時系列分析6
多変量時系列モデルその他

担当:　長倉　大輔
（ながくらだいすけ）

多変量時系列モデルその他

- VARモデルによる分析

VARモデルを用いて時系列データを分析する際に重要な概念として

1. グレンジャー因果性
2. インパルス応答関数
3. 分散分析

の3つがある。以下では1と2について簡単に説明する(この講義ではこれらの詳細や3については触れないので必要に応じて教科書、参考書等を参照してほしい)。

多変量時系列モデルその他

- グレンジャー因果性

通常の因果関係とはある変数が他の変数の原因となるような関係のことである。

これに対して**グレンジャー因果性**とはある変数が他の変数の**予測に役に立つか**？のみに焦点をあてた因果関係(厳密に言うと因果関係ではないが)の定義である。

変数 X_t が他の変数 Y_t の将来の値の予測に役に立つのであれば、**グレンジャーの意味で**変数 X_t から変数 Y_t への因果が存在すると言われる。

多変量時系列モデルその他

- グレンジャー因果性

x_t と y_t という2つの変数に対して Ω_t を x_t と y_t の時点 t までの値からなる情報集合:

$$\Omega_t = \{ x_t , x_{t-1} , \dots , x_1 , y_t , y_{t-1} , \dots , y_1 \}$$

Ξ_t を x_t の時点 t までの値のみからなる情報集合:

$$\Xi_t = \{ x_t, x_{t-1}, \dots, x_1 \}$$

とする。この時、**もし $h > 0$ のいずれかに対して**

$$MSE(\hat{x}_{t+h|t} \mid \Omega_t) < MSE(\hat{x}_{t+h|t} \mid \Xi_t)$$

であれば(つまり y_t を情報集合に加える事によって予測精度が改善する) y_t から x_t への**グレンジャー因果性が存在する**という。

多変量時系列モデルその他

- グレンジャー因果性の検定

グレンジャーの因果性はVARの枠組みで簡単に検定する事ができる。例えばVAR(1) モデル:

$$
\begin{aligned}
y_{1t} &= c_1 + \phi_{11}^{(1)} y_{1,t-1} + \phi_{12}^{(1)} y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t} \\
y_{2t} &= c_2 + \phi_{21}^{(1)} y_{1,t-1} + \phi_{22}^{(1)} y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}
\end{aligned}
$$

において y_{2t} から y_{1t} へのグレンジャー因果性が存在しない事は $\phi_{12}^{(1)} = 0$ と同値になる。

多変量時系列モデルその他

- グレンジャー因果性の検定

一般の n 変量VAR(p)モデルにおいてある変数 y_{jt} から y_{it} へグレンジャー因果性がないとは y_{it} についての回帰式の中で y_{jt} (とその過去の変数)の係数が全て 0 になる事と同値になる。言い換えると、次のようになる。

VAR(p)モデルにおいて、y_{it} の回帰式の中で $y_{j,t-k}$ の係数を $\phi_{ij}^{(k)}$ とする。この時、$y_{j,t}$ から y_{it} へグレンジャー因果性がないという帰無仮説は

$$H_0\colon\quad \phi_{ij}^{(1)} = \phi_{ij}^{(2)} = \phi_{ij}^{(3)} = \cdots = \phi_{ij}^{(p)} = 0$$

と表す事ができる。

多変量時系列モデルその他

- グレンジャー因果性の検定

グレンジャーの因果性を検定する統計量として代表的なものに以下の F 検定統計量を使うものがある。

$$F \text{ 検定統計量：} \quad F = \frac{(SSR_0 - SSR_1)/r}{SSR_1/(T - np - 1)}$$

ここで SSR_1 はVAR(p)における y_{it} の回帰式を推定した時の残差平方和、SSR_0 は先ほどの帰無仮説 H_0 のもとでの y_{it} の回帰式の残差平方和である。また r は**グレンジャー因果性検定に必要な制約の数**である。(F 検定統計量は分子は制約数、分母は標本数から定数項を含む係数の数でわったものになるのでこの場合は上記のようになる)。

多変量時系列モデルその他

- グレンジャー因果性の検定

H_0 の下で rF は**漸近的に** $\chi^2(r)$ に従う事を示すことができる。よって有意水準5%で検定するのであれば $\chi^2(r)$の95%点と rF の値を比較し、rF の値の方が大きければ H_0 を棄却するという検定をする。

多変量時系列モデルその他

例題1

先ほどのVAR(1)モデルにおいて、y_{1t} の回帰式を(制約なしで)推定した時のSSRは10、y_{2t} から y_{1t} へのグレンジャー因果性がないという帰無仮説の下でのSSRは10.5であった。帰無仮説のもとでのF検定統計量の値を計算し、上記の方法で5%有意水準で検定しなさい。標本数は103とする。($\chi^2(1)$の95%点は3.84)。

多変量時系列モデルその他

- インパルス応答関数

ある変数に対する “ショック” がその変数や他の変数の将来の値にどのような影響を及ぼすかを分析する。

(例) 円/ドルの為替レートに対して何らかのショックがあったとしよう。そのショックにより円/ドルの為替レートはもちろん影響を受けるが、そのようなショックは同時にユーロ/ドルの為替レートにも影響を与えるであろう。

インパルス応答関数による分析は円/ドルレートへのショックがユーロ/ドルに与える影響などを分析するのに有用である。

多変量時系列モデルその他

- 非直交化インパルス応答関数

n 変量 VAR(p) モデル

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{c} + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \ldots. + \mathbf{\Phi}_p \mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t\ ,\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathrm{W.N.}(\mathbf{\Sigma})$$

に対して $\mathbf{y}_{t+k}$ の第 i 番目の成分である $y_{i,t+k}$ の $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ の第 j 番目の成分である $\varepsilon_{j,t}$ に関する偏微分:

$$IRF_{ij}(k) = \frac{\partial y_{i,t+k}}{\partial \varepsilon_{j,t}}$$

を**非直交化インパルス応答関数**と呼ぶ(これはk の関数である事に注意)。

多変量時系列モデルその他

- 非直交化インパルス応答関数

$IRF_{ij}(k)$ は(直観的には)

"ε_{jt} が**1単位**増加した時に、$y_{i,t+k}$ が何単位変化するか?"

を表している(正確には、偏微分の値なので微小な変化に対する変化)。

$y_{i,t+k}$ は $\boldsymbol{y_{i,t}}$ **の** $\boldsymbol{k}$ **期先の値**である事に注意。

多変量時系列モデルその他

例題 2

2 変量 VAR(1) モデル:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{c} + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \text{W.N.}(\mathbf{\Sigma})$$

$$\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t})^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{c} = (c_1, c_2)^{\mathrm{T}}, \ \boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

の(非直交化)インパルス応答関数 $IRF_{11}(k)$ と $IRF_{12}(k)$ を求めよ。

多変量時系列モデルその他

- (例)非直交化インパルス応答関数

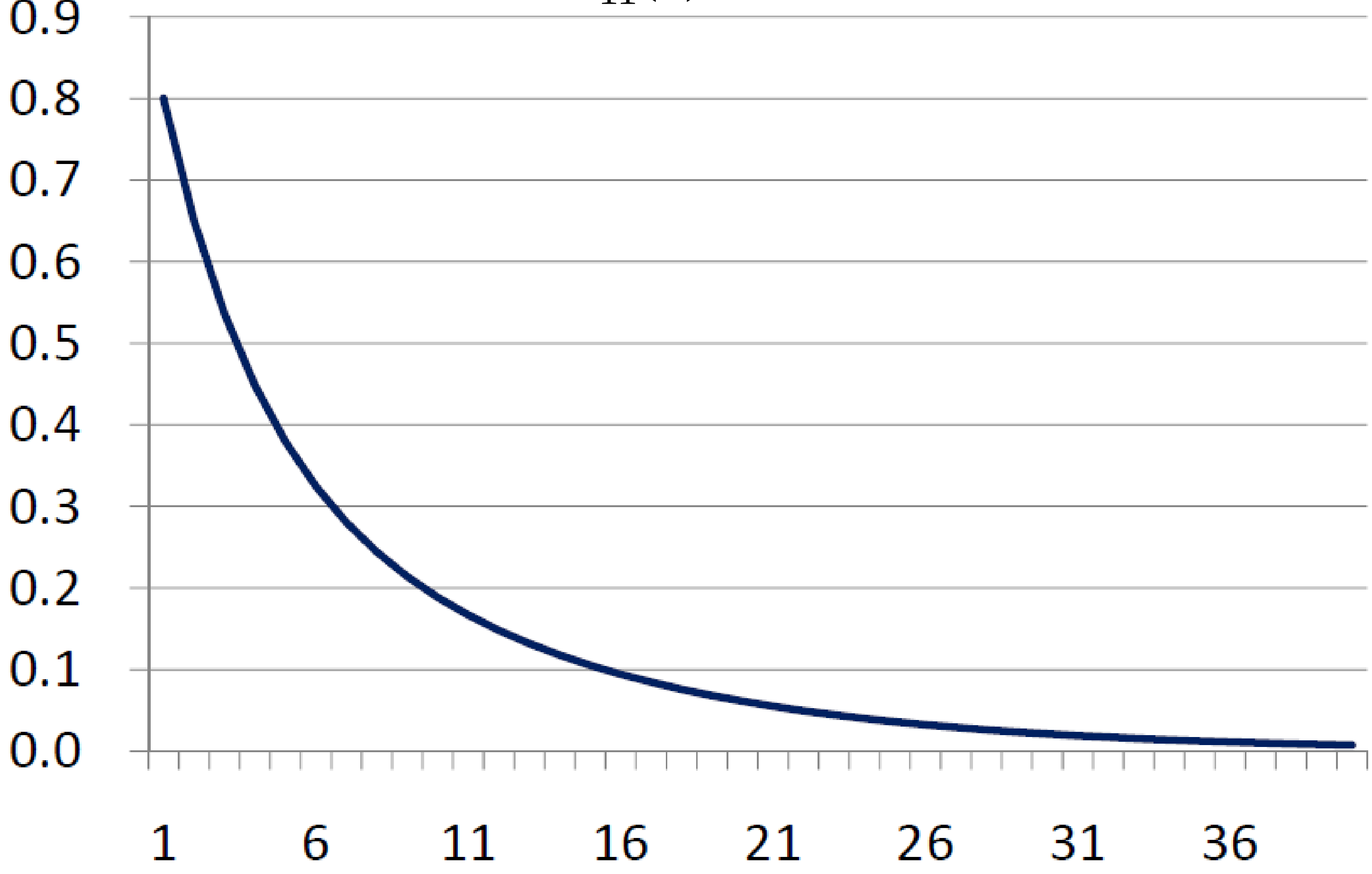
以下はVAR(1)モデル:

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix},$$

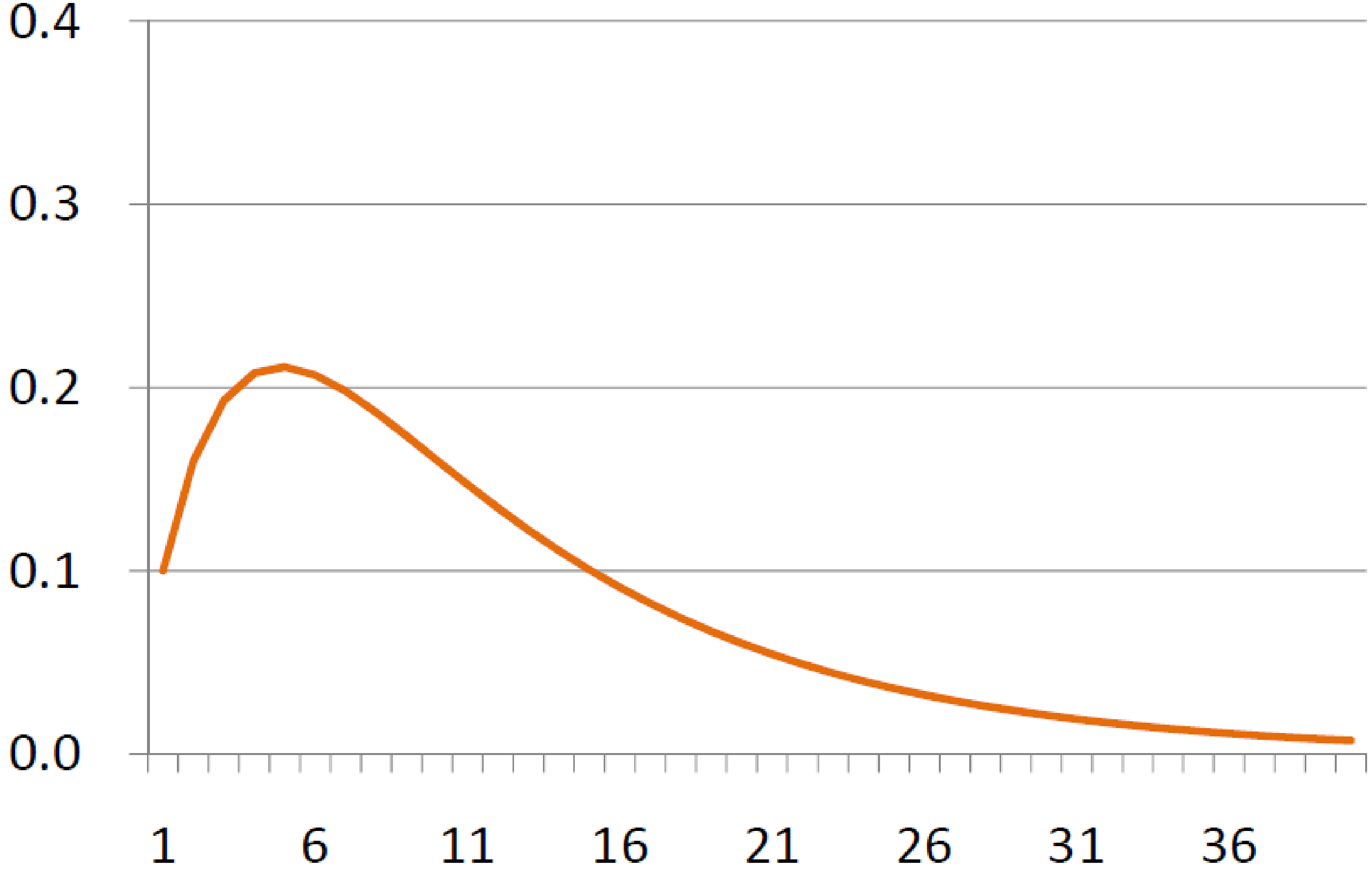
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} \sim \mathrm{W.N.}(\boldsymbol{\Sigma}),\ \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

の非直交化インパルス応答関数 $IRF_{11}(k)$ と $IRF_{21}(k)$ の図である。

$IRF_{11}(k)$ のグラフ



$IRF_{21}(k)$ のグラフ



多変量時系列モデルその他

- 非直交化インパルス応答関数の問題点

非直交化インパルス応答関数は ε_{jt} が1単位増加した時の $y_{i,t+k}$ の変化を表していた。

しかしΣ が対角行列でないならば ε_{jt} は ε_{kt} $(k \neq j)$ と相関している
→ **ε_{jt} が変化すると ε_{kt} も変化する傾向がある**。

非直交化インパルス応答関数は**誤差項間の相関を考慮に入れていない**
→ 直交化インパルス応答関数。

多変量時系列モデルその他

- 三角分解

正定値行列 $\mathbf{\Sigma}$ は $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $a_{ij} = 1$ $(i = j)$, $a_{ij} = 0$ $(i < j)$ であるような行列 $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

を用いて(このような行列を**下三角行列**という)、

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{ADA}^{\mathrm{T}}$$

と書ける。ここで $\mathbf{D}$ はある対角行列である。
$\mathbf{\Sigma}$ をこのように書くことを**三角分解**するという。

多変量時系列モデルその他

- ショックの分解

$\boldsymbol{\Sigma}$ の三角分解 $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{ADA}^{\mathrm{T}}$ の $\mathbf{A}$ を用いて

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t$$

とすると、$\mathbf{u}_t$ の分散共分散行列は

$$\mathrm{var}\,(\mathbf{u}_t) = E(\mathbf{u}_t\,\mathbf{u}_t^{\mathrm{T}}) = \mathbf{A}^{-1}E(\boldsymbol{\varepsilon}_t\,\boldsymbol{\varepsilon}_t^{\mathrm{T}})\,(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = \mathbf{D}$$

であるので $\mathbf{u}_t$ の各成分は (同時点間で)無相関である。これより

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{A}\mathbf{u}_t$$

のように $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ を無相関なショック $\mathbf{u}_t$ に分解することができる。

多変量時系列モデルその他

- 直交化インパルス応答関数

この結果を用いると n 変量 VAR(p) モデルは

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{c} + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \ldots. + \mathbf{\Phi}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{A}\mathbf{u}_t,\ \ \mathbf{u}_t \sim \mathrm{W.N.}(\mathbf{D})$$

と書ける。この時 $y_{i,t+k}$ の u_{jt} へのインパルス応答関数

$$IRF_{ij}(k) = \frac{\partial y_{i,t+k}}{\partial u_{jt}}$$

を**直交化インパルス応答関数**と呼ぶ。
通常インパルス応答関数というとこの直交化インパルス応答関数を指す。

多変量時系列モデルその他

例題3

例題 2 の2変量 VAR(1) モデルの直交化インパルス応答関数を求めよ。

多変量時系列モデル(II)

- (例)直交化インパルス応答関数

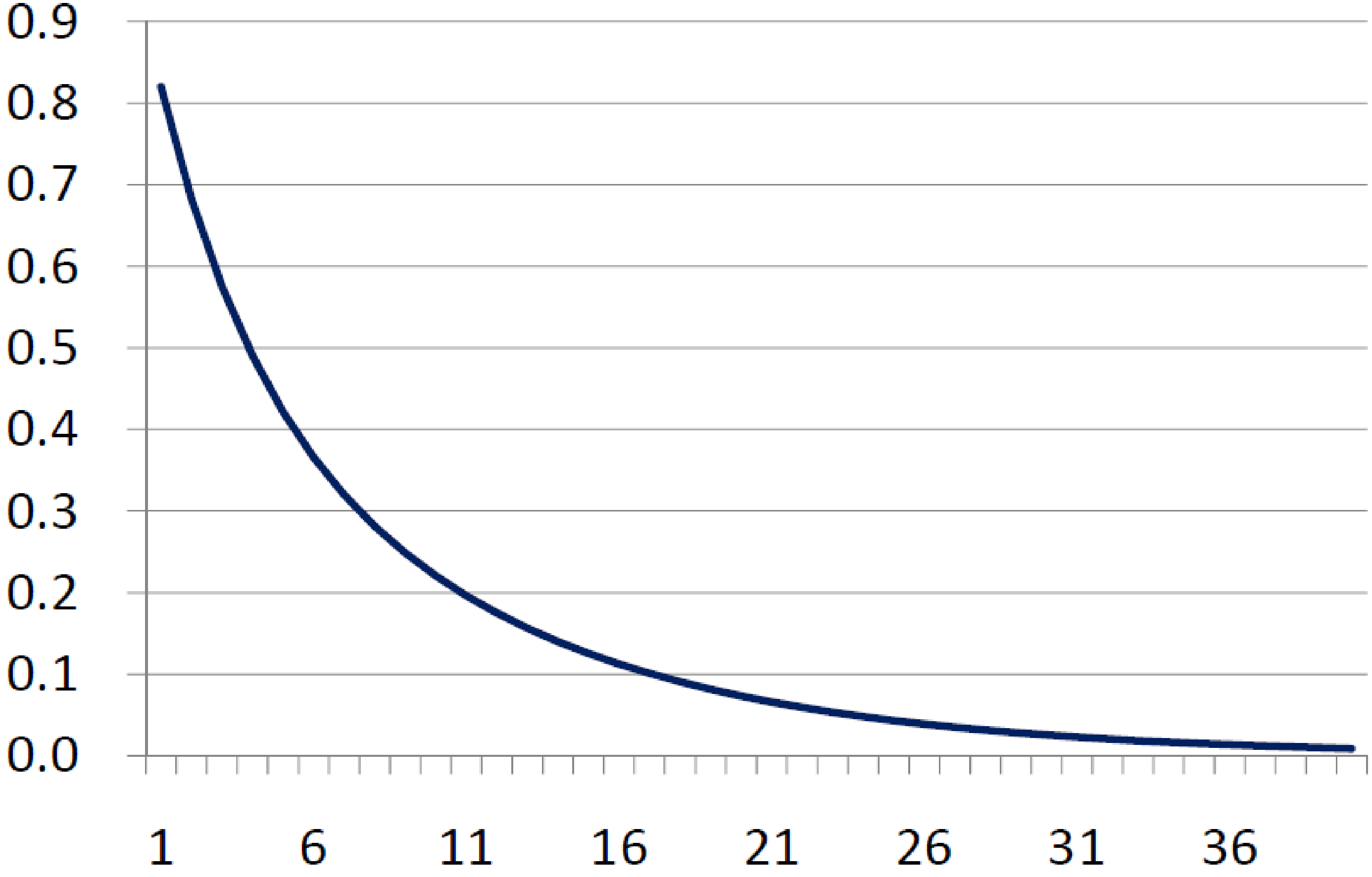
以下は 非直交化インパルス応答関数の例で出てきたVAR(1)モデルを

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix},$$

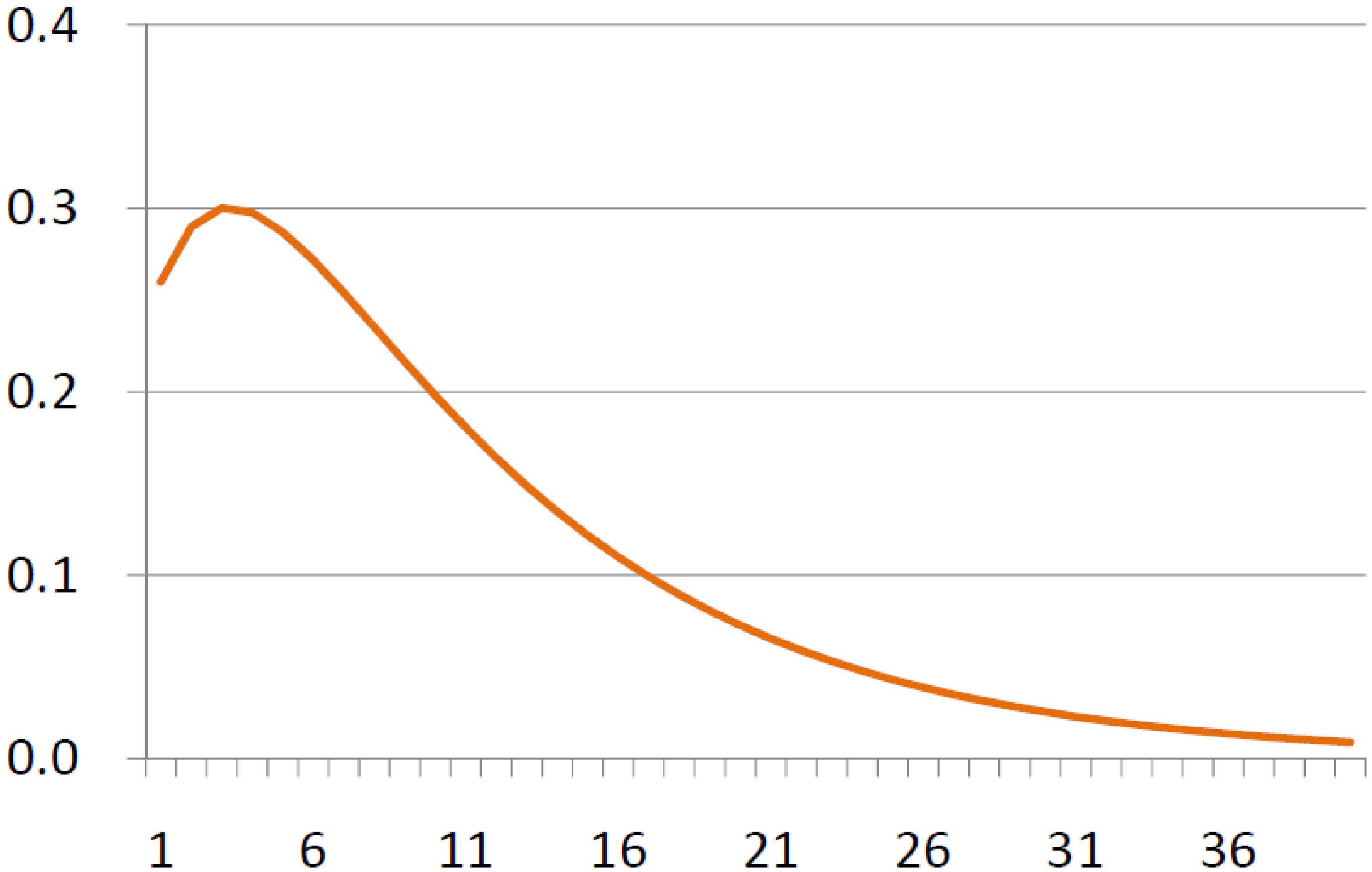
$$\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \sim \mathrm{W.N.}(\mathbf{\Sigma}),\ \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.96 \end{bmatrix}$$

のように書き直した時の u_{1t} の直交化インパルス応答関数 $IRF_{11}(k)$ と $IRF_{21}(k)$の図である。

$IRF_{11}(k)$ のグラフ



$IRF_{21}(k)$ のグラフ



演習問題

問題1

3変量VAR(1)モデル：

$$
\begin{aligned}
y_{1t} &= c_1 + \phi_{11}^{(1)} y_{1,t-1} + \phi_{12}^{(1)} y_{2,t-1} + \phi_{13}^{(1)} y_{3,t-1} + \varepsilon_{1t} \\
y_{2t} &= c_2 + \phi_{21}^{(1)} y_{1,t-1} + \phi_{22}^{(1)} y_{2,t-1} + \phi_{23}^{(1)} y_{3,t-1} + \varepsilon_{2t} \\
y_{3t} &= c_3 + \phi_{31}^{(1)} y_{1,t-1} + \phi_{32}^{(1)} y_{2,t-1} + \phi_{33}^{(1)} y_{3,t-1} + \varepsilon_{3t}
\end{aligned}
$$

において y_{2t}, y_{3t} から y_{1t} へのグレンジャー因果性がないという帰無仮説を検定したい。y_{1t} の回帰式において制約がない場合のSSRは20、帰無仮説の下でのSSRは22であった。標本数は$T = 204$ である。有意水準を 5 %とし、グレンジャー因果性を検定しなさい。$\chi^2(2)$ の95%点は5.99 である。

演習問題

問題2

一般に $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$ は $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sigma_{12}/\sigma_1^2 & 1 \end{bmatrix}$ と

$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2/\sigma_1^2 \end{bmatrix}$ によって $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{ADA}^{\mathrm{T}}$ と書ける

事を確認せよ。