一般化積率法(GMM)を用いた分析

講師: 長倉大輔

GMMを用いた分析

GMMによる推定および検定の体系は、GMMをマスターすればほとんどの分析に対応できるといっていいほどまでに発展している。

そのため、GMMについてこれらの体系をすべてカバーするのは1回の講習では不可能である。

この講習では、あまり数学的厳密性にこだわらないで、GMMの直観的な考え方の解説と、最近の話題のいくつかをとりあげるにとどめる。

GMMを用いた分析

- Generalized Method of Moment (GMM)

GMM (一般化モーメント法)は、1982年に(2013年にノーベル経済学賞を受賞した)シカゴ大学のハンセン教授によって提案された推定法である。

GMMはその適用範囲が広く、様々なモデルの推定に用いることができるため計量経済分析において非常によく用いられている。

GMMを用いた分析

- モーメント法

モーメント法は**モーメント条件**（**直交条件**とも呼ばれる）を用いることにより推定を行う。

モーメント条件とはモデルより導かれる、確率変数とパラメーターのある関数の期待値が 0 となるという条件のことである。

GMMを用いた分析

- モーメント法の例

例えば $x_t \sim$ i.i.d $N(\mu, \sigma^2)$ において μ と σ^2 を モーメント法で推定するとしよう。

推定するパラメータベクトルを $\boldsymbol{\theta} = [\mu, \sigma^2]^{\mathrm{T}}$ とする。

このとき、

$$\varepsilon_1(x_t\,;\boldsymbol{\theta}) = x_t - \mu, \quad \varepsilon_2(x_t\,;\boldsymbol{\theta}) = (x_t - \mu)^2 - \sigma^2$$

とすると

GMMを用いた分析

$$E[\varepsilon_1(x_t\,;\boldsymbol{\theta})] = E(\,x_t - \mu) = E(x_t) - \mu = 0$$

$$E[\varepsilon_2(x_t\,;\boldsymbol{\theta})] = E[\,(x_t - \mu)^2 - \sigma^2\,] = E[\,(x_t - \mu)^2] - \sigma^2 = 0$$

の2つの式が成り立つ。モーメント条件とは上記 2 つの式、すなわち、

$E[\varepsilon_1(x_t\,;\boldsymbol{\theta})] = 0$　と　$E[\varepsilon_2(x_t\,;\boldsymbol{\theta})] = 0$

である。モーメント法ではこのモーメント条件の標本による類似をパラメータについて解くことによって推定量を求める。

GMMを用いた分析

具体的には、このモーメント条件における**期待値を標本平均で置き換え**

$$\varepsilon_{1,T}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_1(x_t,\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_t - \mu = 0$$

$$\varepsilon_{2,T}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_2(x_t;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \mu)^2 - \sigma^2 = 0$$

という 2 つの式を得る。これを μ と σ^2 について解くと

GMMを用いた分析

最初の式より

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t$$

を得る。これを2つ目の式に代入して

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} (x_t - \hat{\mu})^2$$

を得る。これがモーメント法による、μ と σ^2 の推定量である。

GMMを用いた分析

GMM は**モーメント条件がパラメータ数より多い場合**に対してモーメント法を一般化したものである。

例えば、先ほどの例においては

$$E[(x_t - \mu)^4] = 3\sigma^4$$

も成り立つので $\varepsilon_3(x_t\,;\,\boldsymbol{\theta}) = (x_t - \mu)^4 - 3\sigma^4$ とすると、

$$E[\ \varepsilon_3(x_t\,;\,\boldsymbol{\theta})\ ] = 0$$

は新たなモーメント条件である。

GMMを用いた分析

ここで、この期待値を標本平均で置き換えたものを

$$\varepsilon_{3,T}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_3(x_t;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)^4 - 3\sigma^4$$

とし、これを 0 とおいた $\varepsilon_{3,T}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ という式も $\boldsymbol{\theta}$ の推定に使用することができる。

GMMを用いた分析

この時、$\boldsymbol{\theta} = [\mu, \sigma^2]^{\mathrm{T}}$ という **2 つ**のパラメーターの推定に使用可能な式は

$$\varepsilon_{1,T}(\boldsymbol{\theta}) = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} x_t - \mu = 0$$

$$\varepsilon_{2,T}(\boldsymbol{\theta}) = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} (x_t - \mu)^2 - \sigma^2 = 0$$

$$\varepsilon_{3,T}(\boldsymbol{\theta}) = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} (x_t - \mu)^4 - 3\sigma^4 = 0$$

の **3つ**あることになる。

GMMを用いた分析

しかしながら、2 つの変数 μ と σ^2 でこの3 つの方程式を**同時に満たす**ような μ と σ^2 は**存在しない**。

このような場合、通常のモーメント法ではこれらのモーメント条件のうち、いずれか 2つの式だけを満たすように推定量を決定する。

GMMを用いた分析

例えば、最初と2番目の式を用いれば先ほどの推定量が得られ、最初と最後の式を用いれば、μ と σ^2 の推定量は

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t$$

および

$$\hat{\sigma}^2 = \sqrt{\frac{1}{3T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \hat{\mu})^4}$$

となる。

GMMを用いた分析

このように モーメント条件がパラメーターの数より大きいときはいくつかのモーメント条件を**使用しない**ことによりパラメーターの推定を行うことはできる。

しかしながら、せっかくなので、できるならば、**すべてのモーメント条件を使用して**、推定の効率をあげたい。

そのような要望に応えたものがGMMである。

GMMを用いた分析

- GMMの目的関数

先ほどの 2×1のパラメーターベクトルに対して、モーメント条件、$E[\,\varepsilon_i\,(x_t\,;\,\boldsymbol{\theta})\,] = 0$, i =1, …,3 における期待値を標本平均で置き換えたものを $\varepsilon_{i,T}(\boldsymbol{\theta})$ とし、それらを並べたベクトルを

$$\varepsilon_T(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,T}(\boldsymbol{\theta}) \\ \varepsilon_{2,T}(\boldsymbol{\theta}) \\ \varepsilon_{3,T}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}$$

と定義する。

GMMを用いた分析

このとき、GMMでは以下のような目的関数を定義する。

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{W}) = \boldsymbol{\varepsilon}_T(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon}_T(\boldsymbol{\theta})$$

ここで $\mathbf{W}$ は 正値定符号行列とする。この $\mathbf{W}$ を**重み行列(Weighting matrix)** と呼ぶ。この目的関数を最小化する $\boldsymbol{\theta}$ の値が、$\boldsymbol{\theta}$ の **GMM 推定値**である。

後にみるように $\boldsymbol{\theta}$ の推定量の分散は $\mathbf{W}$ に依存し、$\mathbf{W}$ を最適に選ぶことにより、$\boldsymbol{\theta}$ の推定量の分散を可能な限り小さくすることができる。

GMMを用いた分析

- GMMの原理の直観的な説明

例えば **W** として 単位行列を選べば目的関数は

$$
\begin{aligned}
Q(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{W}) &= \boldsymbol{\varepsilon}_T(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}} \mathbf{I}_3\, \boldsymbol{\varepsilon}_T(\boldsymbol{\theta}) \\
&= \varepsilon_{1,T}(\boldsymbol{\theta})^2 + \varepsilon_{2,T}(\boldsymbol{\theta})^2 + \varepsilon_{3,T}(\boldsymbol{\theta})^3
\end{aligned}
$$

となる。これを最小にするということは、$\varepsilon_{i,T}(\boldsymbol{\theta})$ のそれぞれをできるかぎり 0 に近づけるということである。

W が正値定符号行列の場合も同様であり、この時はGMMの目的関数はある意味で $\boldsymbol{\varepsilon}_T(\boldsymbol{\theta})$ と **0** との距離を表すものと解釈できる。それを最小にするように選ぶという事である。

GMMを用いた分析

本来なら $\varepsilon_{i,T}(\boldsymbol{\theta})$ のそれぞれをすべて同時に０にするような $\boldsymbol{\theta}$ があれば、それが一番良いが、そういうものは一般的には必ずしも存在しないので、ならばすべての $\varepsilon_{i,T}(\boldsymbol{\theta})$ を全体的に０に近くするような $\boldsymbol{\theta}$ を求めようということである。

GMMを用いた分析

より一般的な状況では、モーメント条件として、L個の**操作変数**, $z_{j,t}$, $j=1,\ldots,L$ と t 時点に観測される全ての変数(のベクトル) $\mathbf{w}_t$ から計算される"**攪乱項**" $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\mathbf{w}_t\,;\boldsymbol{\theta})$, $i = 1,\ldots, M$ の積:

$$g_{ji}(\mathbf{w}_t;\boldsymbol{\theta}) = z_{j,t}\varepsilon_i(\mathbf{w}_t;\boldsymbol{\theta})$$

で

$$E[g_{ji}(\mathbf{w}_t;\boldsymbol{\theta})] = E[z_{j,t}\varepsilon_i(\mathbf{w}_t;\boldsymbol{\theta})] = 0,$$

$$j=1,..,L,\;\; i=1,\ldots,M$$

となるものを用いることができる。

GMMを用いた分析

ここで

モーメント条件の数 = 操作変数の数 × 攪乱項の数

である。GMM推定量が定義されるためには**モーメント条件の数は 未知パラメータの数(θ の次元) 以上でないといけない。**

先ほどの例では $\mathbf{w}_t = x_t$ とし、操作変数として定数項 (すなわち $z_{1t} = 1$) を使用したものである。

GMMを用いた分析

モーメント条件の期待値を標本平均で置き換えたものを

$$g_{ji,T}(\boldsymbol{\theta}) = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} g_{ji}(\mathbf{w}_t;\boldsymbol{\theta}),$$

とすると、GMM推定の目的関数は

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{W}) = \mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \, \mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})$$

と定義される。ここで $\mathbf{W}$ は (LM)×(LM)の正値定符号行列、$\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})$ は (LM) ×1ベクトル:

$$\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta}) = [g_{11,T}(\boldsymbol{\theta}) \;\; g_{12,T}(\boldsymbol{\theta}) \; \ldots \; g_{1M,T}(\boldsymbol{\theta}) \;\; \ldots \;\; g_{LM,T}(\boldsymbol{\theta})]^{\mathrm{T}}$$

である。これを最小化する $\boldsymbol{\theta}$ の値が **GMM 推定量**である。

GMMを用いた分析

- GMMの例(最小二乗法)

GMMは既存の様々な推定量を特別な場合として含んでいる。最小二乗法も GMM の特別な場合としてみなすことができる。

以下の標準的な回帰モデルを考える。

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \ldots + \beta_K x_{Kt} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma^2)$$
$$= \mathbf{x}_t^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t$$

ここで $\mathbf{x}_t = [1, x_{1t}, \ldots, x_{Kt}]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_K]^{\mathrm{T}}$ である。また $\mathbf{x}_t$ と ε_s はすべての t と s で独立とする。**未知係数は $K + 1$ 個あることに注意**。

GMMを用いた分析

この時、$\mathbf{w}_t = [\, y_t, \mathbf{x}_t^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, パラメータベクトルを $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\beta}$、
操作変数を $\mathbf{z}_t = \mathbf{x}_t$ とする。この時、攪乱項は

$$\varepsilon_t = \varepsilon(\mathbf{w}_t\,;\,\boldsymbol{\theta}) = y_t - \mathbf{x}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}、$$

と求めることができる。また、

$$g(\mathbf{w}_t;\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{x}_t\varepsilon_t = [\varepsilon_t,\ x_{1t}\varepsilon_t,\ \ldots,\ x_{Kt}\varepsilon_t\,]^{\mathrm{T}}$$

とすると、モーメント条件は

$$E[g(\mathbf{w}_t\,;\,\boldsymbol{\theta})] = E(\mathbf{x}_t\,\varepsilon_t) = [E(\varepsilon_t), E(x_{1t}\,\varepsilon_t)\ \ldots\ E(x_{Kt}\,\varepsilon_t)\ ]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$$

で与えられる。
　これは、操作変数の数が K+1、t 時点の攪乱項の数が 1 、モーメント条件の数が K+1 の場合に相当する。

GMMを用いた分析

期待値を標本平均で置き換えたものを

$$
\begin{aligned}
g_T(\boldsymbol{\theta}) &= T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{x}_t(y_i - \mathbf{x}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}) \\
&= T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{x}_t y_t - \left(T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{\beta} \\
&= \mathbf{s}_{xy} - \mathbf{S}_{xx}\boldsymbol{\beta}
\end{aligned}
$$

とする。ここで

$$
\mathbf{s}_{xy} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{x}_t y_t \quad \text{および} \quad \mathbf{S}_{xx} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t^{\mathrm{T}}
$$

とする。

GMMを用いた分析

GMMの目的関数において、重み行列 $\mathbf{W}$ を**単位行列**とすると、

$$
\begin{aligned}
Q(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{W}) &= g_T(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}} \mathbf{I}_K \, g_T(\boldsymbol{\theta}) \\
&= [\mathbf{s}_{xy} - \mathbf{S}_{xx}\boldsymbol{\beta}]^{\mathrm{T}} [\mathbf{s}_{xy} - \mathbf{S}_{xx}\boldsymbol{\beta}] \\
&= [\mathbf{s}_{xy}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \mathbf{S}_{xx}^{\mathrm{T}}][\mathbf{s}_{xy} - \mathbf{S}_{xx}\boldsymbol{\beta}] \\
&= \mathbf{s}_{xy}^{\mathrm{T}} \mathbf{s}_{xy} - \mathbf{s}_{xy}^{\mathrm{T}} \mathbf{S}_{xx}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \mathbf{S}_{xx}^{\mathrm{T}} \mathbf{s}_{xy} + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \mathbf{S}_{xx}^{\mathrm{T}} \mathbf{S}_{xx}\boldsymbol{\beta}
\end{aligned}
$$

これを $\boldsymbol{\beta}$ について最小化するには、$\boldsymbol{\beta}$ について微分したものを $\mathbf{0}$ とおいた方程式を解けばよい（行列の微分の知識が必要)

GMMを用いた分析

$\boldsymbol{\beta}$ について微分して $\mathbf{0}$ とおくと

$$-2\mathbf{s}_{xy}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_{xx} + 2\mathbf{S}_{xx}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_{xx}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{S}_{xx}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_{xx}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{S}_{xx}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_{xy}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{\beta}}_{ols} = (\mathbf{S}_{xx}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_{xx})^{-1}\mathbf{S}_{xx}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_{xy} = \mathbf{S}_{xx}^{-1}(\mathbf{S}_{xx}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{S}_{xx}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_{xy} = \mathbf{S}_{xx}^{-1}\mathbf{s}_{xy}$$

$$= \left[\sum_{t=1}^{T}\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t'\right]^{-1}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{x}_t' y_t$$

を得る。これは最小二乗推定量である。

(実際には $\mathbf{W}$ を単位行列としなくても任意の正定値行列であれば GMM は OLSと等しくなる)。

GMMを用いた分析

- 係数より操作変数が多い線形モデルの場合

先ほど同様、線形モデル

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \dots + \beta_K x_{Kt} + \varepsilon_t = \mathbf{x}_t^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t$$

を考える。しかしながら内生性の問題により、係数ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ を操作変数 $\mathbf{z}_t$ を用いて推定するとする。

ただし操作変数の数($\mathbf{z}_t$ の次元)のL は $L > K$ であるとする。

GMMを用いた分析

モーメント条件は

$$E[\mathbf{z}_t\varepsilon_t] = E[\mathbf{z}_t(y_t - \mathbf{x}_t^T\boldsymbol{\beta})] = \mathbf{0}$$

であり期待値を標本平均で置き換えたものは

$$\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\beta}) = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{z}_t(y_t - \mathbf{x}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$$

となる。この場合は推定するパラメーター数 K に対して、方程式の数が $L > K$ なので一般には上記の方程式を満たす $\boldsymbol{\beta}$ は必ずしも存在しない。

GMMを用いた分析

GMM の目的関数を

$$Q(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{W}) = \mathbf{g}_T(\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \mathbf{g}_T(\boldsymbol{\beta})$$

とし、この目的関数を最小にする $\boldsymbol{\beta}$ をもとめる。

途中の計算は端折るが、この時、$\boldsymbol{\beta}$ のGMM推定量は

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{gmm} = (\mathbf{S}'_{zx} \mathbf{W} \mathbf{S}_{zx})^{-1} \mathbf{S}'_{zx} \mathbf{W} \mathbf{s}_{xy}$$

で与えられる。ここで $\mathbf{s}_{xy}$ は先ほどと同じで、$\mathbf{S}_{zx}$ は

$$\mathbf{S}_{zx} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} \mathbf{z}_t \mathbf{x}_t^{\mathrm{T}}$$

とする。

GMMを用いた分析

- 重み行列**W**の選択

GMM推定量の**推定効率(漸近分散)は重み行列 W に依存している**。推定効率をもっともよくする **W** は

$$\mathbf{W} = \mathbf{S}^{-1} = (E[\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}])^{-1}$$

であることを示すことができる。

ただし、これは直接は観測できないのでその推定値 $\hat{\mathbf{S}}_T$ を用いる。この **S** の推定にはいろいろな方法が提案されているが、よく用いられるのは Andrews (1991)が提案したような カーネルベースの推定量である。

GMMを用いた分析

- Efficient GMM 推定量

$\mathbf{W}$ として $\mathbf{S}^{-1}$ の一致推定量を用いたGMM 目的関数

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{S}}^{-1}) = \mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})$$

を最小にする $\boldsymbol{\theta}$ は **Efficient GMM 推定量**と呼ばれ、漸近的に正規分布に従い、その漸近分散は最小で

$$\mathbf{V}_\theta = (\boldsymbol{\Sigma}'_{ZX} \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{ZX})^{-1}$$

になる。ここで

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ZX} = E(\mathbf{z}_t \mathbf{x}'_t)$$

である。

GMMを用いた分析

以下では GMM に関連したいくつかの統計量および問題点を挙げておく。

- J 統計量

GMM目的関数を Efficient GMM 推定量 で評価したものに T (標本数) をかけたもの、すなわち

$$J_T = TQ(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{egmm}, \hat{\mathbf{S}}^{-1})$$

は **J 統計量**と呼ばれる。ここで $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{egmm}$ は Efficient GMM 推定量である。J 統計量は**モデルの全ての仮定が正しいとき**、自由度 $K-L$ のカイ二乗分布に従う。

GMMを用いた分析

よってこの統計量が、このカイ二乗分布からの標本の値として大きすぎるときには、(モーメント条件などの)モデルの仮定のどれかが満たされていないと考えられるので、改めてモデルを見直す必要が出てくる。

このように J 統計量を用いて、モデルの定式化の誤りがあるかどうかを検定することを ***J* 検定**という

J 検定によって　帰無仮説：定式化の誤りがない、が棄却された場合でも、どの仮定が満たされていないかについては何も示唆してくれないので注意が必要である。

GMMを用いた分析

- 弱い操作変数 (Weak Instrument) の問題

これは GMM というよりは 操作変数法に関連した問題であるが、線形モデル

$$y_t = \mathbf{x}_t^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t$$

において、$\boldsymbol{\beta}$ を 操作変数 $\mathbf{z}_t$ を用いて推定する場合、$\mathbf{x}_t$ との相関が非常に弱い操作変数 $\mathbf{z}_t$ を用いると、非常に大きな有限標本においても、$\boldsymbol{\beta}$ の推定量に非常に大きいバイアスがかかり、かつ標準誤差(の推定量)が非常に小さくなる、という問題が生じる。

このような操作変数は **弱い操作変数 (Weak Instrument)** と呼ばれる。

GMMを用いた分析

弱い操作変数の問題が生じると、大きなバイアスがかかり、標準誤差が小さいため、例え真の値が **0** でも 帰無仮説 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ が棄却されなかったり、逆に **0** でないにもかかわらず、有意水準以上に棄却されるという問題が生じる。

よって操作変数を用いて推定する場合はこの問題に注意しないといけない。

GMMを用いた分析

- 弱い操作変数検定

Stock and Yogo (2005) は弱い操作変数が存在するかどうかを検定するのに Cragg-Donald 統計量(1993) を用いることを提案した(これはもともとはパラメーターが識別されるかの検定。検定統計量の具体的な形についてはここでは省略する)。

彼らは弱い操作変数を内生性があるときの (1) OLS のバイアスの b % を超える場合、(2) ワルド検定の有意水準がゆがみ、c % を超える場合、と定義し、これらを帰無仮説とした場合の Cragg-Donald 統計量の棄却点を計算している。ここで b と c は検定実施者が設定するチューニングパラメーター。

GMMを用いた分析

- モーメント(条件)選択基準

実証分析ではしばしば J 統計量によってモデルの仮定が棄却される。この理由として、使用したモーメント条件のうち正しくないものが含まれている可能性がある。

そのような場合、どのモーメント条件が正しくてどのモーメント条件が正しくないかを推定するような方法があれば有用であろう。

ここではそのような方法のうち Andrews (1999) と Hall, Inoue, Jana, and Shin (2007) による**モーメント(条件)選択基準（Moment Selection Criteria; MSC)** と呼ばれるものを紹介する。

GMMを用いた分析

- Andrews の MSC

Andrews (1999) は以下の 2つのMSCを提案した(本当は3つだが、EViewsで出力されるのはこの2つだけ)

$$\text{SIC – based:} \quad J_T - (c-p)\log(T)$$
$$\text{HQIC – based:} \quad J_T - 2.01(c-p)\log(\log(T))$$

ここで J_T は J 統計量、c は J 統計量の計算(パラメーター の推定)に使用したモーメントの数、p は推定したパラメータの数である。SIC – based は情報量基準のSICのGMMに対する類似の統計量、HQIC – based は情報量基準の HQIC のGMMに対する類似の統計量である。

GMMを用いた分析

SIC (HQIC) – based を可能なモーメント条件の組み合わせに対して計算し、その値が一番小さくなるモーメント条件の組み合わせが “正しい” モーメント条件として選ばれる。

Simulation の結果、SIC –based のパフォーマンスが一番良いことが分かっている。

GMMを用いた分析

- Hall, Inoue, Jana, and Shin の MSC

Hall, Inoue, Jana, and Shin (2007) は 線形回帰モデルに対して、以下の Relevant MSCを提案した

$$\text{Relevant MSC} = \log(|\hat{\mathbf{V}}_\theta|) + \frac{(c-p)}{\sqrt{\tau}}\log(\sqrt{\tau})$$

ここで $\hat{\mathbf{V}}_\theta$ は Efficient GMM の漸近分散の推定値、τは重み行列の推定の仕方に応じて取る値が変わる値である。

RMSCもそれぞれのモーメント条件の組み合わせに対して計算し、最も小さい値のモーメント条件を選ぶ。