時系列分析2
1 変量時系列モデルとその性質

担当:　長倉　大輔
（ながくらだいすけ）

一変量時系列モデルとその性質

- 時系列モデル

時系列モデルとは時系列データを生み出すメカニズムとなるものである。

これは実際には**未知**である。私たちにできるのは観測された時系列データからその背後にある時系列モデルを推測、推定するだけである。

以下ではいくつかの代表的な時系列モデルを考察する。

一変量時系列モデルとその性質

- 自己回帰モデル(Autoregressive Model)

もっとも頻繁に使われる時系列モデルは**自己回帰モデル（ARモデル）**である。

p 次のARモデル(これを**AR(p)モデル**という)は以下のように定義される。

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

ここで $\varepsilon_t \sim \mathrm{W.N.}(\sigma^2)$ である。

一変量時系列モデルとその性質

- AR(1)モデル

まず $p=1$ の場合を考えよう。

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

これはAR(1)モデルと呼ばれる。

このモデルは $|\phi_1|<1$ の時に**定常**となる。
以後は常に$|\phi_1|<1$を仮定する。

このモデルの平均、自己共分散、自己相関はどのような形をとるだろうか？

一変量時系列モデルとその性質

- AR(1)モデルの期待値

定常性を仮定したので y_t と y_{t-1} の期待値は同じ。
これを μ とおこう。

先ほどの両辺の期待をとって

$$\mu = c + \phi_1 \mu \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{c}{1-\phi_1}$$

よってAR(1)モデルの期待値は $\dfrac{c}{1-\phi_1}$ となる。

一変量時系列モデルとその性質

- AR(1)モデルの分散

定常性を仮定したので y_t と y_{t-1} の分散は同じ。
(分散は 0 次の共分散と等しいことに注意)。
これを γ_0 とおこう。

先ほどの両辺の分散をとって($y_{t-k}, k > 0$ と ε_t の共分散が 0 になることは後ほど示す)

$$\gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}$$

よってAR(1)モデルの分散は $\dfrac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}$ となる。

一変量時系列モデルとその性質

- AR(1)モデルの自己共分散

y_t と y_{t-k} の共分散は

$$
\begin{aligned}
\gamma_k &= \mathrm{cov}(y_t, y_{t-k}) \\
&= \mathrm{cov}(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, y_{t-k}) \\
&= \phi_1 \gamma_{k-1}
\end{aligned}
$$

となる。この漸化式を使えば $\gamma_0 = \dfrac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}$ より順に計算できる。

一変量時系列モデルとその性質

- AR(1)モデルの自己相関

y_t と y_{t-k} の自己相関は、先ほどの共分散の式の両辺を γ_0 で割って

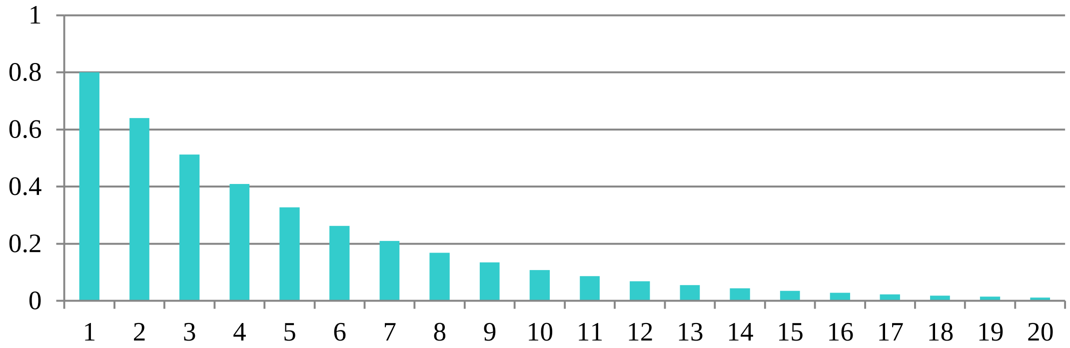
$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1}$$

を得るので、この漸化式を使えば $\rho_0 = 1$ より順に計算できる。

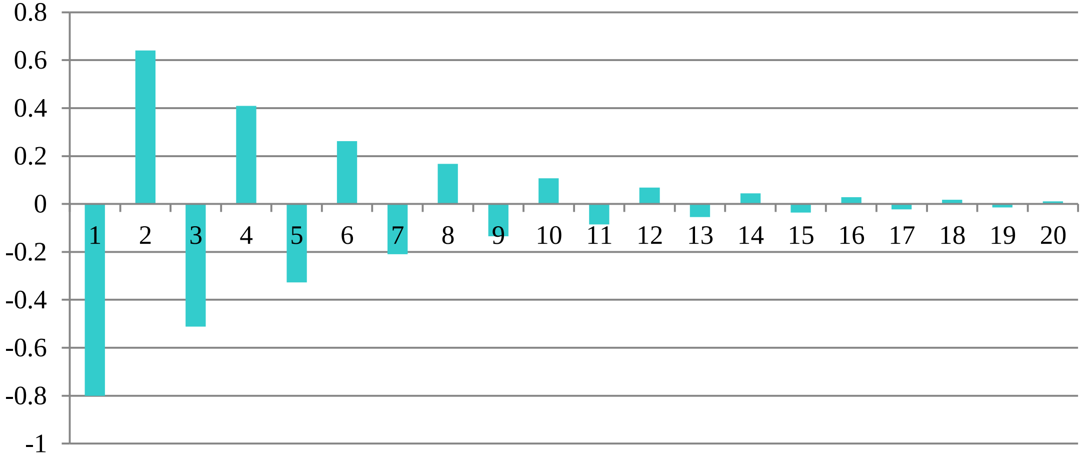
$$\rho_1 = \phi_1,\ \rho_2 = \phi_1^2,\ \rho_3 = \phi_1^3,\ \cdots\ ,\rho_k = \phi_1^k$$

AR(1)の $\phi_1 = \pm 0.8$ のコレログラムは次のようになる。

$\phi_1 = 0.8$ の時のAR(1)のコレログラム



$\phi_1 = -0.8$ の時のAR(1)のコレログラム



一変量時系列モデルとその性質

- AR(1)モデルの自己相関の特徴

(1) 自己相関は 指数関数的に減少

(2) ϕ_1 が負の時には振動しながら減少

(3) 自己相関のパターンが非常に単純

AR(1)モデルの自己相関の形状は制約的でより複雑な自己相関を表すためにはより一般的なモデルが必要

$\Rightarrow$ AR(p) モデル

一変量時系列モデルとその性質

- AR(p)モデルの期待値

定常性を仮定したので y_t , y_{t-1}, y_{t-2}, …, y_{t-p} の期待値は同じ。これを μ とおこう。

AR(p) モデルの式の両辺の期待をとって

$$\mu = c + \phi_1\mu + \phi_2\mu + \cdots + \phi_p\mu$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{c}{1-\phi_1-\phi_2-\cdots-\phi_p}$$

よってAR(p)モデルの期待値は $\dfrac{c}{1-\phi_1-\cdots-\phi_p}$ となる。

一変量時系列モデルとその性質

- AR(p)モデルの分散

AR(p) モデルの分散は

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1\rho_1-\phi_2\rho_2-\cdots-\phi_p\rho_p}$$

で与えられる。

宿題1 (提出する必要はありません)

AR(p) モデルの分散は

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 - \cdots - \phi_p \rho_p}$$

で与えられる事を示しなさい。

一変量時系列モデルとその性質

- AR(p)モデルの自己共分散と自己相関

AR(p) モデルの自己共分散と自己相関は次の関係を満たす。

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \cdots + \phi_p\gamma_{k-p}, \quad k \geq 1$$

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \cdots + \phi_p\rho_{k-p}, \quad k \geq 1$$

下の式は特に**ユール・ウォーカー方程式**と呼ばれる。

一変量時系列モデルとその性質

- AR(p)モデルの自己共分散の関係の確認

AR(p) モデル:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

は $\mu = \dfrac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p}$ を用いると

$$y_t - \mu = \phi_1 (y_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p (y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t,$$

と書き直す事ができる。

一変量時系列モデルとその性質

- AR(p)モデルの自己共分散の関係の確認

この両辺に $y_{t-k}-\mu$ をかけて期待をとると

$$
\begin{aligned}
\gamma_k &= E[(y_t-\mu)(y_{t-k}-\mu)] \\
&= \phi_1 E[(y_{t-1}-\mu)(y_{t-k}-\mu)] + \cdots \\
&\quad + \phi_p E[(y_{t-p}-\mu)(y_{t-k}-\mu)] + E[\varepsilon_t(y_{t-k}-\mu)] \\
&= \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \cdots + \phi_p\gamma_{k-p}
\end{aligned}
$$

となる。自己相関の場合は自己共分散の関係を γ_0 で割ればよい。

一変量時系列モデルとその性質

例題 (AR (1) モデル)
AR(1) モデル:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad y_0 = 0, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{W.N.}(\sigma^2)$$

において、$\phi_1 = 1$ の時、y_t が定常で**ない**事を確認しなさい。

例題 (AR(2)モデル)
AR(2) モデル:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{W.N.}(\sigma^2)$$

の 1 次と 2 次の自己相関、ρ_1 と ρ_2 をユール・ウォーカー方程式を使って求めなさい。

一変量時系列モデルとその性質

- AR(p)モデルの定常性の条件

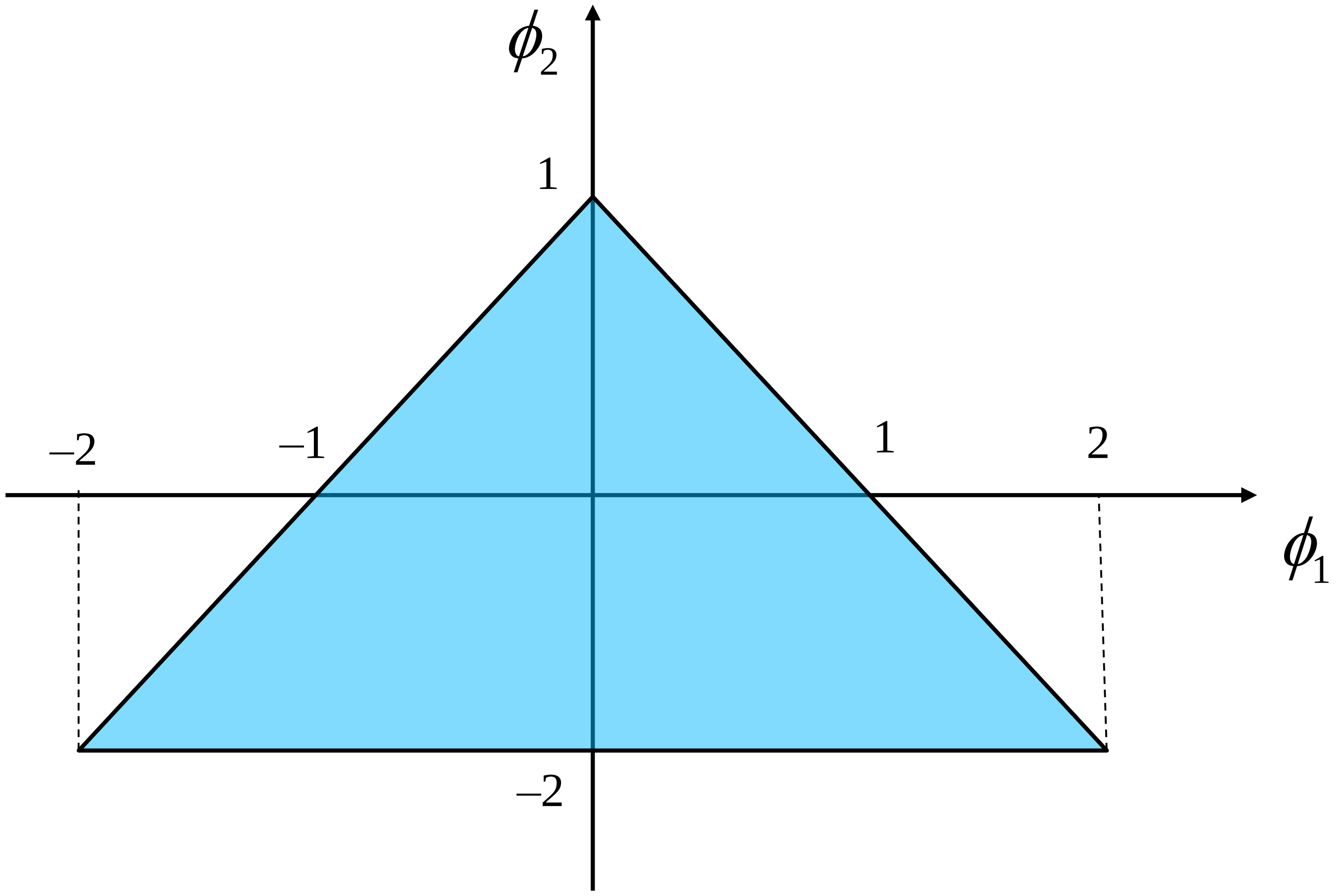
AR(1)モデルの**定常性の条件**は $|\phi_1|<1$ であった。
AR(p)モデルの定常性の条件は以下のようになる。

「多項式: $1-\phi_1 z-\phi_2 z^2-\cdots-\phi_p z^p=0$ のすべての
解の絶対値が **1 より大きい**。」

AR(1) の場合は $1-\phi_1 z=0$ の解 $z=1/\phi_1$ の絶対値が
1 より大きい

$$\rightarrow |\phi_1|<1$$

AR(2) の場合は次の図のようになる。


ϕ_2
1
-2
-1
1
2
ϕ_1
-2

一変量時系列モデルとその性質

- 移動平均モデル（Moving Average Model)

ARモデルと並んでよく使われる時系列モデルに
移動平均モデル(MAモデル)がある。

q 次のMAモデル(これを**MA(q)モデル**という)は以下のように定義される。

$$y_t = c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

ここで　$\varepsilon_t \sim \mathrm{W.N.}(\sigma^2)$　である。

MA(q) モデルは θ_k の値にかかわらず**常に定常**である。

一変量時系列モデルとその性質

- MA(1)モデル

まず $q = 1$ の場合を考えよう。

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

これは**MA(1)モデル**と呼ばれる。

このモデルの期待値、自己共分散、自己相関は以下のようになる。

一変量時系列モデルとその性質

- MA(1)モデルの期待値、

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(\mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) \\ &= E(\mu) + E(\varepsilon_t) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) \\ &= \mu \end{aligned}$$

→ MA(1)モデルは単純に切片が期待値である。

一変量時系列モデルとその性質

- MA(1)モデルの分散、自己共分散

$$
\begin{aligned}
\gamma_k &= \mathrm{cov}(y_t, y_{t-k}) \\
&= \mathrm{cov}(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k} + \theta_1\varepsilon_{t-1-k}) \\
&= \mathrm{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) + \mathrm{cov}(\varepsilon_t, \theta_1\varepsilon_{t-1-k}) \\
&\quad + \mathrm{cov}(\theta_1\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k}) + \mathrm{cov}(\theta_1\varepsilon_{t-1}, \theta_1\varepsilon_{t-1-k}) \\
&= \begin{cases} (1+\theta_1^2)\sigma^2 & \text{for } k=0 \\ \theta_1\sigma^2 & \text{for } k=1 \\ 0 & \text{for } k>1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

一変量時系列モデルとその性質

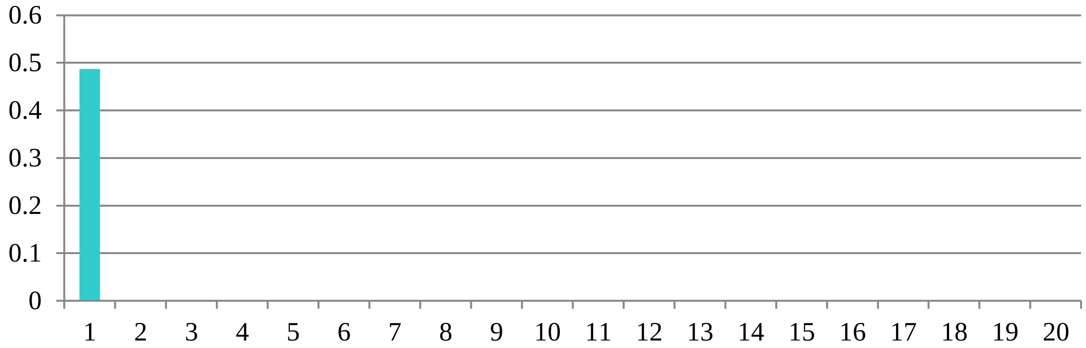
- MA(1)モデルの自己相関

自己共分散より

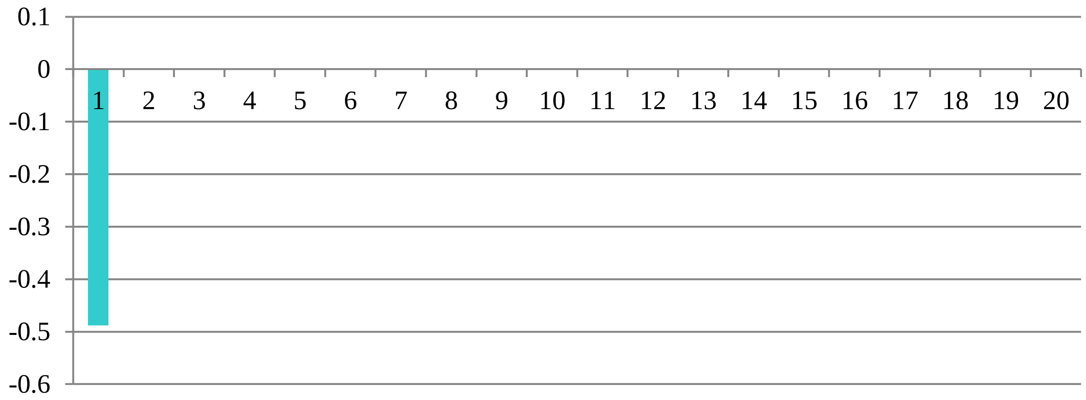
$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & \text{for } k=1 \\ 0 & \text{for } k>1 \end{cases}$$

→ **MA(1)モデル**において**次数が 1 より大きい**自己相関は 0

$\theta_1 = 0.8$ の時のMA(1)のコレログラム



$\theta_1 = -0.8$ の時のMA(1)のコレログラム



一変量時系列モデルとその性質

- MA(q)モデルの期待値

$$
\begin{aligned}
E(y_t) &= E(\mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}) \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

- MA(q)モデルの自己共分散

$$
\gamma_k = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2 & \text{for } k = 0 \\ (\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q)\sigma^2 & \text{for } 1 \le k \le q \\ 0 & \text{for } q < k \end{cases}
$$

一変量時系列モデルとその性質

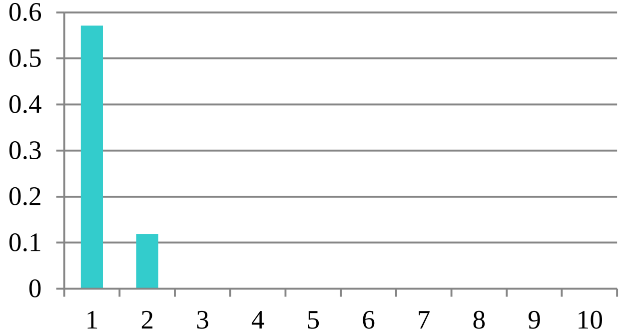
- MA(q)モデルの自己相関

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2} & \text{for} \quad 1 \le k \le q \\ 0 & \text{for} \quad k > q \end{cases}$$

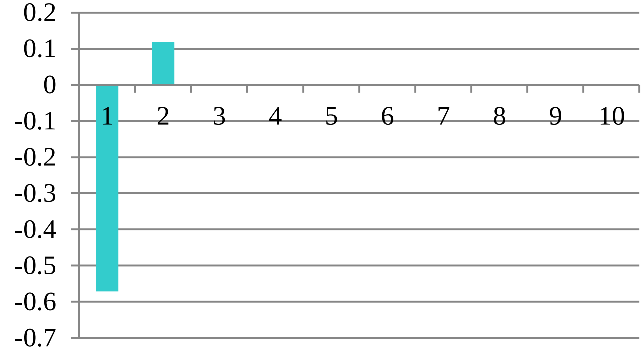
→ MA(q)モデルにおいて**次数が q より大きい**自己相関は 0

MA(2)モデル: $y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}$ のコレログラムは以下のようになる。

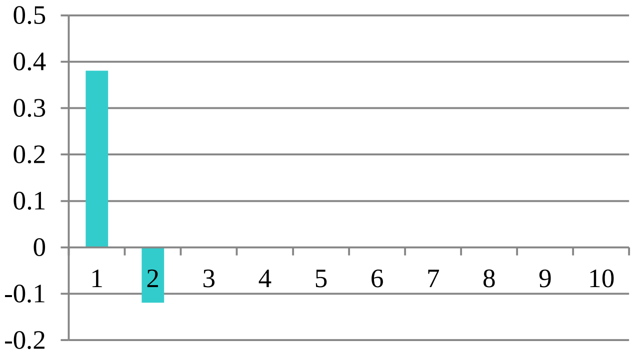
$$\theta_1 = 0.8,\ \ \theta_2 = 0.2$$



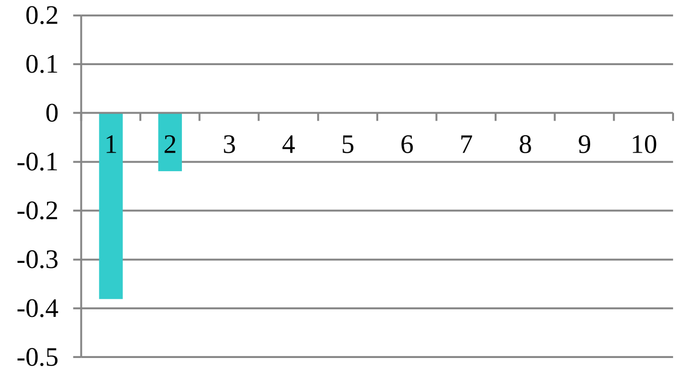
$$\theta_1 = -0.8,\ \ \theta_2 = 0.2$$



$$\theta_1 = 0.8,\ \ \theta_2 = -0.2$$



$$\theta_1 = -0.8,\ \ \theta_2 = -0.2$$



一変量時系列モデルとその性質

- MA(q)モデルの問題点

q 次の自己相関をモデル化するために $q+1$個のパラメーターが必要となる。したがって、長期間の依存関係を表すためには多くのパラメーターが必要となる。

一変量時系列モデルとその性質

- 自己回帰移動平均(Autoregressive Moving Average)モデル

AR モデルの特徴とMAモデルの特徴の両方を持つモデルである。ARMAモデルと呼ばれる。

ARMA(p, q)モデルは以下のように定義される

$$
\begin{aligned}
y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} \\
+ \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}
\end{aligned}
$$

ここで $\varepsilon_t \sim$ W.N. (σ^2) である。

一変量時系列モデルとその性質

- ARMAモデルの特徴

ARMA モデルは以下の特徴を持つ。

(1)

$$\mu = \frac{c}{1-\phi_1-\phi_2-\cdots-\phi_p}$$

(2)　$q+1$ 次以降の自己共分散と自己相関は以下の方程式(ユールウォーカー方程式)に従う。

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1}+\phi_2\gamma_{k-2}+\cdots+\phi_p\gamma_{k-p}, \quad k \geq q+1$$

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1}+\phi_2\rho_{k-2}+\cdots+\phi_p\rho_{k-p}, \quad k \geq q+1$$

(q 次までの自己共分散、自己相関は一般的に表現するのが難しい)

一変量時系列モデルとその性質

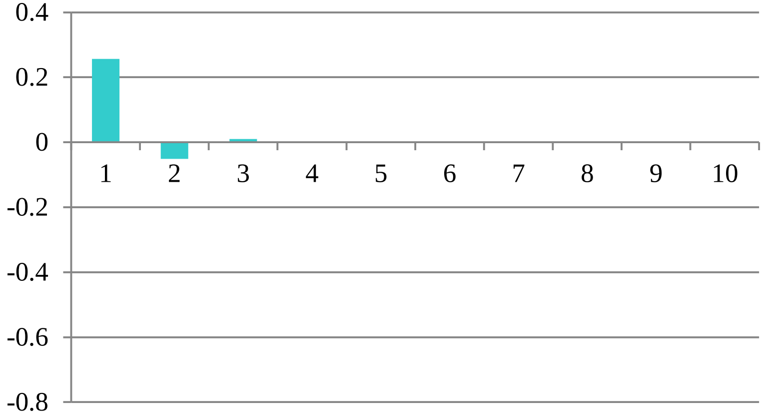
- ARMAモデルの特徴

(3) ARMAモデルの定常性の条件はARモデルと同じである。すなわち

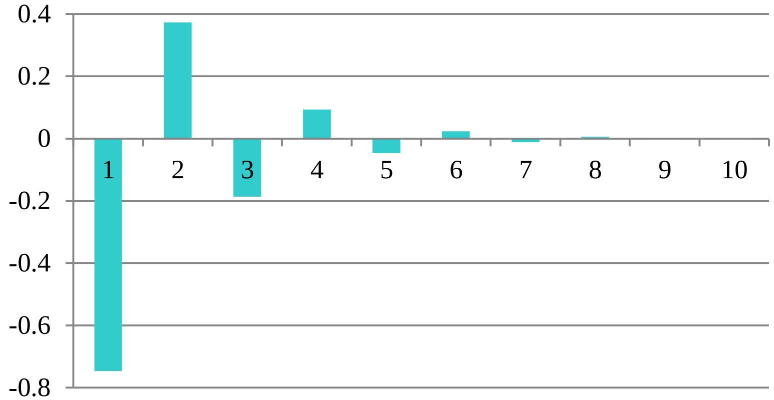
「p次の多項式: $1-\phi_1 z-\phi_2 z^2-\cdots-\phi_p z^p=0$ のすべての解の絶対値が **1より大きい**。」

以下はARMA(1, 1) モデルのコレログラムである。

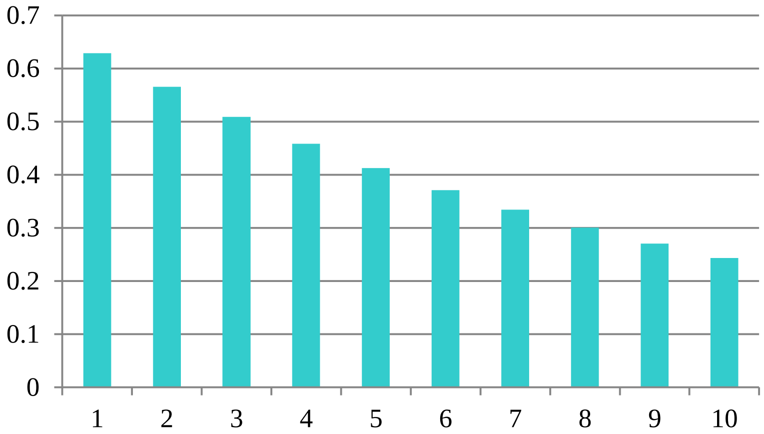
$\phi_1 = -0.2,\ \theta_1 = 0.5$



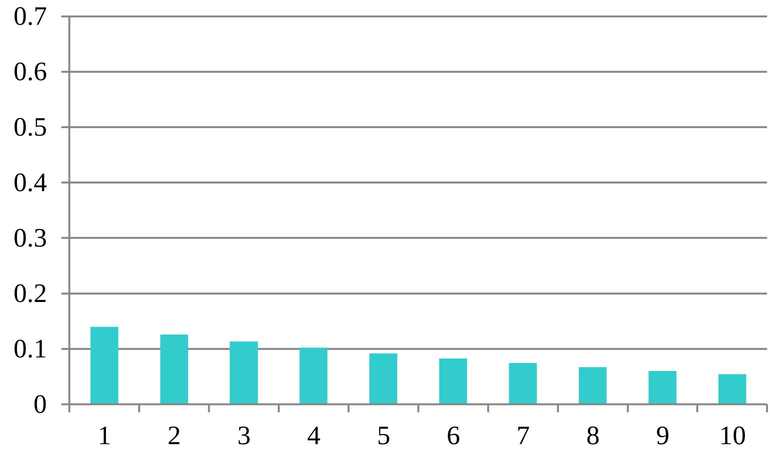
$\phi_1 = -0.5,\ \theta_1 = -0.8$



$\phi_1 = 0.9,\ \theta_1 = -0.5$



$\phi_1 = 0.9,\ \theta_1 = -0.8$



演習問題

問題 1

AR(1) モデル:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

を MA(∞)モデル:

$$y_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

で表した時の θ_i はどのようになるか？

演習問題

問題 2

次のモデルの中で定常なモデルを全て選べ

(a) $y_t = 2 + \varepsilon_t, \ \ \varepsilon_t \sim \text{W.N.}(\sigma^2)$

(b) $y_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}, \ \varepsilon_t \sim \text{W.N.}(\sigma^2)$

(c) $y_t = \varepsilon_t - 0.3\varepsilon_{t-1}, \ \varepsilon_t \sim \text{W.N.}(\sigma^2)$

(d) $y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t, \ \varepsilon_t \sim \text{W.N.}(\sigma^2)$

(e) $y_t = 1.3y_{t-1} - 0.4y_{t-2} + \varepsilon_t, \ \varepsilon_t \sim \text{W.N.}(\sigma^2)$

宿題2 (提出する必要はありません)

ある時系列データの 1次の自己相関は 0.9、2次以上の自己相関は 0 であった。この時系列データをMA(1)モデルで表すことは可能か？もし可能であるならばその時の θ_1 の値はいくつか？

また別の時系列データの 1次の自己相関は 0.4、2次以上の自己相関は 0 であった。この時系列データをMA(1)モデルで表すことは可能か？もし可能であるならばその時の θ_1 の値はいくつか？

宿題3 (提出する必要はありません)

MA(2) モデル:

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

について

(1) $E(y_t)$ を求めよ。
(2) γ_0 , γ_1, γ_2を求めよ。
(3) $k > 2$ に対して $\gamma_k = 0$ となる事を確認せよ。

宿題4 (提出する必要はありません)

ARMA(1, 1)過程

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim W.N.(\sigma^2)$$

について以下の問いに答えよ。

(1) 定常性の条件を求めよ。
(2) y_t の期待値 μ を求めよ。
(3) γ_0を求めよ(ヒント: $\mathrm{cov}(y_{t-1}, \varepsilon_t) = 0$, $\mathrm{cov}(y_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) = \sigma^2$)。
(4) γ_1を求めよ。 (5) ρ_1を求めよ。
(6) ユールウォーカー方程式を用いて $k>1$ において ρ_kを求めよ。
(7) $\phi_1 = 0.9$, $\theta_1 = 0.5$ として10次までのコレログラムを描け。

一変量時系列モデルとその性質

- ラグ･オペレーターを用いた表現と応用

これまで示してきた AR, MA, ARMAモデルは**ラグ･オペレーター**と呼ばれるものを使うと簡単に表現できる。

ラグ･オペレーター(これを L と書く)とは次のように時点を 1 つ前の時点に戻す操作を行う。

$$L y_t = y_{t-1}$$

これを k 回行う、すなわち L を k 回 “掛ける” と

$$L^k y_t = y_{t-k}$$

のように 時点が k 個前にもどる。また $L^0 = 1$ とする。

一変量時系列モデルとその性質

- AR(p)モデルのラグ・オペレーターを用いた表現

AR(p)モデル:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{W.N.}(\sigma^2)$$

はラグ･オペレータを用いると

$$
\begin{aligned}
& y_t = c + \phi_1 L y_t + \cdots + \phi_p L^p y_t + \varepsilon_t \\
\Leftrightarrow \quad & y_t - \phi_1 L y_t - \cdots - \phi_p L^p y_t = c + \varepsilon_t \\
\Leftrightarrow \quad & (1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p) y_t = c + \varepsilon_t \\
\Leftrightarrow \quad & \phi_p(L) y_t = c + \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

と表す事ができる。ここで $\phi_p(L) = 1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p$ という L の p 次の多項式を表す。

一変量時系列モデルとその性質

- MA(q)モデルのラグ･オペレーターを用いた表現

同様に、MA(q)モデル:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{W.N.}(\sigma^2)$$

はラグ･オペレータを用いると

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 L \varepsilon_t + \cdots + \theta_q L^q \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow \quad y_t = \mu + (1 + \theta_1 L + \cdots + \theta_q L^q)\varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow \quad y_t = \mu + \theta_q(L)\varepsilon_t$$

と表す事ができる。ここで $\theta_q(L) = 1 + \theta_1 L + \ldots + \theta_q L^q$ という L の q 次の多項式を表す。

一変量時系列モデルとその性質

- ARMA(p, q)モデルのラグ･オペレーターを用いた表現

同様に、ARMA(p, q)モデル:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$
$$+ \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \qquad \varepsilon_t \sim \mathrm{W.N.}(\sigma^2)$$

はラグ･オペレータを用いると

$$\phi_p(L) y_t = c + \theta_q(L) \varepsilon_t$$

と表す事ができる。ここで $\phi_p(L) = 1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p$,
および $\theta_q(L) = 1 + \theta_1 L + \ldots + \theta_q L^q$ である。