ベクトル、行列の復習

担当：　長倉　大輔
（ながくら だいすけ）

ゼミ資料：http://web.keio.jp/~nagakura/zemi_note.htm

ベクトルと行列

- n 次元ベクトル

n 個の数値で表されるもの

(例)　人の体格を

(身長、体重、胸囲、座高)

で表すなら、4つの数値が必要となる。
これはベクトルの１例である。

ベクトルと行列

- n 次元ベクトルの成分表示

n 次元ベクトルの成分表示とは n 個の成分を順番に並べたもので

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$$

のようになる。

表記を簡単にするために、ベクトルは上記のように、通常 1 つの文字 $\boldsymbol{a}$ などで表される。

ベクトルと行列

- 列(縦)ベクトル、行(横)ベクトル

成分表示を縦に並べたもの、すなわち

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

を**列(縦)ベクトル**といい、横に並べたものを**行(横)ベクトル**という。

ベクトルと行列

- n 次元ベクトルのスカラー倍、和と差

n 次元ベクトルのスカラー倍、和、差は

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_1 \pm b_1, \ldots., a_n \pm b_n)$$
$$k\boldsymbol{a} = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$$

で定義される。

ベクトルと行列

- 例題 (ベクトルの和、差、定数倍)

$\boldsymbol{a} = (1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (2, 1)$について

(1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ をもとめよ。

(2) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ をもとめよ。

(3) $3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ を求めよ。

ベクトルと行列

- 行列とは

ベクトルはいくつかの数を一列(または一行)で表したが、行列とはその名のとおりいくつかの数を行と列を使って表したものである。

行列にもベクトルと同じような演算(和や差)ができるが、ベクトルにはない新しい演算も可能であり、応用範囲がずっと広がる。

以下では行列の定義、およびその基本的な演算について説明する。

ベクトルと行列

- **行列の定義**

$m \times n$ 個の実数を長方形に並べた

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

を m 行 n 列の行列、または **$m \times n$ 行列**という。

ベクトルと行列

■ 行列の行、列、成分

$m \times n$ 行列において、

$$\begin{array}{r} \\ \text{第}2\text{行}\rightarrow \\ \\ \text{第}m\text{行}\rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\text{第}2\text{列}\uparrow \qquad \text{第}n\text{列}\uparrow$$

上から i 番目の 行を第 i 行、左から j 番目の列を第 j 列という。第 i 行かつ第 j 列の数を(i, j) 成分といい a_{ij} などと表す。

ベクトルと行列

- 行列の演算、和と差とスカラー倍

2つの$m \times n$ 行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{と} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

について

ベクトルと行列

- 行列の演算、和と差とスカラー倍

(1) 2つの行列が等しいとは全ての i, j について $a_{ij} = b_{ij}$ (i =1,…, m, j =1,…, n) である事であり、$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ と書く。

(2) 行列の和(および差)を$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}$とすると、$\boldsymbol{C}$ は$m\times n$ 行列でその(i, j) 成分は $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ で与えられる。

(3) 行列をスカラー倍(例えばk倍)するとは各成分をそれぞれスカラー倍(k倍)する事である。

ベクトルと行列

- 行列の積(掛け算)

(4)　$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ と $n \times l$ 行列 $\boldsymbol{D}$ について、その積 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{AD}$ とは $m \times l$ 行列でその$(i,\ j)$成分が

$$f_{ij} = a_{i1}d_{1j} + a_{i2}d_{2j} + \cdots + a_{in}d_{nj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}d_{kj}$$

で与えられるものである。

ベクトルと行列

- 行列の積(掛け算)

(例)

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{AD}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1l} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1l} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{ml} \end{bmatrix}$$

$$f_{11} = a_{11}d_{11} + a_{12}d_{21} + \cdots + a_{1n}d_{n1},\ \ f_{12} = a_{11}d_{12} + a_{12}d_{22} + \cdots + a_{1n}d_{n2},\ldots$$

$$f_{21} = a_{21}d_{11} + a_{22}d_{21} + \cdots + a_{2n}d_{n1},\ \ f_{22} = a_{21}d_{12} + a_{22}d_{22} + \cdots + a_{2n}d_{n2},\ldots$$

$$\cdots \quad f_{ij} = a_{i1}d_{1j} + a_{i2}d_{2j} + \cdots + a_{in}d_{nj}$$

ベクトルと行列

- 行列の積(掛け算)

(1) $m \times n$ 行列と $n \times l$ 行列の積は $m \times l$ 行列になる。

(2) 掛け合わす行列の前の行列の列と後ろの行列の行が等しくないと定義できない。

(3) $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$

ベクトルと行列

- 行列の演算の性質

和とスカラー倍に関して

(1) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$ (結合法則)

(2) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ (交換法則)

(3) $(a + b)\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{A}$,
$a(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = a\boldsymbol{A} + a\boldsymbol{B}$
$(ab)\boldsymbol{A} = a(b\boldsymbol{A})$

が成り立つ。

ベクトルと行列

- 行列の演算の性質

積に関して

(1) $(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ (結合法則)

(2) $\boldsymbol{A}\ (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$,

$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\ \boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$

(3) $(a\ \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = a\ (\boldsymbol{AB})$

が成り立つ

演習問題 (ベクトルと行列)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

のとき

(1) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ を求めよ。

(2) $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$ を求めよ。

ベクトルと行列

- 正方行列

行と列の数が同じ行列を**正方行列**という。
k 行 k 列の正方行列を k 次正方行列という。
(例)　2次正方行列、　3次正方行列

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ベクトルと行列

- 単位行列

正方行列で対角成分が全て1、非対角成分が全て0である行列を**単位行列**という。

(例)

2行2列の単位行列、 3行3列の単位行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ベクトルと行列

- 単位行列

単位行列を表す記号として $\boldsymbol{E}_k$ がよく使われる。k は単位行列の行(列)数を表す。

例えば

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

である。

ベクトルと行列

- 単位行列の性質

単位行列の重要な性質の一つは
n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_n = \boldsymbol{E}_n\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$

を満たす事である。

ベクトルと行列

- 転置行列

ある行に対して、行と列の成分が入れ替わった行列、すなわち (i, j) 成分と (j, i) 成分が入れ替わった行列を**転置行列**という

(例1) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ の転置行列は $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ である。

(例2) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ の転置行列は $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ である。

ベクトルと行列

- 転置行列の性質

行列 $\boldsymbol{A}$ の転置行列を $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ と書く(行列を転置する事を英語で transpose というから）。転置行列には以下の重要な性質がある。

(1)　$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$

(2)　$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

- 対称行列

n 次正方行列で $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ を満たす行列を**対称行列**という。

演習問題 (ベクトルと行列2)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$ とする。

行列を k 回かける事を $\boldsymbol{A}^k$ と書く。すなわち

$$\boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{A}\text{が}k\text{個}}$$ である。

(1) $(\boldsymbol{A}^2)^{\mathrm{T}}$ と $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^2$ を計算せよ。

(2) 転置行列の性質(2)を用いて$(\boldsymbol{ABC})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$を証明せよ。

逆行列と連立一次方程式

- 逆行列

n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{E}_n$$

を満たす行列 $\boldsymbol{X}$ を**逆行列**という。
この行列の事を $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$ と書く。

逆行列と連立一次方程式

- 逆行列の例

(例1) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ の逆行列は $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ である。

(確認)

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 & 6-6 \\ -2+2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 & 4+4 \\ 3-3 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆行列と連立一次方程式

■ 逆行列の例

(例2) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列は $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ である。

(確認)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+2-3 & -8-10+18 & -6-6+12 \\ 1-1 & -4+5 & -3+3 \\ -1+2-1 & 4-10+6 & 3-6+4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2-4+3 & -2+4-6 & 3-3 \\ 2-5-3 & 2+5-6 & 3-3 \\ 2+6-4 & -2-6+8 & -33+4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆行列と連立一次方程式

- 逆行列の性質

(1) 逆行列は存在するのであれば、ただ1つである。

正則な行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ に対して

(2) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$

(3) $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$とすると、 $\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}^{-1}$

逆行列と連立一次方程式

- 2次正方行列の逆行列の計算

2次正方行列の逆行列には次の公式がある。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

逆行列と連立一次方程式

- 連立一次方程式の行列表示

n 個の未知数 $x_1,\ldots,x_n$ に関する m 本の式からなる次の連立方程式について考える。

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

逆行列と連立一次方程式

- 連立一次方程式の行列表示

この方程式を行列表示すると

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

となる。よりコンパクトに $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とも表せる。ここで

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

である。

逆行列と連立一次方程式

- 連立一次方程式の解

この時もし行列 $\boldsymbol{A}$ に逆行列が存在すれば、
この連立一次方程式の解 $\boldsymbol{x}$ はこの行列表示
の両辺に$\boldsymbol{A}^{-1}$ を掛ける事によって

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \Leftrightarrow\quad & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

と求める事ができる。

演習問題 (逆行列と連立一次方程式)

行列 $\boldsymbol{A}$ は$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$で与えられているとする。

(1) 行列$\boldsymbol{A}$の逆行列を求めよ。

(2) $\boldsymbol{b} = [2 \quad 4]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2)^{\mathrm{T}}$ として、連立方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

行列と行列式

- 行列式とは?

n 次正方行列とは $n \times n$ 個の数字を並べたものであり、それぞれの数字を成分と呼んだ。

行列式とは n 次正方行列の成分に対して定義されるある**演算**の事である。

演算規則はかなり複雑である。
以下ではまず、1次、2次、3次の場合を見ていこう。

行列と行列式

- 1次の行列式

1次の行列式はその数字そのものの事である。
例えば「1」という数字は1次正方行列であるが、その行列式は「1」であり、「-2」の行列式は「-2」である。

- 2次の行列式

2次正方行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の行列式は $ad - bc$ で定義される。

行列と行列式

- 行列式の表記の仕方

行列Aの行列式は $|A|$ もしくは $\det A$ と表す。
(絶対値の符号ではないので注意)

(例) 1 次の行列式
$|8| = 8$ (もしくは $\det 8 = 8$),
$|-2| = -2$ (もしくは $\det -2 = -2$)

(例) 2次の行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 6 = 15$$ (もしくは $\det\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = 15$)

行列と行列式

- 3次の行列式の行列式

3次の正方行列$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$の行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

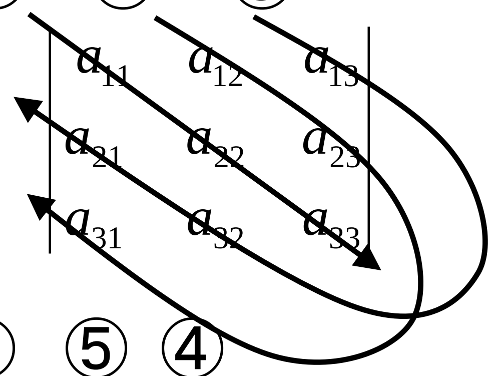
と定義される。

行列と行列式

- サラスの公式

3次の行列式は**サラスの公式**と呼ばれる。
「たすき掛け」で覚える。

＋の部分は ① ② ③

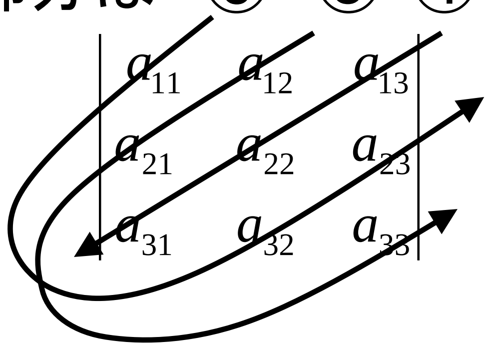


① $a_{11}a_{22}a_{33}$

② $a_{12}a_{23}a_{31}$ の3つ

③ $a_{13}a_{32}a_{21}$

– の部分は ⑥ ⑤ ④



④ $a_{13}a_{22}a_{31}$

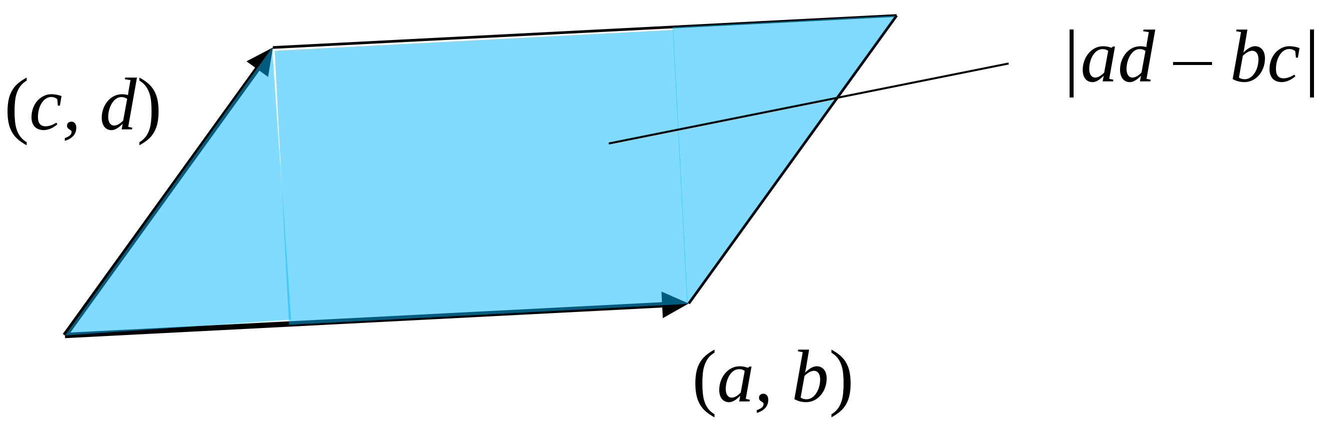
⑤ $a_{12}a_{21}a_{33}$ の3つ

⑥ $a_{11}a_{32}a_{23}$

行列と行列式

- 2次の行列式の幾何学的意味

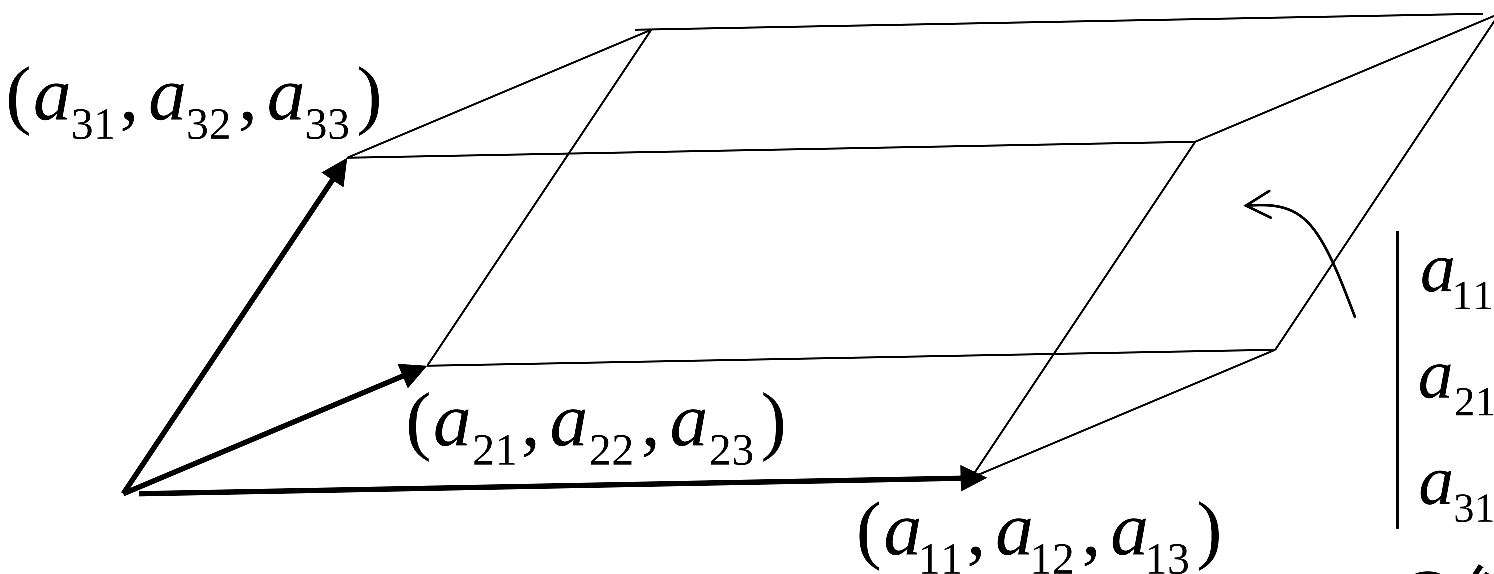
2次の行列式の**絶対値**は、それぞれの行(列)ベクトルによって作られる平行四変形の**面積**と等しい(行列式の値自体は正にも負にもなりうるので絶対値を取る)。



行列と行列式

■　3次の行列式の幾何学的意味。

3次の行列式の**絶対値**は、それぞれの行(列)ベクトルによって作られる平行六面体の**体積**と等しい。



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

の絶対値

行列と行列式

- 例題 (行列式)

次の行列の行列式を計算せよ

(1) 15　(2) -4　(3) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

行列と行列式

- 行列式の性質

行列式はたくさんの興味深い性質をもつ。
以下によく使うものとして2つあげておく。

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式とその転置行列 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ の行列式は等しい。つまり $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ である。

(2) 行列$\boldsymbol{A}$の行列式とその逆行列の行列式の間には

$$|\boldsymbol{A}^{-1}| = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}$$

という関係がある。

行列と行列式

- クラーメルの公式

今、ある連立1次方程式が n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表されているとする。もし$|\boldsymbol{A}| \neq 0$であれば、この連立1次方程式はただ一つの解を持ち、それは

$$x_1 = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|}\ , \quad x_2 = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|}\quad ,\cdots\cdots, \quad x_n = \frac{|\boldsymbol{A}_n|}{|\boldsymbol{A}|}$$

で与えられる。ここで $\boldsymbol{A}_i$ =[$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{i\text{-}1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{a}_n$]である。($\boldsymbol{A}$の第 i 列を $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列)

演習問題 (行列と行列式)

(1) 次の行列式の値を求めよ。

(a)
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(b)
$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

(c)
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

(2) クラーメルの公式によって連立方程式

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

の解 x_1 と x_2 を求めよ。

演習問題 (行列と行列式)

(3) クラーメルの公式によって連立方程式

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の解 x_1 , x_2, x_3を求めよ。

演習問題 (行列と行列式)

(4)

$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ に対して $(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}$

の(1, 1)成分はいくつになるか？

(5)

$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 2 & b \\ b & b^2 \end{bmatrix}$ について $3b^2\,|\boldsymbol{G}^{-1}|$ の値を求めよ。