移に対応する放射の 9192631770 周期の継続時間。

(4) アンペアは、真空中に 1 メートルの間隔で平行に置いた、無限に小さい円形断面積を有する無限に長い 2 本の直線状導体の長さ 1 メートルにつき 2×10^{-7}N の力をおよぼし合う不変の電流。

(5) ケルビンは、水の 3 重点の熱力学温度の 1／273.16。

(6) モルは、0.012kg の ^{12}C の中に存在する原子の数と等しい数の要素粒子（原子、分子、イオン、電子、その他の粒子）またはその集合体（組成が明確にされたものに限る）で構成された系の物質量とし、要素粒子またはその集合体を特定して使用。

(7) カンデラは、周波数 540×10^{12}Hz の単色放射を放出し、特定の方向におけるその放射強度が 1／683 ワット毎ステラジアンである光源の、その方向における光度。

この中で、(1)～(4) は、物理量の単位として最も重要である。上記に従った定義の単位を用いて, **長さ (M), 質量 (K), 時間 (S), 電流 (A) を表現する単位系を MKSA 単位系**という。それ以外の基本的な単位は、m, kg, s, A を組み合わせて表現できる。

周波数	Hz=s^{-1}
力	N=m kg s^{-2}
圧力	Pa=m^{-1}kg s^{-2}
エネルギー	J=m^2 kg s^{-2}
電圧	V=m^2 kg s^{-3} A^{-1}
静電容量	F=m^{-2} kg^{-1} s^4 A^2
インダクタンス	H=m^2 kg s^{-2} A^{-2}
電気抵抗	Ω=m^2 kg s^{-3} A^{-2}
電荷	C=sA
絶対温度	K
電力	W=m^2kg s^{-3}

IV. 広がりのある空間の数値による表現

A. 3 次元空間の表現方法

3 次元空間内の場所を表す場合も表現の規則に従い、**空間に直接結びついた基底**を選び、基底の組み合わせで任意の場所を表す。空間に直接結びついた基底のことを**座標系**という。3 次元空間内の場所を表すには、基底は 3 個必要であり、$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ のように表す。これらの基底は、現実の空間の特定の場所と向きに対応している。この座標系を用いた場所の表現は、表現基底の何倍の位置にあるかで表す。たとえば、表現したい位置が、$\vec{i}$ の 5 倍と、$\vec{j}$ の 4 倍、$\vec{k}$ の 3 倍の位置であれば、$5\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ のように表現してもよいし、基底を $|\vec{i},\vec{j},\vec{k}\rangle$ とかいて、$(5, 4\ , 3)|\vec{i},\vec{j},\vec{k}\rangle$ のように表現する場合もある。いちいち基底を示さなくてもわかる場合には (5, 4, 3) のように表現してもよい。これは日本人に対して日本語の文章を書くときに日本語であることを明示しないのと同じである。

B. 座標系の変換

空間上のある場所を基底 $|\vec{i}_v,\vec{j}_v,\vec{k}_v\rangle$ を用いて表現したら (a, b, c) となったとき、異なる基底 $|\vec{i}_u,\vec{j}_u,\vec{k}_u\rangle$ で表現したらどの様になるか？

この場合も、表現しようとしている自然界（与えられた空間上の場所）は、どのような表現基底（ただし原点は同じ）を用いても同じということを用いる。したがって、

$$(a,b,c)|\vec{i}_v,\vec{j}_v,\vec{k}_v\rangle = X|\vec{i}_u,\vec{j}_u,\vec{k}_u\rangle$$
(表現しようとしている場所は基底に依存せず同じ) (5)

となる。

また、基底どうしの関係を示す辞書に、

$$|\vec{i}_v,\vec{j}_v,\vec{k}_v\rangle = A|\vec{i}_u,\vec{j}_u,\vec{k}_u\rangle \quad (\text{辞書}), \tag{6}$$

と書いてあれば、式 (5), (6) から、$X=(a,b,c)A$ となる。

V. 物理学の基本法則は如何に表現されるべきか

運動方程式をはじめとして、物理学には様々な基本方程式（物理法則）がある。**これらの方程式も表現の基本に従って書かれている**。したがって、基底があり、基底を組み合わせて表現する。**自然現象は表現基底とは無関係に存在する**のだから、自然現象を表現する**物理法則を基底にあらわに依存しないように表現する**ことができるはずであり、そうした方が理にかなっている。基底にあらわに依存しないというのは、基底が不要という意味ではなく、**あらゆる基底で成立する表現方法**であり、特定の基底を意識しなくてよいという意味である。

A. 単位系に依存しない表現方法

単位と数値を対にして物理量を表現すれば、どのような単位系でも成立するように物理法則を記述することができる。たとえば、重力加速度 g のもとで、高さ h の場所から物体を落下すると、速度 v は、

$$v = \sqrt{2gh}, \tag{7}$$

となる。この式は長さを m で表現しても cm でも成立するし、時間を分で表現しても秒でも成立する。

B. 座標系に依存しない表現方法

自然現象は空間的な広がりのある中で展開され、表現するには座標系が必要である。一方で、人間が勝手に選ぶことができる座標系に物理現象が依存しないように表現する必要がある。ここでは、原点を共有する様々な向きの直交座標系すべてで同じ表現になる物理学の基本法則の表し方について述べる。この目的で、スカラー物理量、ベクトル物理量、テンソル物理量という概念が考案された。

注：相対性理論のところで少し述べたが、物理法則は相対的に等速運動している全ての座標系で同じように表現されるべきであり、特に光速はどの座標系でも同じになる必要がある。本来は、これが最も重要な表現の原則であるが、ここでは、原点を中心とした座標系の回転のみに注目する。

C. スカラーとベクトル

質量や電圧のように大きさのみを持つ物理量をスカラーという。一方、速度や加速度、電場のように、大きさのみでなく向きも物理量として重要な意味をもつような物理量をベクトルという。スカラー物理量は、単位系を決めれば 1 つの数値で表現できる。一方、ベクトル物理量は、単位系と座標系を決めれば、複数の数値で表現できる。

1. 2 つのベクトルからスカラーを得る演算：内積

ベクトルには、$(1, 2, 3)$m/s や v_x, v_y, v_z のように成分で書く方法がある。このような表現には、座標系が明記されていないが、座標系（基底）はどのようになっているだろうか。答えを言えば、特定の座標系が既に指定されている場合と、あらゆる座標系で成立する場合がある。この違いは、演算の仕方で決まる。特定の座標系でのみ成立する演算と、あらゆる座標系で成立する演算があるからである。

たとえば、電磁場中での電子の運動を記述する、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = qE_x + q(v_yB_z - v_zB_y), \tag{8}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = qE_y + q(v_zB_x - v_xB_z), \tag{9}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = qE_z + q(v_xB_y - v_yB_x), \tag{10}$$

という方程式は、成分で書いた方程式だが、あらゆる座標系で同じ式になるために座標系を明記する必要がない。スカラー・ベクトルは決まりを守って演算すると、成分で書いてもあらゆる座標系で同じ式になるようにできる。逆に言えば、そうではない演算は、物理学の基本法則に導入するべきではない。演算方法に決まりがあることがスカラー・ベクトルと数値の羅列との違いである。

決まりに従わない演算例として、1 つのベクトル $\vec{v}$ からスカラーを得る目的の演算 $3v_x + 2v_y$ について検討する。ある座標系で速度が $\vec{v} = (3, 4, 0)$ であれば、$3v_x + 2v_y = 17$ となる。一方、z 軸周りに少し回転した別な座標系では、同じ速度は $(5, 0, 0)$ として表現でき、このとき $3v_x + 2v_y = 15$ となる。したがって、$3v_x + 2v_y$ は座標系に依存する値なので、スカラーではない。

同様に、速度 $\vec{v}$, 磁場 $\vec{B}$ に対して、$v_xB_y + v_zB_z$ なども座標系により値が変わる。誤解しないでほしいが、$3v_x + 2v_y$ というような計算をしてはいけないという意味ではなく、このような計算が実態を表すのは、特定の座標系だけであることを認識してほしいということである。

一方、$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ や、$v_xB_x + v_yB_y + v_zB_z$ は、原点を共有するどのような向きの直交座標系で計算しても値が同じになる。速度 $\vec{v}$ をある座標系で表現したら $(3, 4, 0)$ であるとすれば $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 25$ であり、z 軸周りに少し回転した別な座標系で同じ速度は $(5, 0, 0)$ として表現でき、このときも $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 25$ となる。これはベクトルを用いて演算する場合には重要であり、この演算に内積という名前を付けて、性質が詳しく調べられた。また、このような演算は、座標系に依存しないから成分を明示する必要がないので、成分表示しない場合の演算記号も考案された。ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の内積 $\vec{a}\vec{b}$ を成分で書くと、

$$\vec{a}\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z, \tag{11}$$

である。

また、内積には直感的意味があり、内積の大きさ $|\vec{a}\vec{b}|$ に対して、

$$|\vec{a}\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\theta), \tag{12}$$

という関係がある。ここで、θ は、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度である。

特別な場合として、自分自身との内積は、大きさの自乗になる:

$$\vec{a}\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \tag{13}$$

内積は 2 つのベクトルからスカラーを得る唯一の演算である。重要なのは、唯一の演算であるということである。内積以外の方法で、2 つベクトルからスカラー量を得るような計算は、物理学の基本法則にはあり得ない。

2. 2 つのベクトルから第 3 のベクトルを得る演算：線形結合と外積

2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて、第 3 のベクトルを得る演算について考えてみよう。(a_x, b_x, b_z) や (a_xb_x, a_yb_y, a_zb_z) などは、成分表示をする座標系に結果が依存してしまう。一方、$(2a_x+3b_x, 2a_y+3b_y, 2a_z+3b_z)$ や、$(5a_x-4b_x, 5a_y-$

$4b_y, 5a_z - 4b_z)$ は、どのような座標系でも結果が同じになる。この演算は、2 つのベクトルの線形結合によって新しいベクトルを作る演算である。すなわち、A, B を任意のスカラー量として、

$$(Aa_x + Bb_x, Aa_y + Bb_y, Aa_z + Bb_z), \tag{14}$$

である。この演算（線形結合）もどのような座標系で成分表示しても同じ式で表されるので、成分を用いない表現方法 $A\vec{a} + B\vec{b}$ がある。

線形結合（式 (14)）以外で、ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ から、大きさと向きを持ち座標系に依存しない物理量（ベクトル）を得る演算を探した結果、

$$(a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x), \tag{15}$$

が発見された。この演算は貴重なので、**外積**という名前が付けられ、$\vec{a} \times \vec{b}$ と書くことに決め、詳しく研究されている。式 (15) を見て明らかなように、

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \tag{16}$$

となり、交換法則が成立しない。また、自分との外積がゼロ:

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0, \tag{17}$$

となることもすぐにわかる。

式 (14) と (15) について考えてみよう。ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の線形結合により、この 2 つのベクトルを含む平面内の任意のベクトルを作ることはできるけれど、両者に直交したベクトルを作ることができない。しかし、外積によって作られる新しいベクトルの向きは $\vec{a}, \vec{b}$ に直交している。このため、式 (14), (15) を用いれば、2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ から、3 次元空間内の全てのベクトルを作ることができる。このことから、**線形結合は、2 つのベクトル物理量から、同一平面内のベクトル物理量を得る唯一の方法であり、外積は、2 つのベクトル物理量から直交したベクトル物理量を得る唯一の方法**である。これ以外の方法で、2 つのベクトルから新しいベクトルを生成するような演算は**物理学の基本法則には必要ないし、あり得ない**。

外積によってつくられた新しいベクトルの大きさは、

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\theta), \tag{18}$$

ここで、θ は、ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とのなす角である。式 (18) を見て判るように、**外積の大きさは、ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ によって作られる平行四辺形の面積**である。平行四辺形の面積がゼロであることからも同じベクトル同士の外積はゼロ、すなわち $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ であることが理解できる。

また、**外積によってつくられた新しいベクトル $\vec{a} \times \vec{b}$ の向きが、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交している**ことの証明には、$\vec{a}$ 及び $\vec{b}$ と $\vec{a} \times \vec{b}$ との内積を計算し、$\vec{a}(\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ と $\vec{b}(\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ を証明すればよい。この計算は定義に従い、成分を用いて計算すれば容易である。

物理で外積が登場するのは、回転運動が関連する場合が多い。直接回転運動と関係無いように思えるが何となく関連しているのが磁場を含む場合で、この場合も外積を用いる。たとえば、電磁場中の電子の運動を記述する式 (8) ∼ (10) は、

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \tag{19}$$

となる。

この式は、外積と線形結合からなるので、どのような向きの座標系でも成立することが分かる。

D. 異なる基底で表現された物理量の和・差

単位や座標系を含む物理量として表現し計算する場合、数学的には等号が成立しても物理的に意味がない場合がある。ここでは、単位や座標系をそろえることの意味について考えてみる。

ニュートンの運動方程式

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{20}$$

における $\vec{F}$ や $\vec{v}$ は、座標系も単位も含むベクトル量である。また、回転している物体上の各点における速度 $\vec{v}$（後述）は、

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{21}$$

となる。数学では、「等しい物どうしを加えても、結果は等しい」ということなので、

$$\vec{F} + \vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}\ \text{（この加法は定義されていない）}, \tag{22}$$

が成立するはずである。しかし、この先の式変形の方法、すなわち、あらゆる座標系・単位系で成立する式変形の方法がないから物理的には無意味である。これは、$\vec{F}$ と $\vec{v}$ は数値で表すときの表現基底 (単位と座標系) が異なっているからである。

しかし、**一般論として、どのような単位系・座標系でも成立するような式変形の方法がない**というだけで、**等号は成立しており、全ての場合について無意味というわけではない**。連成振動のところで、異なる座標系で定義された x_1,x_2 に対して $x_1 + x_2$ や $x_1 - x_2$ を求めたが、等号は成立しているし、その後の式変形でも等号は保たれている。本来は、座標系を 1 つ設定し、バネの平衡状態での長さを導入して質点の平衡状態での座標を m_1,m_2 について求める等をする必要がある。

VI. 基本方程式をもとにした現実問題の取り扱い： 最適な座標系を選ぶ

物理学の基本法則はどのような向きの座標系、単位系でも成立するようにスカラー・ベクトルにより記述されている。したがって、目の前の特定の現象の記述を行う場合の単位系・座標系は自由に選べる。しかし、**選び方で難しい計算になる場合もあれば、簡単になる場合もある**。経験や試行錯誤で決める場合が多い。

A. 例： 位置エネルギー

重力下でバネに重りを吊した場合を考えよう。重りに作用する力 $\vec{f}$ は、重力加速度 $\vec{g}$ による力と、バネの復元力 $-k\vec{x}$ である。したがって、

$$\vec{f} = m\vec{g} - k\vec{x}, \tag{23}$$

となる。これは、あらゆる座標系で成立する。$\vec{x}$ は重りの位置であり、ここでは真下だけでなく、x,yz のあらゆる方向にバネが伸びて重りが動く場合を想定している。

上向きを x 軸の正とすれば、$\vec{g} = (-g, 0, 0)$ なので、成分を書けば、

$$f_x = -mg - kx, \tag{24}$$
$$f_y = -ky, \tag{25}$$
$$f_z = -kz, \tag{26}$$

であり、位置エネルギー U は、$f = -dU/dx$ から、(後で述べるが不適切な表現で本来は偏微分)

$$U(x, y, z) = mgx + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2), \tag{27}$$

となる。

一方、下向きを x 軸の正とすれば $\vec{g} = (g, 0, 0)$ なので、成分を書くと、

$$f_x = mg - kx, \tag{28}$$
$$f_y = -ky, \tag{29}$$
$$f_z = -kz, \tag{30}$$
$$\tag{31}$$

であり、位置エネルギー U は、

$$U(x, y, z) = -mgx + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2), \tag{32}$$

となる。

あまり実用的ではないが、斜め 45 度を z 軸の正とすれば、$\vec{g} = (0, g/\sqrt{2}, -g/\sqrt{2})$ なので、成分を書くと、

$$f_x = -kx, \tag{33}$$
$$f_y = \frac{1}{\sqrt{2}}mg - ky, \tag{34}$$
$$f_z = -\frac{1}{\sqrt{2}}mg - kz, \tag{35}$$
$$\tag{36}$$

であり、位置エネルギー U は、（現段階では導けないかもしれないが）

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{2}}myg + \frac{1}{\sqrt{2}}mzg + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2), \tag{37}$$

となる。式は違うように見えるが、どれも同一の自然現象を表現している。実際、これを用いて計算し、結果を同じ座標系を使って現実世界に戻すと、どのような座標系でも同じ現象になる。

式 (37) で気づいたと思うが、もう 1 つ大きな問題がある。内積・線形結合・外積を用いてあらゆる向きの直交座標系で同じ表現になる式を求めたが、$f = -dU/dx$ における**微分は力と平行な向きに x 軸を選んだ場合のみ成立**する。**微分演算も工夫して座標系に依存しないようにする必要がある**。空間による微分に関する考察なので、空間の異なる場所で物理量が定義されているような場合である。以下では、広がりのある空間での微分について述べる。

VII. 場 (FIELD), スカラー場, ベクトル場

広がりのある空間の各場所で物理量が定義できるとき、そのような物理量を持つ空間を**場**という。たとえば、大気には、大気の流れがあるので、空間の各場所で流速が定義でき、**速度場**が定義できる。大気圧は、空間の各場所で定義できるから、**圧力場**が定義できる。同様に、空気の密度も**密度場**を定義できる。地球の重力加速度は、地球上の各場所で定義できるから、**重力場**が定義できる。

大気の密度を表す密度場は、大気中の場所を指定して、その場所の大気密度として定義される。一方、大気中の場所は、3 次元の座標系で表現されるから、密度場を定義するには、密度の単位の他に、場所を指定する座標系も必要である。どのような座標系で位置を表しても同一場所の大気密度は同じになるはずである。このように、場所を指定する座標系の選び方に依存しないスカラー量の場を**スカラー場**という。

同様に、場所を指定する座標系の選び方に依存しないベクトル量の場を**ベクトル場**という。スカラー場の場合は、値そのものが座標系の選び方に依存せず同じ値であるが、ベクトル場の場合には、位置を指定する座標系を変えると、ベクトルの成分そのものが変わる。

たとえば、重力場で考えよう。上向きを正の z 軸、水平方向を x, y とする座標系で、原点における重力加速度が

$$\vec{g} = (0, 0, -g), \tag{38}$$

であると仮定する。座標系の選び方を変えて、x 軸を回転軸にして時計回りに 45 度回転した座標系を選べば同一の場所における重力加速度は、

$$\vec{g} = \left(0, \frac{g}{\sqrt{2}}, -\frac{g}{\sqrt{2}}\right), \tag{39}$$

となる。ベクトル量は、場所を指定する座標系が変わると表現された各成分は変わるけれど、同一の場所では同一の物理量を示すように変化する。

VIII. 座標系に依存しない微分「ベクトル演算子」

物理量をベクトルやスカラーで書くと、基本法則を座標系に依存しない（あらゆる座標系で成立する）ように書くことができて、**物理現象が表現方法に依存しない**ことが明示できる。しかし、物理量だけで物理の基本法則が成り立っているわけではない。物理法則には空間での微分も含まれており、微分を上手に表現しないと上記の目的は達成できない。このような背景から、ベクトル演算子である**ナブラ演算子**が考案された。

A. 偏微分

複数の変数で決まる関数、例えばx,yが変数なら$f(x,y)$、があるとしよう。この関数をxのみ、またはyのみが変化する関数とみなして微分するのを**偏微分**といい,xの場合には、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}, \tag{40}$$

と書く。

B. ナブラ演算子

ポテンシャルエネルギー (位置エネルギー)$U(x)$ から、力fを求めるには、

$$f = -\frac{dU}{dx}, \tag{41}$$

とする。この式は、**力と平行な向きにx軸を選ぶ場合のみ成立する**式である。実際、力の向きをy軸とした座標系では、

$$f = -\frac{dU}{dy}, \tag{42}$$

となり、異なる式になる。しかし、ここで使用している**位置エネルギーUはスカラー量**であり、座標系に依存して決まる量ではなく、実際の場所に付随した物理量である。同様に、**力fもベクトル量**であり、座標系とは関係ない。したがって、**微分を表現方法に依存しないように記述**できれば、式 (41) を表現方法に依存しないように書くことができる。

このようなことを考慮し、空間に対する微分をベクトル量のようにあらゆる座標系で成立するように定義したのが∇(**ナブラ演算子**) である。ベクトルが成分で表すことができるのと同様に、∇も成分で書くことができ、

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{43}$$

である。∇演算子は、どのような直交座標系で表現しても式 (43) である。

ポテンシャルエネルギーUを微分したら、力$\vec{f}$になることを∇演算子でかくと、

$$\vec{f} = -\nabla U, \tag{44}$$

となり、成分で書くと、

$$f_x = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}, \tag{45}$$

$$f_y = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}, \tag{46}$$

$$f_z = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}, \tag{47}$$

となる。

式 (44) で、Uはスカラー量であるが、スカラー量に作用させるナブラ演算子を特に **grad（グラディアント, gradient）**と呼ぶ。したがって、式 (44) は、

$$\vec{f} = -\mathrm{grad} U, \tag{48}$$

と書いても良いし、ベクトル$\vec{r}$に関する微分であることを明確にしたい場合には、

$$\vec{f} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}}, \tag{49}$$

と書くこともある。

1. 例： 単振動

ナブラ演算子を用いるとUと$\vec{f}$の関係は、式 (44) である。この定義をバネに吊されたおもりに作用する力（式 (23)）に適用すると、$U(\vec{r})$ は、

$$U(\vec{r}) = -m\vec{g}\vec{r} + \frac{1}{2}k\vec{r}^2, \tag{50}$$

となる。この式で$\vec{r}$や$\vec{g}$を座標系を決めて成分表示して代入すれば、先に求めた式 (27), (32), (37) が得られる。

2. 例： 2体系の力学エネルギー保存則

力学のところで 2 体系の力学エネルギー保存を証明した。これは、式としては正しいが、証明としては不適切である。なぜならば、力学エネルギー保存は極めて一般的に成り立つにも関わらず特定の座標に限定して証明していること、x_1,x_2は対等なのに、$x = x_1 - x_2$で成立して$x = x_2 - x_1$で成立しないからである。ここでは、任意の直交座標系を想定して証明しよう。

対象としている系は 2 個の質点m_1,m_2からなり、両者には力$\vec{f}_1$,$\vec{f}_2$がそれぞれ働き、以下の運動方程式に従う:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{f}_1, \tag{51}$$

$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{f}_2, \tag{52}$$

ここで、$\vec{f}_1$,$\vec{f}_2$は保存力であり、この系の位置エネルギー$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ を用いて、

$$\vec{f}_1 = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1}, \tag{53}$$

$$\vec{f}_2 = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2}, \tag{54}$$

と表すことができる。力学エネルギーEは、

$$E = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2), \tag{55}$$

として定義され、これを時間で微分して一定ならば、エネルギーが保存されることの証明になる。

$$\frac{dE}{dt} = m_1\vec{v}_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\vec{v}_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} + \frac{d}{dt}U(\vec{r}_1, \vec{r}_2), \tag{56}$$

ここで、

$$\frac{d}{dt}U(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \frac{d\vec{r}_1}{dt}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1} + \frac{d\vec{r}_2}{dt}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2}, \tag{57}$$

$$= -\vec{v}_1\vec{f}_1 - \vec{v}_2\vec{f}_2, \tag{58}$$

である。式 (56) に式 (51), (52),(58) を代入して、

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v}_1\vec{f}_1 + \vec{v}_2\vec{f}_2 - \vec{v}_1\vec{f}_1 - \vec{v}_2\vec{f}_2, \tag{59}$$

$$= 0, \tag{60}$$

となり、力学エネルギー保存が証明された。

この証明では運動の第 3 法則、すなわち $\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$ が用いられていないし、この系では必ずしもそうなっていない。これは、この系の位置エネルギーを $U(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ として極めて一般化したことによる。たとえば、地上に 2 個の物体がある場合、2 個の物体どうしが相互作用するだけでなく、地球の引力の影響を受ける。ここでの証明には、このような場合 (動かない第 3 の物体) も含まれている。

完全な 2 体系として、位置エネルギーが $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ のみに依存する、すなわち、

$$U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \tag{61}$$

と仮定すれば、

$$\frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial \vec{r}_1} = -\frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial \vec{r}_2}, \tag{62}$$

から、 式 (53),(54) を用いて、$\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$ が成立することが分かる。当然であるが、先のエネルギー保存の証明にはこの場合も含まれている。また、式 (61) を $U(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ としても、その他は同じ式でエネルギー保存が成立するので、2 個の物体が対等に扱われていることが分かる。

この証明により、力学系の全エネルギー保存が証明されたと捉えることも可能であるが、より適切には、保存力系では、位置エネルギー U を式 (53),(53) として定義すると全エネルギーが保存する、もしくは、全エネルギーが保存するように位置エネルギーを定義した、として理解するべきである。

3. 微分の計算

式 (58) の微分は定義に従い、

$$\frac{d}{dt}U(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{U[\vec{r}_1(t+\Delta t),\vec{r}_2(t+\Delta t)] - U[\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t)]}{\Delta t}, \tag{63}$$

から導くことができる。3 次元では $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ となるので、U は 6 変数関数で、複雑なので、ここでは 2 変数 $U(x,y)$ の微分を計算してみる。

$$\frac{d}{dt}U(x(t),y(t))$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{U[x(t+\Delta t),y(t+\Delta t)] - U[x(t),y(t)]}{\Delta t}, \tag{64}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{U[x(t+\Delta t),y(t+\Delta t)] - U[x(t),y(t+\Delta t)]}{\Delta t}$$

$$+ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{U[x(t),y(t+\Delta t)] - U[x(t),y(t)]}{\Delta t}. \tag{65}$$

1 変数関数の合成関数の微分,

$$\frac{df[x(t)]}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f[x(t+\Delta t)] - f[x(t)]}{\Delta t}$$

$$= \frac{dx}{dt}\frac{df(x)}{dx}, \tag{66}$$

と同じなので、

$$\frac{d}{dt}U(x(t),y(t)) = \frac{dx}{dt}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial U}{\partial y}, \tag{67}$$

となる。

C. ベクトル場にナブラ演算子を作用させる： divergence と rotation

ベクトル場にナブラ演算子を作用させる場合を考えよう。ベクトル場 $\vec{A}$ にナブラ演算子を作用させた結果、スカラー場が作られる場合 $(\nabla\vec{A})$ とベクトル場が作られる場合 $(\nabla\times\vec{A})$ がある。スカラー場が作られる場合のナブラ演算子を div(ダイバージェンス) といい、div$\vec{A}$ と書く場合もある。ベクトル場が作られる場合のナブラ演算子を rot(ローテーション) といい、rot$\vec{A}$ と書く場合がある。成分で書くと、ダイバージェンスは、

$$\nabla\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \tag{68}$$

となる。同様に、ローテーションは、

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \tag{69}$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \tag{70}$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}, \tag{71}$$

である。

ダイバージェンスが使われるのは、水流の速度場から、水の湧き出しや吸い込み場所を探す場合などであり、ローテーションが使われるのは、渦の中心を探す場合などである。どちらも流体力学で発展し、電磁気学など場を扱うところで用いられている。

スカラー場 U に grad を作用させてベクトル量にして、さらに div を作用させてもう一度スカラー場にすることもできる。このような演算は、$\nabla(\nabla U)$ であり、$\nabla^2 U$ と書く場合もある。これを成分で書くと、

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \tag{72}$$

となる。

$\nabla^2 U = 0$ は物理ではしばしば使われる方程式で、ラプラス方程式という。たとえば、ゴム膜をピンと張って、指で押したときの形や、温度分布、磁場や電場、重力場などを求める場合である。多方面で使われているので、この方程式の解法はかなり確立している。

物理量は、観測者の表現方法に依存しないことが原則で、それを満たしている x, y, z による微分は、ナブラ演算子である。このため、物理学の基本法則において、空間座標を用いた微分が登場するときは、私の知る限り全てナブラ演算子を用いた grad, div, rot である。∇ は作用する相手により微分の仕方が決まり、

$$\nabla \text{ スカラー} \to \text{grad}, \tag{73}$$
$$\nabla \text{ ベクトル} \to \text{div}, \tag{74}$$
$$\nabla \times \text{ ベクトル} \to \text{rot}, \tag{75}$$

である。

IX. 自然現象のモデル化は抽象絵画と同じ

自然現象は物理法則を用いて厳密に全て表すことは不可能である。したがって、作文や絵画のように、重要な部分とそうでない部分を取捨選択して表現する。例えば、太陽のまわりを回る地球の公転軌道を求める場合ならば、地球を質点で近似してもかなり正確な公転軌道が得られる。**重要な部分だけ拾い上げて、架空ではあるが現実に必要な精度の範囲内であてはまる系を創造することをモデル化という**。ピカソの絵画が写真と異なるように、モデル化された系は現実と異なるけれど、ピカソの絵画が写生として意味があるように、モデル化された系にも意味がある。ピカソの絵画は世間の評価を後日受けるが、モデル系を用いた理論は実験結果で評価する必要がある。このとき、**誤差の評価**が重要になる。実験物理学において誤差の評価がなぜ重要かといえば、モデル系がどのくらい正しいか、ずれが生じる原因はモデルのどこに原因があるかを知る必要があることによる。実験技術が未熟とか装置がへぼい故の誤差は (第三者には) 評価以前に論外である。

X. まとめ

観察者の表現方法とは無関係に存在する自然現象を数式や数値で表現するとはどのようなことなのか、またどのようにすれば数式や数値で表現されている結果を自然現象に対応させることができるのかについて述べた。また、一見抽象的に見える数式を見て、具体的な自然現象の姿を想像するにはどのようにするべきなのかについて述べた。**物理学を自然現象の写生や作文・楽譜、計算を翻訳・編曲と同じようにとらえて、自由に見たこと思ったことを表現し他者に伝えて有効に活用できるようになれば幸いである**。医師はカルテに現在の病状を記録するが、これは将来自分や他人が見たときのための良い記録となる。同様に、数式や数値で定量的に表現できれば、将来の病気の様子や、直接観察できない患部の推測に役立つ。

A. 余談： 解析力学、量子力学

連成振動のところで、2 個の単振動が 1 個のバネで結合している系を扱った。この時、中心のバネの伸びが $x_2 - x_1$ であることは容易に理解できるが、このバネの力が物体 1 に作用するとき、$+k_{\rm M}(x_2 - x_1)$ なのか $-k_{\rm M}(x_2 - x_1)$ なのか迷った学生も多い。**目に見える系**なので、様々な観点から考慮してどっちなのか決めるのがよい。さて、ベクトルやナブラ演算子を用いると、座標系に依存しない表現ができて一般性が向上するが、これだけでは**目に見えないものや未知の探索には不十分**であることに気付いただろうか。ニュートンの運動方程式 $\vec{F} = m\vec{a}$ を用いる限り、**力学系は寄木細工のような連立方程式で表され**、どのような力がどのような向き・符号で作用するのか頭を悩ます。複雑な系や目に見えない原子や原子核内部、宇宙初期などの探索には別な力学理論体系が必要である。

保存力の場合に限定されるが解析力学、量子力学では寄木細工のような連立方程式を出発点としない。例として、連成振動を解析力学で解いてみよう。

系の状態を座標 x_j と運動量 p_j で表す。また、系の運動エネルギーを T, 位置エネルギーを U とすると、

$$H(x_j, p_j) = T + U, \tag{76}$$

が力学系を表し、寄木細工のような連立方程式ではない。H をハミルトニアンという。

このハミルトニアンから導かれる運動方程式は系の構造に依存せず、

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \tag{77}$$
$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \tag{78}$$

となる。これを正準方程式といい、保存力が作用するあらゆる力学系で成立する。

連成振動の系では、p_1,p_2 を物体 1、2 の運動量とすると、

$$\text{運動エネルギー } T = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}, \tag{79}$$
$$\text{位置エネルギー } U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}k_{\rm M}(x_1 - x_2)^2, \tag{80}$$

なので、ハミルトニアンは、

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}k_{\rm M}(x_1 - x_2)^2, \tag{81}$$

となる。正準方程式は、式 (77) から、

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{p_1}{m}, \tag{82}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{p_2}{m}. \tag{83}$$

また、式 (78) から、

$$\frac{dp_1}{dt} = -kx_1 - k_{\rm M}(x_1 - x_2), \tag{84}$$
$$\frac{dp_2}{dt} = -kx_2 - k_{\rm M}(x_2 - x_1), \tag{85}$$

となる。式 (82),(83) をもう一度微分して式 (84),(85) へ代入すると力学で導いた時と同じ式が得られる。「結局、同じ式ではないか。」と思うかもしれないが、同じ現象を同じ座標・変数を用いて表現したのだから当然である。重要なことは $F = ma$ を用いた力学で系を表現すると、最初から式 (82) $\sim$ (85) のような連立方程式になり、解析力学での系の表現は式 (81) で表されたハミルトニアンであるということ。**未知の現象や極端に複雑な現象を扱う場合、どちらの方が見通しが良いか**、ということである。どの項が運動にどのような影響を与えているのか、といった影響の大小の見積もりを行い、複雑な運動の分析を行うことが容易になる。歴史的には天王星の公転軌道分析から当時未知の惑星 (海王星) の存在を予言するなどの成果をもたらしている。