ARCH、GARCHモデルとその性質

担当:　長倉　大輔
（ながくらだいすけ）

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ボラティリティ

株式収益率や為替レートのようなファイナンス変数の分析において、それらの収益率の標準偏差は**ボラティリティ**とよばれる。

金融市場では収益率の大きな変動が集中して続く時期がよく観察される。このような現象は**ボラティリティ・クラスタリング**とよばれる。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ボラティィリティの変動のモデル化

ボラティィリティクラスタリングのような変動はARMAモデルではうまく表現できない。

このような変動をうまくモデル化するために、後述する **ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity)モデル**および **GARCH (generalized ARCH)モデル**が用いられる。

以下、これらのモデルについて説明する。

ARCH、GARCHモデルとその性質

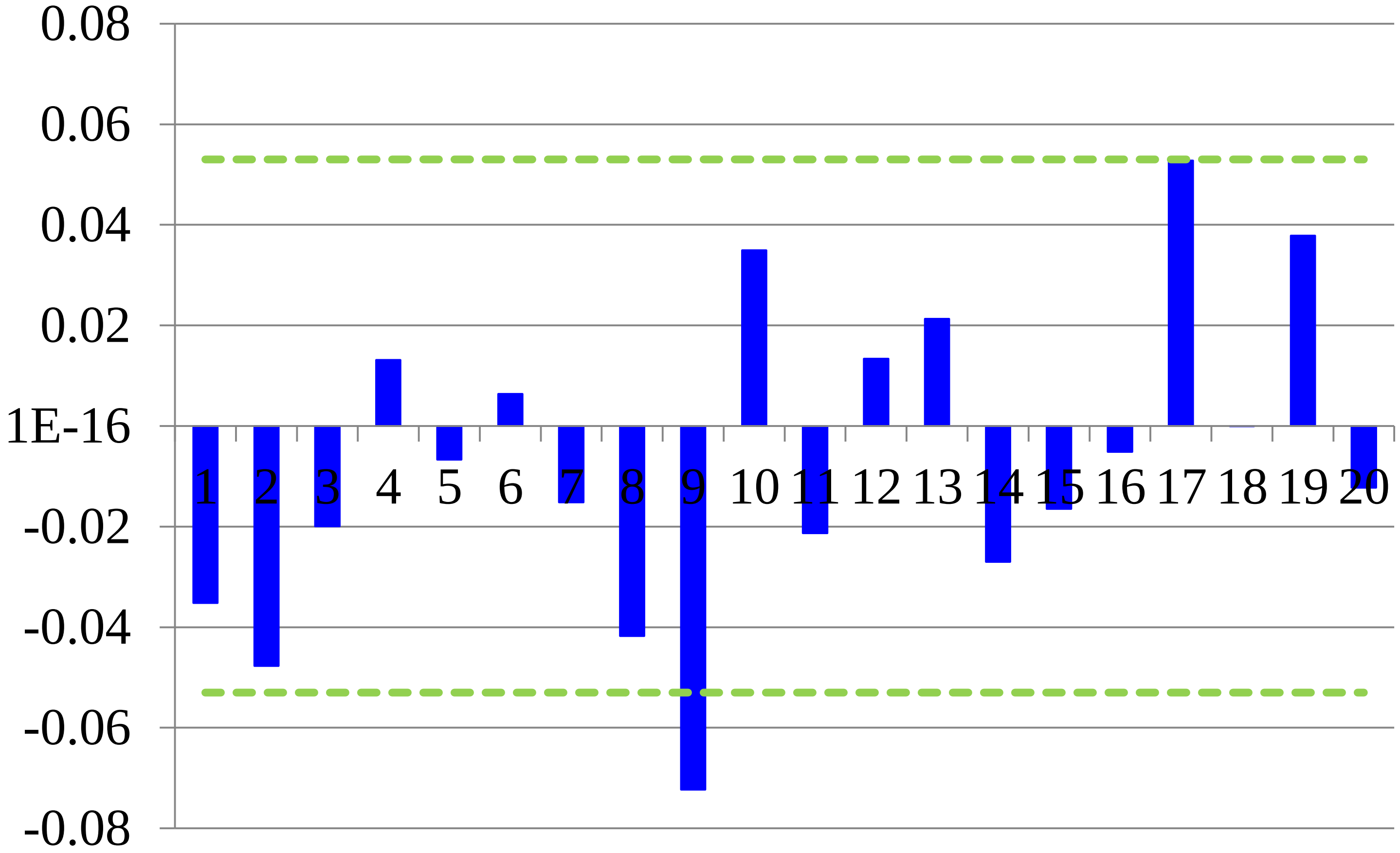
- 金融データの特徴 – ボラティリティクラスタリング

MSCI指数に基づいた日本の日次株式収益率を y_t とする。y_t にはどのような時系列モデルを当てはめるのがよいか考えてみよう。

以下の図は y_t のコレログラムである。
(点線は95%の棄却点)

ARCH、GARCHモデルとその性質

図1: 日本の株価収益率のコレログラム



ARCH、GARCHモデルとその性質

- 金融データの特徴 – ボラティリティクラスタリング

これをみると自己相関はほとんど有意ではなく、y_t の標本平均を求めると 0.0056 であり、ほどんど 0 である。

これらの結果より y_t のモデルの一つの候補として

$$y_t = u_t, \qquad u_t \sim \text{i.i.d}\,(0, \sigma^2)$$

が考えられる(i.i.d なら自己相関は0 となるので)。

ARCH、GARCHモデルとその性質

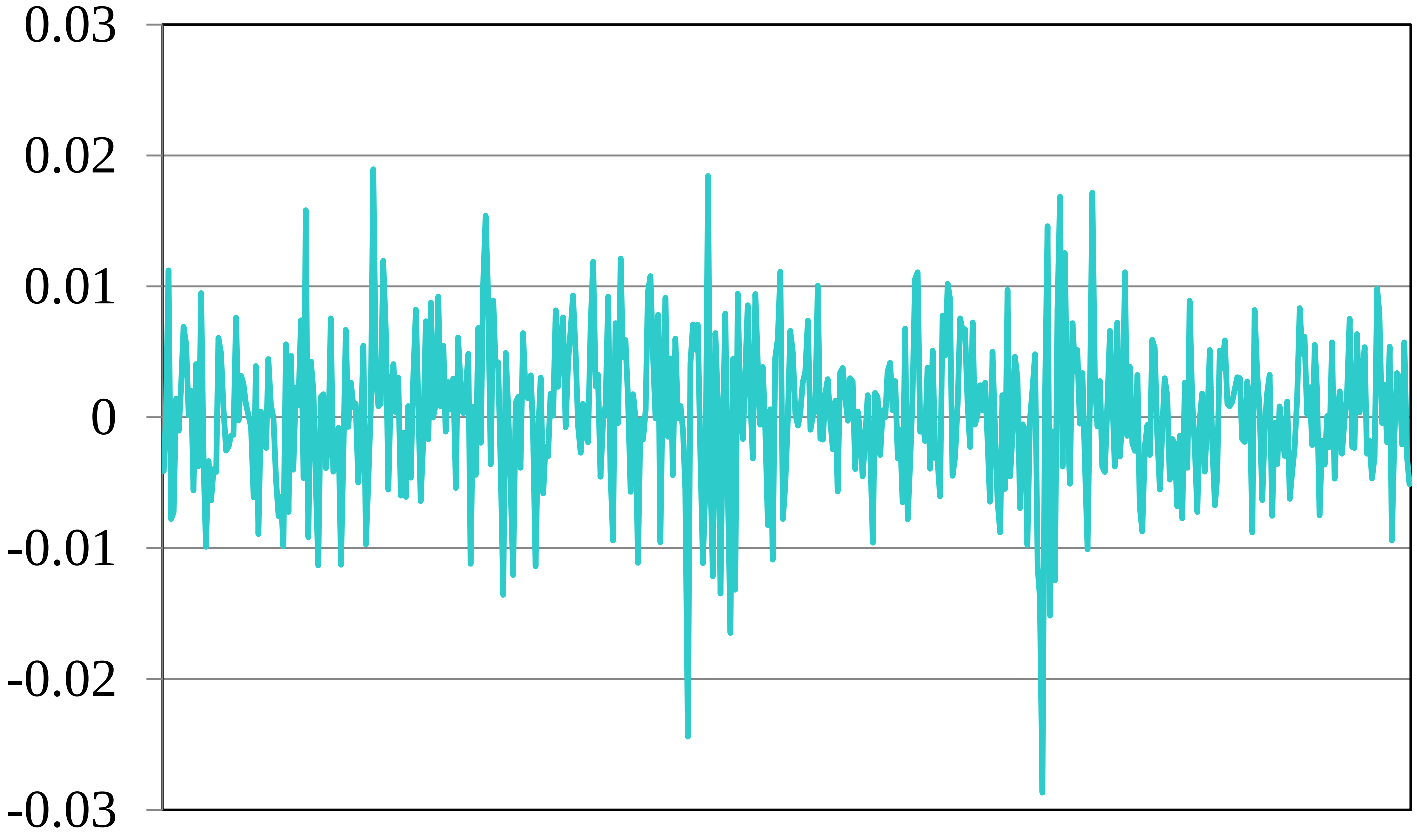
- 金融データの特徴 – ボラティリティクラスタリング

このモデルは(役に立つかどうかは別にして) 一見するとこのデータを生み出すモデルとして、もっともらしいモデルに見える。しかしながらデータをより詳細に見ていくと、このモデルではとらえきれない特徴がある事がわかる。

次の図は y_t の最初の500個(図2)とスケールを調整したi.i.d.ノイズを500個(図3)発生させてプロットしたものである。

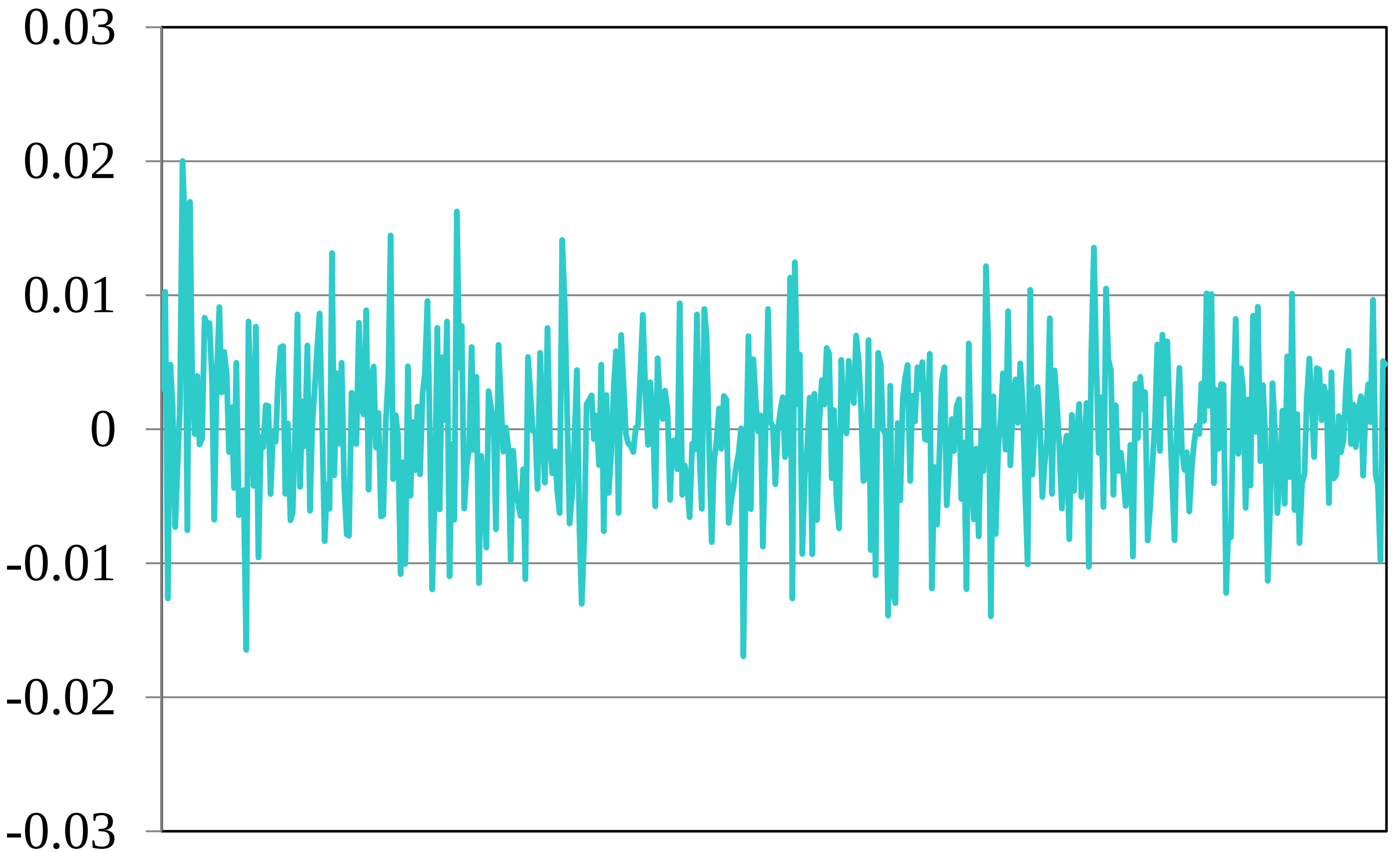
ARCH、GARCHモデルとその性質

図2: y_t の最初の500個



ARCH、GARCHモデルとその性質

図3: i.i.d. ノイズ



ARCH、GARCHモデルとその性質

- 金融データの特徴 – ボラティリティクラスタリング

図2、3を見てみると、y_t はところどころ**大きな変動が続く**場合があるが、i.i.d. ノイズの**変動は一定**であり、この2つの変数の動きは微妙に異なっている事がわかる。

ところどころ大きな変動が続くというのは多くの金融データに共通してみられる特徴であり、このような特徴は**ボラティリティクラスタリング**と呼ばれる。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- 金融データの特徴 – ボラティリティクラスタリング

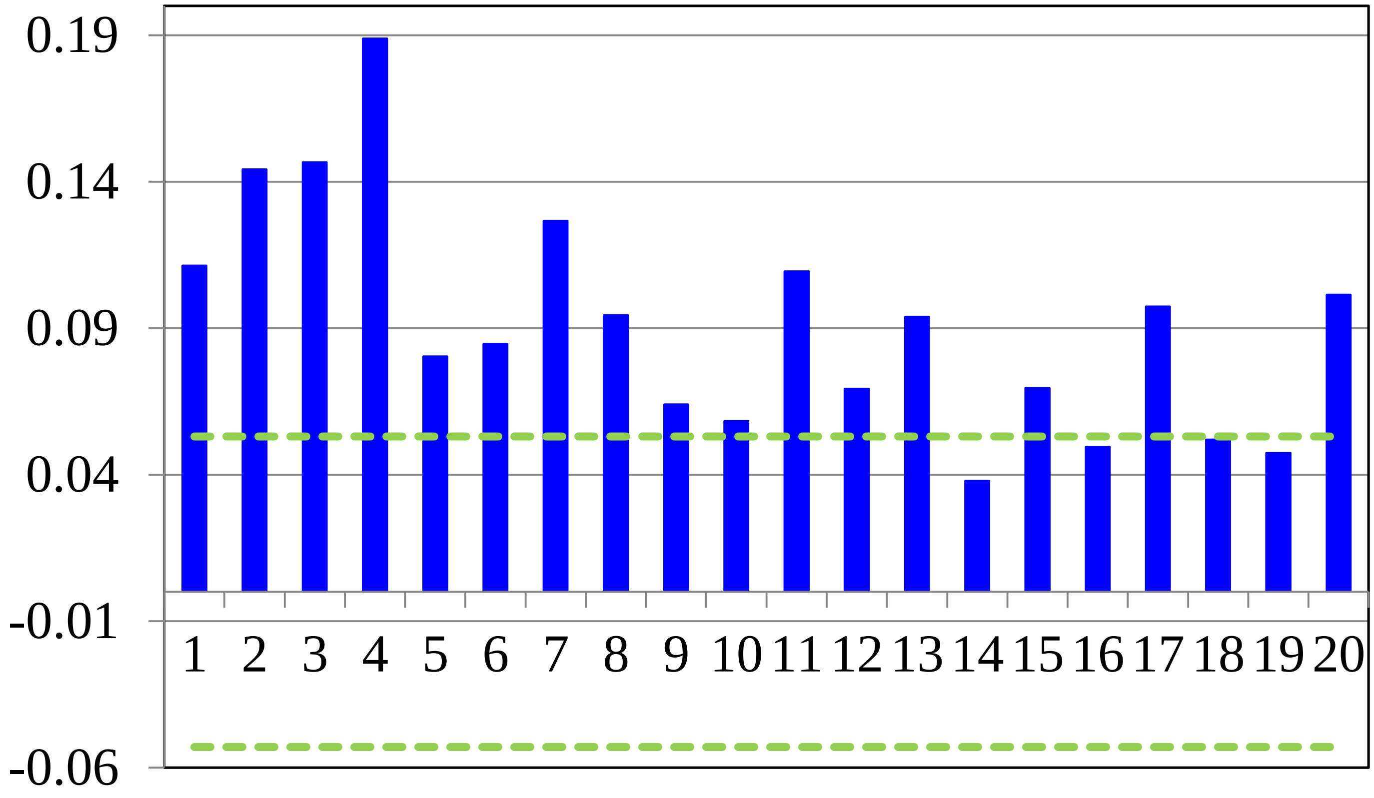
y_t のこのような特徴は、y_t のモデルとして i.i.d. ノイズは**適していない**事を示唆している。

ではこの 2 つの系列は、より具体的にはどのように異なっているだろうか？

以下は y_t^2 のコレログラムと i.i.d. ノイズの2乗のコレログラムである。

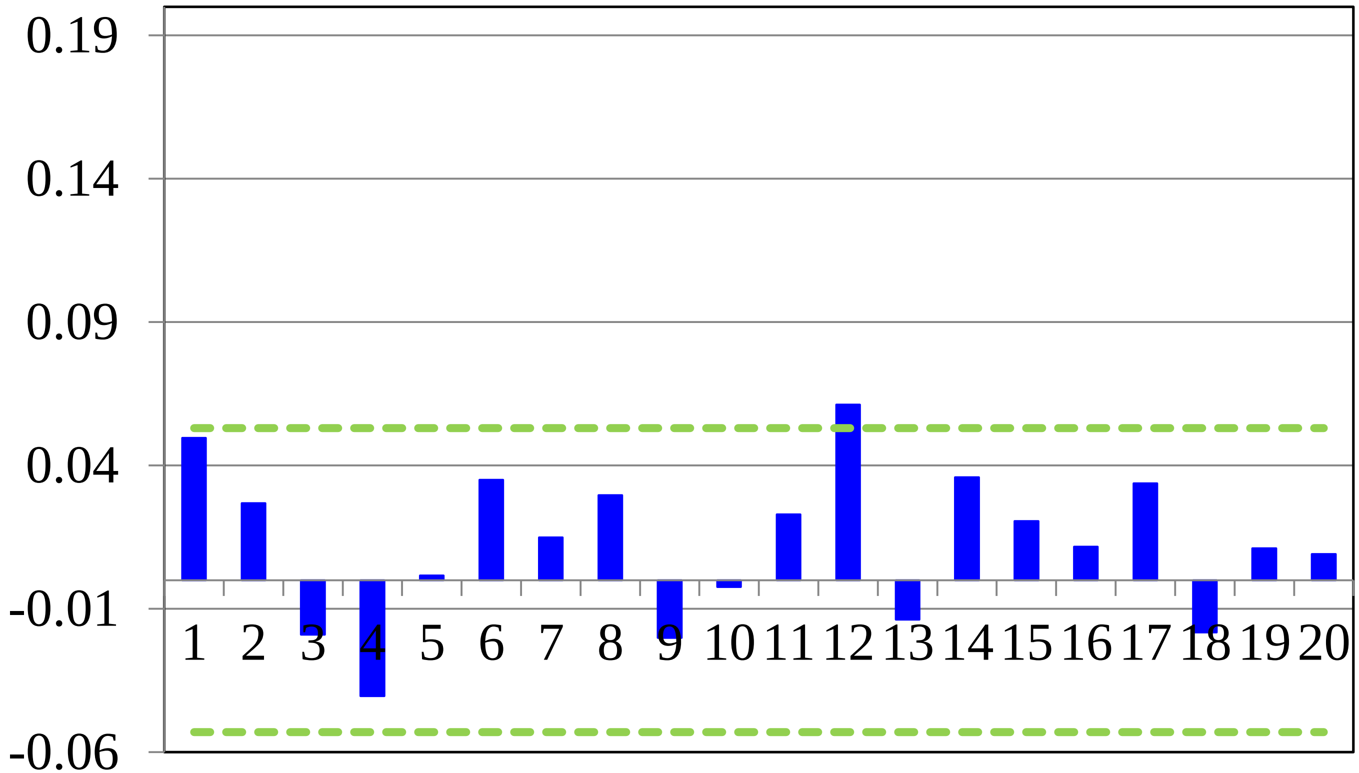
ARCH、GARCHモデルとその性質

図4:　y_t^2 のコレログラム



ARCH、GARCHモデルとその性質

図5: i.i.d. ノイズの2乗のコレログラム



ARCH、GARCHモデルとその性質

- 金融データの特徴 – ボラティリティクラスタリング

図4 と図5 を見ると、y_t の2乗には**高い(正の)相関**が認められるが、i.i.d.ノイズの2乗にはそのような**相関は見られない**(i.i.d. であれば2乗の相関も0)。

これらの結果から、y_t のモデルとしては、この**2乗の自己相関をうまく表現できる**ようなモデルの方が望ましい事がわかる。またこれらの結果は y_t 自体の予測は困難だが、**y_t の2乗には予測可能性がある**事を示唆している。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ボラティリティの変動のモデル化 – ARCHモデル

以下のようなモデルを考えてみよう。

$$y_t = \sqrt{h_t} v_t, \ \ v_t \sim \text{i.i.d.}(0, 1), \ \ t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$
$$h_t = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_2 y_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_m y_{t-m}^2$$

ここで $v_t \sim$ i.i.d. (0, 1) は v_t が平均 は 0分散 1 の独立同分布に従いう事を表している。また、v_t は過去の y_t と独立であると仮定する(過去の m 個の y_t より h_t が決定されている事に注意)。

このモデルは **ARCHモデル(ARCH(*m*)モデル)**と呼ばれる。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ボラティリティのモデル化 – ARCHモデル

図6 (a) と (b) は ARCH (1)モデルから発生させた500個のサンプルをプロットしたもの、図 7 (a) と (b)はそれらの y_t と y_t^2 のコレログラムである。

パラメーターの値は

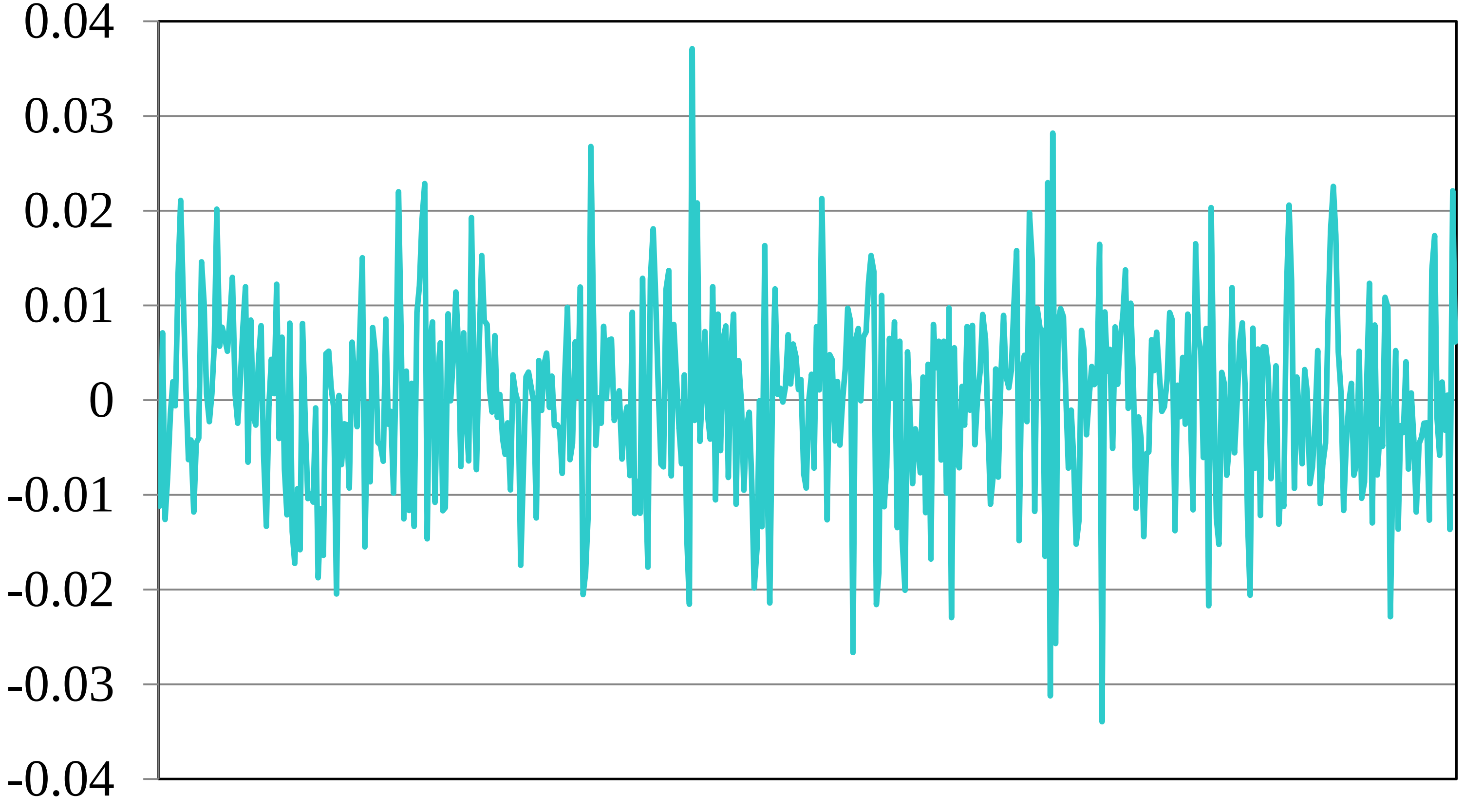
図6 (a) は ω =0.00006, $\alpha_1 = 0.6$

図6 (b) は ω =0.000015, $\alpha_1 = 0.9$

である。

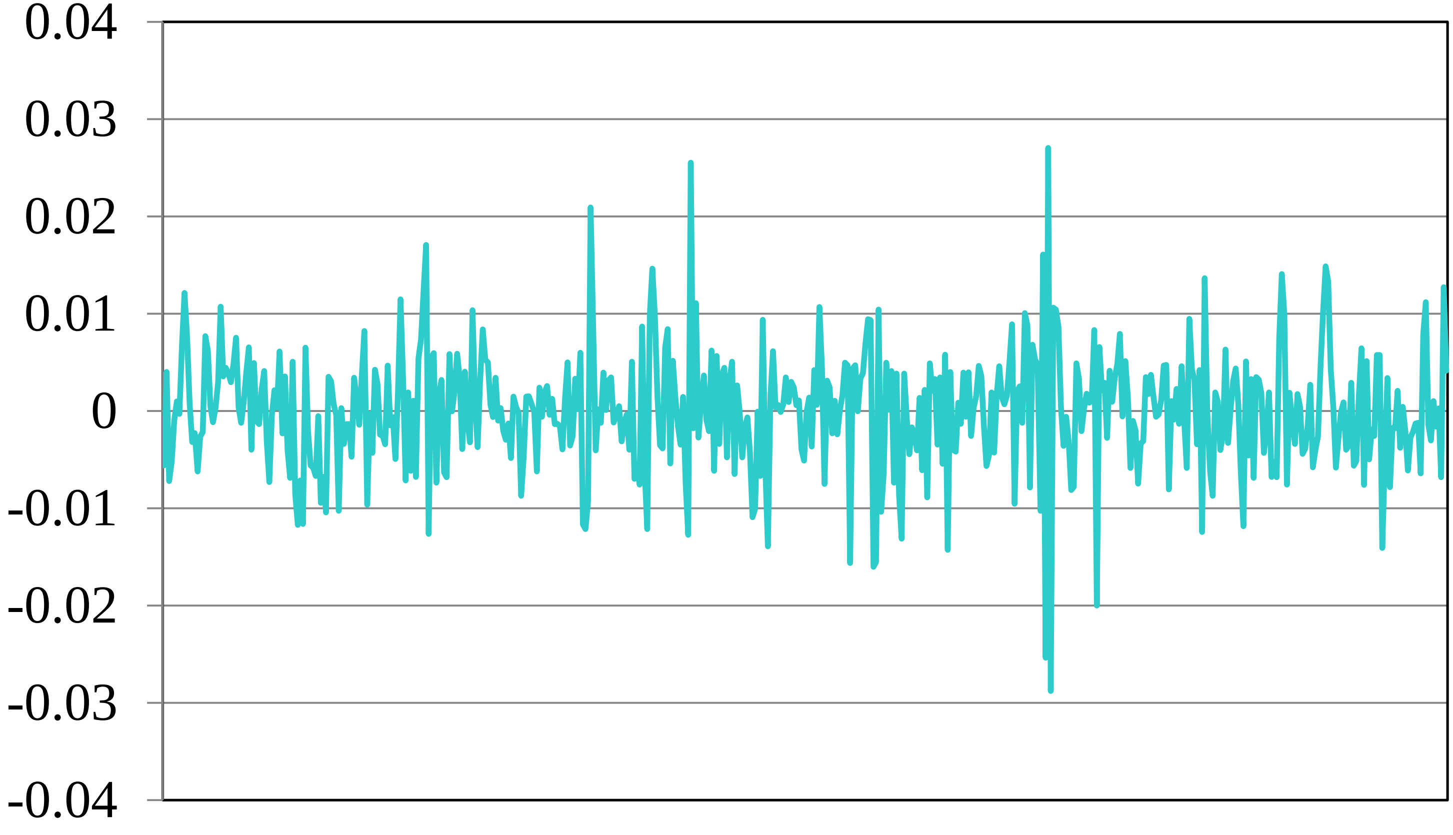
ARCH、GARCHモデルとその性質

図6 (a) ARCH(1) モデル



ARCH、GARCHモデルとその性質

図6 (b) ARCH(1) モデル



ARCH、GARCHモデルとその性質

図7 (a) コレログラム

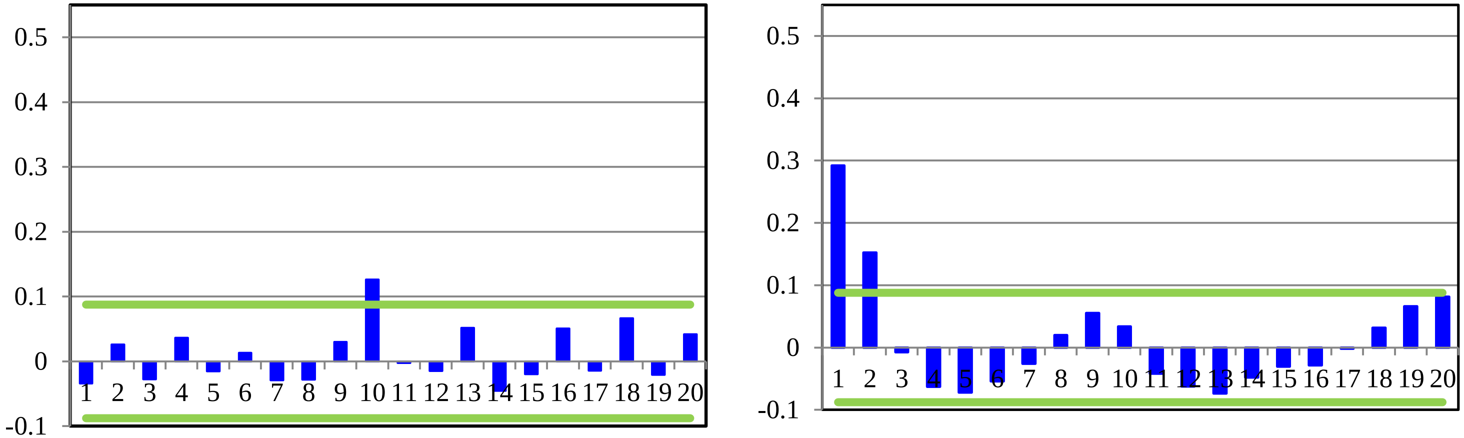
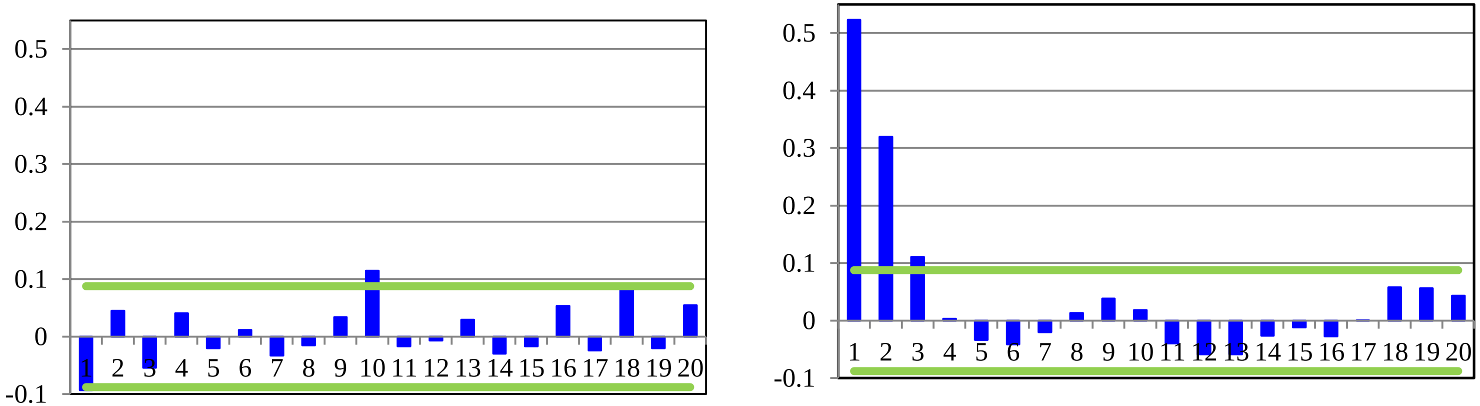


図7 (b) コレログラム



ARCH、GARCHモデルとその性質

- ARCHモデルの特徴

これらのコレログラムより、ARCHモデルには以下のような特徴がある事がわかる。

(1) y_t 自体は(自己)無相関である。

(2) y_t^2 に高い自己相関がある。

これらはARCHモデルが先ほどの y_t の特徴を捉える事が出来ているという事を示唆している。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ボラティリティの変動のモデル化の重要性

ARCH モデルはボラティリティの変動をモデル化していると考える事ができる。ボラティリティの変動のモデル化の重要性として以下のようなものが考えられる。

(1) ボラティリティ(標準偏差)は y_t の**区間予測**に影響を及ぼす。

(2) ボラティリティ自体が重要な**リスク指標**である。

ある金融資産の収益率の変動が将来的に大きくなるか小さくなるかは、リスク管理などの観点から重要な問題である。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ARCHモデルの条件付き期待値

y_t の $\Omega_{t-1}=\{y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\}$ という条件付き期待値は

$$
\begin{aligned}
E(y_t \mid \Omega_{t-1}) &= E(\sqrt{h_t}\nu_t \mid \Omega_{t-1}) \\
&= \sqrt{h_t}E(\nu_t \mid \Omega_{t-1}) = 0
\end{aligned}
$$

となる。ここで h_t は過去の m 個 の y_t の関数なので Ω_{t-1} という条件付きで $E(\,.\,)$ の外に出せ、また v_t はi.i.d.系列で過去の y_t と独立である事を用いている。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ARCHモデルの条件付き分散

同様に ARCHモデルの**条件付き分散** $\mathrm{var}(y_t \mid \Omega_{t-1})$は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(y_t \mid \Omega_{t-1}) &= E[\{y_t - E(y_t \mid \Omega_{t-1})\}^2 \mid \Omega_{t-1}] \\
&= E[y_t^2 \mid \Omega_{t-1}] \\
&= E[h_t v_t^2 \mid \Omega_{t-1}] \\
&= h_t E[v_t^2 \mid \Omega_{t-1}] \\
&= h_t
\end{aligned}
$$

となる。これはARCHモデルにおいて**条件付き分散が過去の y_t に依存して変動する**事を表している。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ARCHモデルにおけるパラメーターの制約

ARCHモデルにおいて、h_t は条件付き分散であるので、$h_t > 0$ がすべての t において成立しなければならない。

この条件を満たすために、先ほどのARCHモデルのパラメーターには制約がかかる。

最も頻繁に用いられている制約は

$$\omega > 0, \quad \alpha_j \geq 0 \, , j = 1, \ldots, m$$

である。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ARCHモデルにおける定常条件

ARCH(m) モデルにおいて y_t が(弱)定常であるための条件は以下のように与えられる。

「特性方程式: $1-\alpha_1 z-\alpha_2 z^2-\ldots-\alpha_m z^m=0$ の全ての解の絶対値が 1 より大きい。」

この条件は $\alpha_j \geq 0$ が課されている場合には

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m<1$$

と同値(同じであるという事)になる事を示す事ができる。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ARCHモデルにおける y_t^2 のAR表現

ARCH(m)モデルにおいて

$$w_t = y_t^2 - h_t$$

とおくと、w_t はホワイトノイズであり、

$$y_t^2 = h_t + w_t = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_2 y_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_m y_{t-m}^2 + w_t$$

と表す事が出来る。

これは y_t^2 がこのような **AR(m)モデル**に従っているという事を示している。

ARCH、GARCHモデルとその性質

例題1

先ほどのARCH(m)モデルにおける y_t^2 のAR(m)モデル表現に出てきた w_t について、$w_t = (v_t^2 - 1)\, h_t$ である事に注意して、$E(w_t) = 0$ および $\mathrm{cov}(w_t, w_{t-k}) = 0,\ k > 0$ を示しなさい。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ARCHモデルにおける y_t^2 の期待値

y_t^2 がARモデルに従い、y_t が定常である場合は y_t^2 の期待値を求める事ができる。これは先ほどのAR(m)表現より

$$E(y_t^2) = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \Lambda - \alpha_m}$$

である事がわかる。

$E(y_t) = 0$ であるのでこれは y_t の無条件分散(定常分散)に等しい。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ARCHモデルによる区間予測

ARCHモデルによる予測も考え方は今までと同じである。

すなわち、点予測に関しては**条件付き期待値が最適な予測値**であり、区間予測に関してはその条件付き分布より予測するという事である。

例として、次のARCH(1)モデルの予測を考えてみよう。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ARCHモデルによる区間予測

ARCH(1)モデル:

$$\begin{cases} y_t = \sqrt{h_t}\, v_t, \quad v_t \sim \text{i.i.d.}\, N(0, 1) \\ h_t = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 \end{cases}$$

ここで $v_t \sim \text{i.i.d.}\ N(0, 1)$ は v_t が平均0、分散1の独立な正規分布に従う事を表している。

このモデルにおいて $\Omega_t = \{ y_t, y_{t-1} \ldots \}$ という条件付きでの y_t の1期先区間予測を考えてみよう。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ARCHモデルによる区間予測

このモデルにおいて y_{t+1} の条件付き期待値は

$$E(y_{t+1} \mid \Omega_t) = 0$$

である。

これより、このモデルにおいて 1 期先最適予測
(条件付き期待値)は**常に 0** である事がわかる。

次にこのモデルの1期先区間予測をしてみよう。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ARCHモデルによる区間予測

区間予測において重要なのは条件付き分布である。

このモデルにおいて、条件付き分散は

$$\mathrm{var}\,(y_{t+1} \mid \Omega_t) = h_{t+1} = \omega + \alpha_1\, y_t^2$$

である。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ARCHモデルによる区間予測

さらに v_t は 過去の y_t と関係なく独立な正規分布であるので、**y_{t+1}の条件付き分布**は

$$y_{t+1} | \Omega_t \sim N(0, h_{t+1}) \text{ (つまり } N(0, \omega+\alpha_1 y_t^2) \text{)}$$

である事がいえる。ここで $y_{t+1} | \Omega_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ は y_{t+1} の Ω_t という条件付き分布が平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布であることを示している。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ARCHモデルによる区間予測

以上の結果を用いると、y_{t+1}の95%区間予測は

$$\left[E(y_{t+1} \mid \Omega_t) - 1.96\sqrt{\mathrm{var}(y_{t+1} \mid \Omega_t)},\ E(y_{t+1} \mid \Omega_t) + 1.96\sqrt{\mathrm{var}(y_{t+1} \mid \Omega_t)} \right]$$

$$= \left[-1.96\sqrt{\omega + \alpha_1 y_t^2}, 1.96\sqrt{\omega + \alpha_1 y_t^2} \right]$$

で与えられる事がわかる。同様に99%区間予測は

$$\left[-2.58\sqrt{\omega + \alpha_1 y_t^2}, 2.58\sqrt{\omega + \alpha_1 y_t^2} \right]$$

によって与えられる。

ARCH、GARCHモデルとその性質

■ ARCHモデルによる区間予測

一般のmの場合は h_{t+1} が

$$h_{t+1} = \omega + \alpha_1 y_t^2 + \ldots + \alpha_m y_{t-m+1}^2$$

となるだけで、まったく同様の議論が成り立つ。
この場合、95%、99%区間予測はそれぞれ

$$\left[-1.96\sqrt{\omega + \alpha_1 y_t^2 + \ldots + \alpha_m y_{t-m+1}^2}\ ,\ \ 1.96\sqrt{\omega + \alpha_1 y_t^2 + \ldots + \alpha_m y_{t-m+1}^2} \right]$$

および

$$\left[-2.58\sqrt{\omega + \alpha_1 y_t^2 + \ldots + \alpha_m y_{t-m+1}^2}\ ,\ \ 2.58\sqrt{\omega + \alpha_1 y_t^2 + \ldots + \alpha_m y_{t-m+1}^2} \right]$$

で与えられる。

ARCH、GARCHモデルとその性質

例題2: 以下のARCH(1)モデルを考えよう。

$$\begin{cases} y_t = \sqrt{h_t}\, v_t, \quad v_t \sim i.i.d.N(0,1) \\ h_t = 0.5 + 0.5 y_{t-1}^2 \end{cases}$$

このARCH(1) モデルにおいて

(1) $E(y_t)$ を求めよ。

(2) $E(y_t^2)$ を求めよ。

(3) このモデルにおいて $y_t = 0$ と $y_t = 2$ のそれぞれの場合において、y_{t+1}を $\Omega_t = \{y_t, y_{t-1}, \ldots\}$という条件付きで95%区間予測をせよ。どちらの区間予測がより大きくなるだろうか?

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ARCHモデルの最尤推定

ARCHモデルの推定には最尤法が用いられる。

例として再びARCH(1)モデル:

$$\begin{cases} y_t = \sqrt{h_t} v_t, \quad v_t \sim \mathrm{i.i.d.} N(0, 1) \\ h_t = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 \end{cases}$$

を考えてみよう。このモデルにおける未知パラメーターは ω と α_1 の2つである。このモデルに対して $y_T, \ldots, y_1$ が与えられた時の最尤推定法を考える。

v_t に**正規分布を仮定**している事に注意しよう。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ARCHモデルの最尤推定

(今後常に) $\Omega_t = \{y_t ,..., y_1\}$ とする。
まず y_t の Ω_{t-1} による条件付き分布を求める。
これは予測のところでの議論により

$$y_t \mid \Omega_{t-1} \sim N(\,0,\ \ \omega + \alpha_1\, y_{t-1}{}^2)$$

である。よってその**条件付き密度関数** $f\,(y_t \mid \Omega_{t-1})$は

$$f\,(y_t \mid \Omega_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\omega+\alpha_1 y_{t-1}^2)}} \exp\left[-\frac{y_t^2}{2(\omega+\alpha_1 y_{t-1}^2)} \right]$$

で与えられる。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ARCHモデルの最尤推定

よって $y_T, y_{T-1}, \ldots, y_1$ という T 個のデータが与えられた時の**尤度関数 $L(\omega, \alpha_1)$** は

$$L(\omega, \alpha_1) = f(y_T \mid \Omega_{T-1})\, f(y_{T-1} \mid \Omega_{T-2}) \ldots f(y_2 \mid \Omega_1)\, f(y_1)$$

で与えられる。ここで $f(y_1)$ は無条件での y_t の分布 (**y_tの定常分布**)の密度関数である。

最尤推定値は対数尤度関数 $\log L(\omega, \alpha_1)$ を最大化するような ω と α_1 の値である。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ARCHモデルの条件付き最尤推定

先ほどの尤度関数において $f(y_1)$ は y_t の定常分布の密度関数であった。

実はARCHモデルの場合、y_t の定常分布は正規分布**ではなく**正規分布よりも裾(すそ)のあつい分布(これを**ファットテール**という)に従う事がわかっている。

この分布は複雑な形をしている。そこで通常は、先ほどの $f(y_1)$ の部分は省いて $f(y_2|\Omega_1)$ までの形を最大化する事によって推定値を求める**条件付き最尤推定法**が用いられる。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- ARCHモデルの条件付き最尤推定

先ほどのARCH(1)モデルについて、**y_1 という条件付き**尤度関数は

$$L(\omega, \alpha_1 | y_1) = f(y_T | \Omega_{T-1}) f(y_{T-1} | \Omega_{T-2}) \ldots f(y_2 | \Omega_1)$$

となる $f(y_2|\Omega_1) = f(y_2| y_1)$ である事に注意。

ARCH(m) モデルについて **$y_m, \ldots, y_1$という条件付き**尤度関数は(未知パラメーターは $\theta = (\omega, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$)

$$L(\theta | y_m, \ldots, y_1) = f(y_T | \Omega_{T-1}) f(y_{T-1} | \Omega_{T-2}) \ldots f(y_{m+1} | \Omega_m)$$

となる。

ARCH、GARCHモデルとその性質

例題3:

以下のARCH(1) モデルについて問題に答えなさい。

$$\begin{cases} y_t = \sqrt{h_t}\, v_t, \quad v_t \sim i.i.d.\, N(0,1) \\ h_t = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 \end{cases}$$

(1) $\alpha_1 = 1/2$ はわかっているとする。$y_3 = 1,\ y_2 = 2,\ y_1 = 2$ という観測値が得られた時に、ω の ($\omega > 0$ という制約の下で) y_1 という条件付き最尤推定値を求めなさい。

(2) (1)で得られた推定値を真の値とみなして、y_4が $\Pr(y_4 < c \mid y_3, y_2, y_1) = 0.01$ となるような c を求めなさい。ここで Z が標準正規分布に従う 時、$\Pr(Z < -2.33) = 0.01$ が成り立つとして考えなさい。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- GARCHモデル

ARCHモデルを**一般化**したものとして、よく用いられるモデルに**GARCH(generalized ARCH)モデル**と呼ばれるモデルがある。GARCH(r, m)モデルは以下のようなモデルである。

$$h_t = \omega + \beta_1 h_{t-1} + \beta_2 h_{t-2} + \dots + \beta_r h_{t-r} + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_2 y_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m y_{t-m}^2$$

GARCHモデルの特徴は過去のショックの大きさの2乗(y_{t-m}^2) だけでなく、**過去の条件付き分散の大きさ(h_{t-r}) も今期の条件付き分散に影響を与える**ところである。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- GARCHモデルのメリット

実際のデータにおいては 2乗の相関が長期にわたって観測されるので、これに ARCH モデルを当てはめると、より多くのパラメーターが必要となりがち (m が大きくなりがち)である。GARCHモデルではより**少ないパラメータ**でデータの2乗の相関をよく記述できるというメリットがある。

一般にパラメーターの数が少ないほど、モデルの推定精度は増す。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- GARCHモデルの条件付き期待値と分散

GARCHモデルの場合も、ARCHモデルと同様の議論により、(パラメータに関する、ある条件のもとで)条件期待値と条件付き分散は $\Omega_t = \{y_t, y_{t-1}, \dots\}$ に対して

$$E(y_t \mid \Omega_{t-1}) = 0, \quad \mathrm{var}(y_t \mid \Omega_{t-1}) = h_t$$

となる。ただし、h_t の形が ARCH モデルと異なる事に注意。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- GARCHモデルにおけるパラメーターの制約

ARCHモデルの時と同様、GARCHモデルの場合も
$h_t > 0$ を保証するためにパラメータに制約がかかる。

よく用いられる制約は

$$\omega > 0, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \beta_j \geq 0$$

というものである。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- GARCHモデルにおける定常条件

GARCH(r, m) モデルにおいて y_t が(弱)定常であるための条件は以下のように与えられる。

「上記のパラメータの制約条件を満たし、かつ

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j < 1$$

が満たされる。」

ARCH、GARCHモデルとその性質

- GARCHモデルにおける y_t^2 のARMA表現

GARCHモデルの場合は ***y_t^2* はARMAモデルに従う**事を示す事ができる。$w_t = y_t^2 - h_t$ とすると、GARCH モデルの h_t の定義より、y_t^2 は以下のようなARMA(p, r) モデル従う

$$y_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \beta_1)\, y_{t-1}^2 + \ldots + (\alpha_p + \beta_p)\, y_{t-p}^2 \\ + w_t - \beta_1 w_{t-1} - \ldots - \beta_r w_{t-r}$$

ここで $p = \max\{r, m\}$ であり、$j > m$ である j に対して $\alpha_j = 0$、$i > r$ である i に対して $\beta_i = 0$ である。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- GARCHモデルにおけるy_t^2のARMA表現

GARCHモデルにおけるy_t^2のARMA表現において

(1) AR 係数は $\alpha_j + \beta_j$ である。
(2) MA 係数は $-\beta_j$ である。

の 2 つの事に注意しよう。

このARMA表現より、GARCHモデルにおける **y_t^2の期待値**も簡単に求める事ができる。

例えば GARCH(1, 1) モデルにおける $E(y_t^2)$ は
$\omega/(1-\alpha_1-\beta_1)$ である。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- その他のボラティリティ変動モデル

(EGARCHモデル) h_t の変動は

$$\log h_t = \omega + \beta \log h_{t-1} + \gamma v_{t-1} + \delta (| v_{t-1} | - E | v_{t-1} |)$$

と定義される。

(GJRモデル) h_t の変動は

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha y_{t-1}^2 + I_{t-1} \gamma y_{t-1}^2$$

と定義される。ここで I_{t-1} は $y_{t-1} < 0$ の場合に 1、
$y_{t-1} \geq 0$ の場合に 0 をとるとする。

ARCH、GARCHモデルとその性質

- その他のボラティリティ変動モデル

GJRモデルとEGARCHモデルはファイナンス変数などにおいてよく観測される**レバレッジ効果**をとらえる事ができるというメリットがある。

レバレッジ効果とは**負のショックの方が分散に対してより大きな影響を持つ**というものである((G)ARCHモデルは正のショックも負のショックも分散に同じ影響を与える)。これらのモデルについてより詳しくは

渡部敏明(2000)「ボラティリティ変動モデル」(シリーズ<現代金融工学>4), 朝倉書店

を参照の事。

演習問題

問題1　GARCH(r, m) モデルにおいて y_t^2 がさきほどのARMA(p, r) モデルに従う事を示しなさい。ここで $p = \max\{r, m\}$である。

問題2　GARCH (1, 2) モデル

$$\begin{cases} y_t = \sqrt{h_t}\, v_t, \quad v_t \sim i.i.d.N(0, 1) \\ h_t = \omega + \beta_1 h_{t-1} + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_2 y_{t-2}^2 \end{cases}$$

において $x_t = y_t^2$ はどのようなARMAモデルに従うか答えなさい。またこの時 $E(x_t)$ はどのようになるか?