ベクトルの微分について

あるベクトル $\boldsymbol{\beta} = [\,\beta_1, \ldots, \beta_K]$ の関数 $f(\boldsymbol{\beta})$、のベクトル $\boldsymbol{\beta}$ による微分とは、$f(\boldsymbol{\beta})$のベクトル $\boldsymbol{\beta}$ の成分による偏微分を並べた $K \times 1$ 行列

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_K} \end{bmatrix}$$

である。例えば $f(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_K\beta_K$ の場合

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_K \end{bmatrix} = \mathbf{a}$$

である。これについて次の 2 つの公式が便利である。

(1) $\mathbf{a} = [\,a_1, \ldots, a_K]^{\mathrm{T}}$ に対して

$$\frac{\partial(\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{a}$$

(2) 対称行列 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{K1} & \cdots & a_{KK} \end{bmatrix}$ に対して

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 2\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}$$