状態変化を伴うモデル†

担当:　長倉　大輔
（ながくらだいすけ）

† この資料は私のゼミにおいて使用するために作成した資料です。ゼミのWEBページ上で公開しており、自由に参照して頂いて構いません。ただし、内容について、一応検証してありますが、もし間違いがあった場合でもそれによって生じるいかなる損害、不利益について責任を負いかねますのでご了承ください。間違いは発見次第、継続的に直していますが、まだ存在する可能性があります。

状態変化を伴うモデル

- 状態変化を伴うモデル

今まで様々な時系列モデル (ARMA モデル、VAR モデル、ARCH、GARCHモデル等) を見てきたが、それらのモデルのパラメーターの値は、観測期間を通じて一定であるという暗黙の仮定を置いていた。

パラメーターの値は人々の選好や国ごとの制度、慣習などに影響されて決定されると考えられるが、これらはその時々の経済状態などにも影響されて、時間を通じて変化しているであろう。

状態変化を伴うモデル

- 状態変化を伴うモデル

もしそうであれば、モデルのパラメーターも時間を通じて変化する可能性がある。以下ではそのようなモデルの例をいくつか紹介する。

状態変化を伴うモデル

- 閾値(いきち)モデル

閾値モデルとはモデルのパラメーターが**状態**に依存して変化するモデルの総称である。

状態は通常ある観測可能な変数によって表される。
例えばある観測可能な変数を s_t とすると、ある値 a に対して、$s_t < a$ なら**状態 1**、$s_t \geq a$ なら**状態 2**のように状態を定義する。

このような変数 s_t を**状態変数**とよぶ。状態変数をどのように選ぶかは分析の目的に依存する。

状態変化を伴うモデル

- 閾値(いきち)モデル

よく用いられる定式化は、ある変数 y_t の分析の際に、$\boldsymbol{y_t}$ **の過去の値**を用いて状態変数を $s_t = y_{t-d}, d > 0$ とするものである。もしくは、時点 t を用いて $s_t = t$ とする場合もある。これはある時点で何かモデルのパラメーターに変化を生じさせるような出来事(例えば、制度、法律の変更)が起こった事が分かっているような場合によく用いられる。

以下では AR(1) モデルを例にとって説明するが、考え方は他のモデルにも適用可能である。

状態変化を伴うモデル

- 閾値(いきち) (Threshold AR; TAR) ARモデル

考えうる状態の数は 2 つであるとする。この時、**2 状態閾値AR(1) (TAR)モデル**は以下のように与えられる。

$$y_t = \begin{cases} c_1 + \phi_{11} y_{t-1} + \sigma_1 \varepsilon_t, & s_t < c \\ c_2 + \phi_{12} y_{t-1} + \sigma_2 \varepsilon_t, & s_t \geq c \end{cases}$$

ここで $\varepsilon_t \sim \mathrm{iid}(0, 1)$ とし、$s_t < c$ を状態1、$s_t \geq c$ を状態2とする。上記のモデルは状態 1 の時と状態 2 の時で**異なる AR(1) モデルに従うモデル**ということができる。

状態変化を伴うモデル

- 閾値(いきち) (Threshold AR; TAR) ARモデル

全てのパラメーターが変化したと考える必要はなく、分析の目的に応じて、**一部のパラメーターだけ**が変化したと考えてもよい。例えば状態変数を時間 とすると $(s_t = t)$ 状態1 $(t < c)$ と状態2 $(t \geq c)$ のそれぞれの状態における、このモデルの定常平均と定常分散はそれぞれ

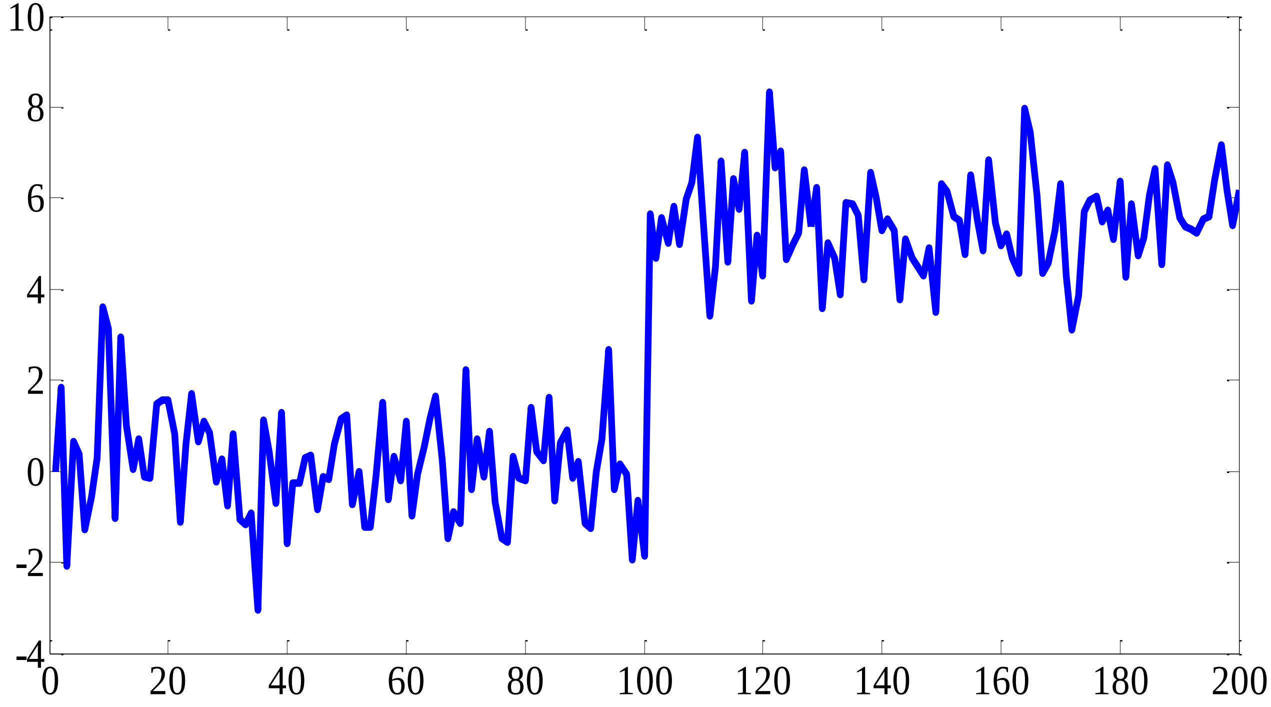
$$\frac{c_s}{1-\phi_{1s}} \quad , \quad \frac{\sigma_s^2}{1-\phi_{1s}^2} \quad , \quad s = 1, 2$$

である。定常平均が変化しているような場合は c が変化したと考えるのが妥当であろうし、定常分散が変化しているような場合は σ^2 が変化していると考えるのが妥当であろう(また ϕ_1が変化すると両方変化する事に注意)。

状態変化を伴うモデル

(c のみが変化したモデル)

以下は $s_t = t$, $a = 100$, $\boxed{c_1 = 0,\ c_2 = 5,}$ $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$,
$\phi_{11} = \phi_{12} = 0.1$ としたモデルである。

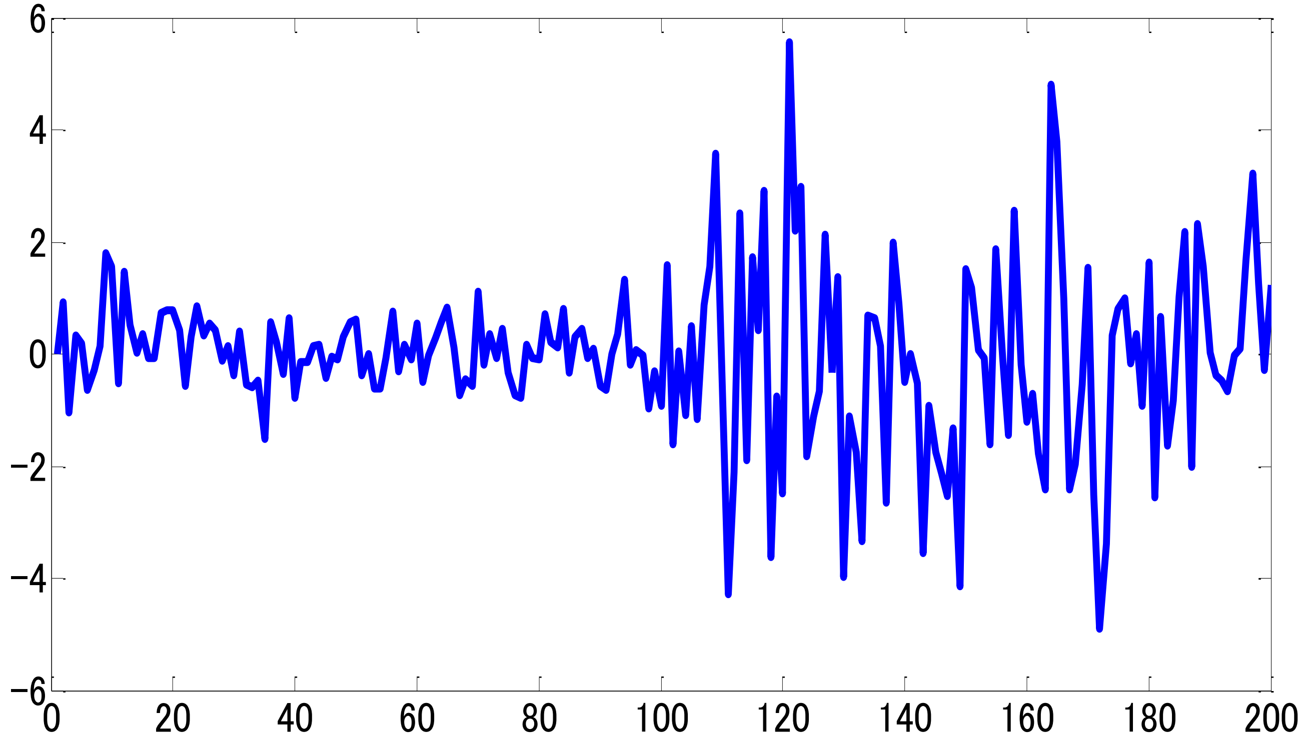


状態変化を伴うモデル

(σ のみが変化したモデル)

以下は $s_t = t,\ a = 100, c_1 = c_2 = 0, \boxed{\sigma_1 = 0.5, \sigma_2 = 2}$

$\phi_{11} = \phi_{12} = 0.1$ としたモデルである。

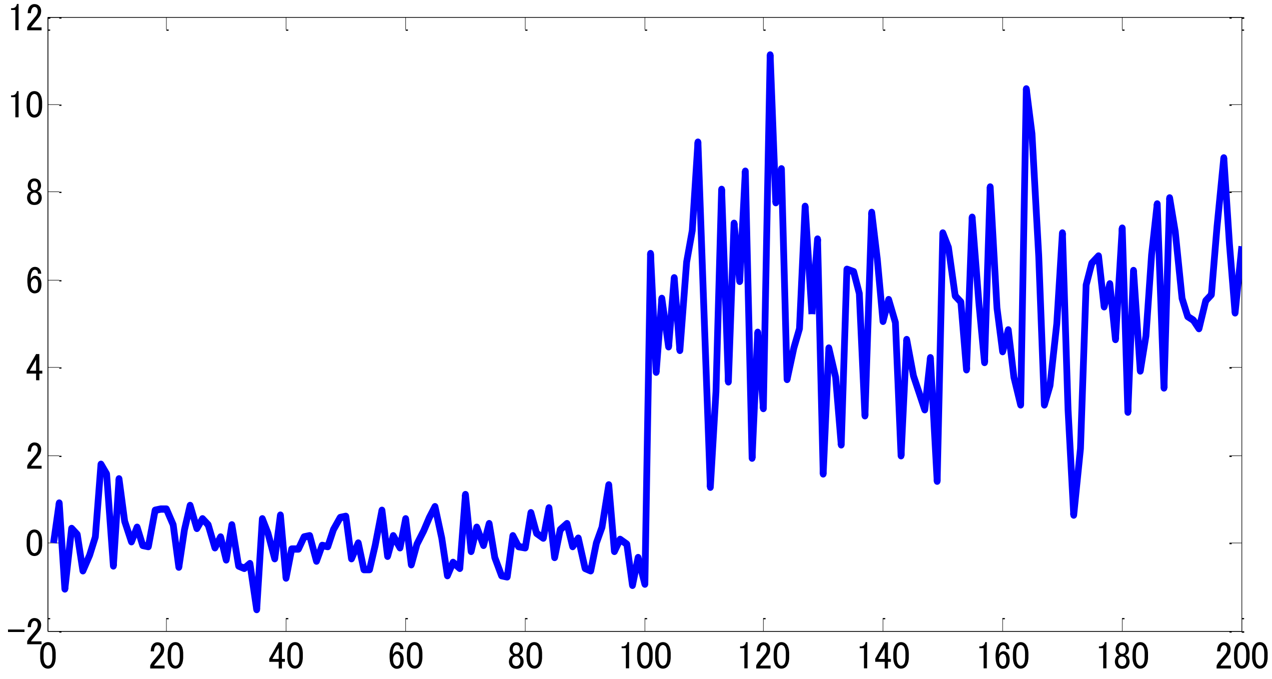


状態変化を伴うモデル

(c と σ の両方が変化したモデル)

以下は $s_t = t,\ a = 100,$ $\boxed{c_1 = 0,\ c_2 = 5,\ \sigma_1 = 0.5,\ \sigma_2 = 2}$

$\phi_{11} = \phi_{12} = 0.1$ としたモデルである。

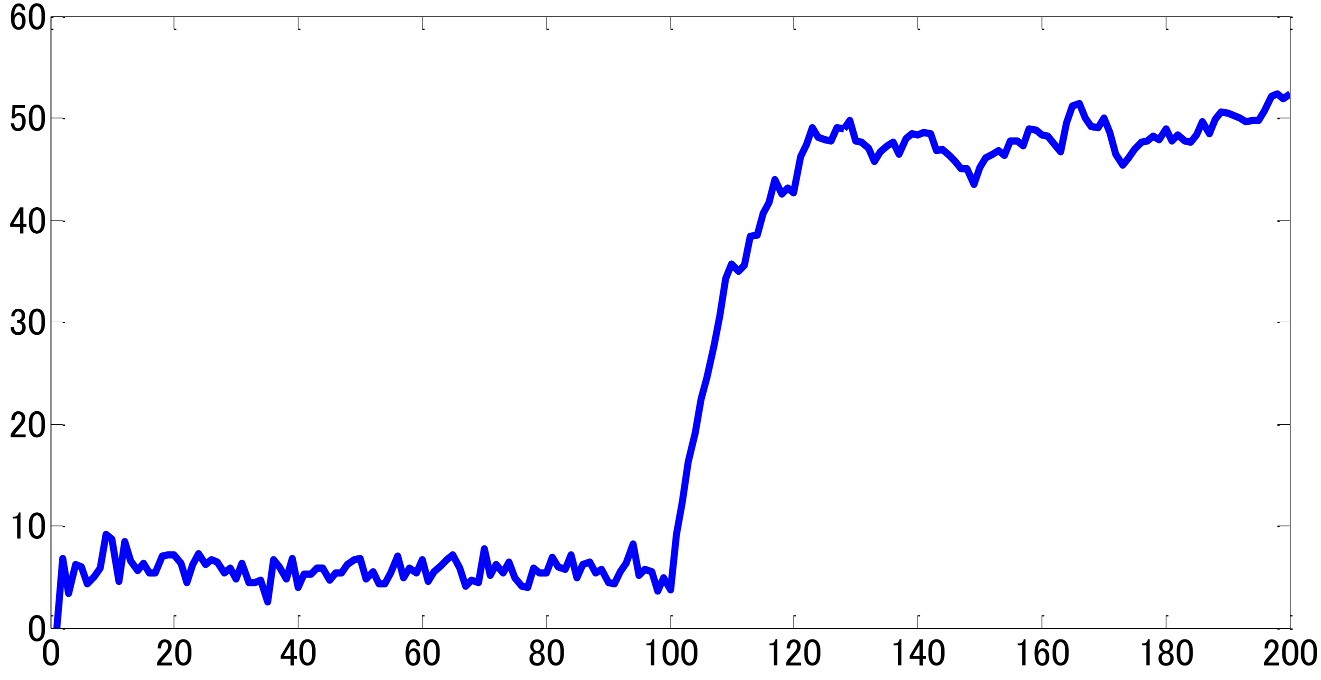


状態変化を伴うモデル

(ϕ_1 が変化したモデル)

以下は $s_t = t$, $a = 100$, $c_1 = c_2 = 5$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$,

$\boxed{\phi_{11} = 0.1, \phi_{12} = 0.9}$ としたモデルである。



状態変化を伴うモデル

最後の図は係数(のみ)が変化したモデルであるが、

この場合定常平均は $\dfrac{5}{1-0.1} \approx 5.5 \rightarrow \dfrac{5}{1-0.9} = 50$ に

定常分散は $\dfrac{1}{1-0.1^2} \approx 1.01 \rightarrow \dfrac{1}{1-0.9^2} \approx 5.3$

へと変化している。さらにAR(1)モデルの k 次の自己相関 ρ_kが $\rho_k = \phi_1^k$ である事に注意すると、このモデルは t = 100の前後で**自己相関の構造**も変化している事になる。

状態変化を伴うモデル

- 複数の状態を考えるとき

閾値モデルにおいて状態が複数あるようにするには、例えば状態変数 s_t と $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{S-1}$ に対して

$$
\begin{aligned}
s_t &< a_1 \quad \rightarrow \quad \text{「状態1」} \\
a_1 \le s_t &< a_2 \quad \rightarrow \quad \text{「状態2」} \\
a_2 \le s_t &< a_3 \quad \rightarrow \quad \text{「状態3」} \\
&\vdots \\
a_{S-2} \le s_t &< a_{S-1} \quad \rightarrow \text{「状態}S-1\text{」} \\
a_{S-1} \le s_t &
\end{aligned}
$$

のようにすればよい。

状態変化を伴うモデル

- 閾値モデルの推定

閾値モデルの推定は最尤推定法を用いて行うが、これは $a_1,\ldots,a_{S-1}$ がわかっていればそれほど難しくない。なぜなら $a_1, \ldots, a_{S-1}$ がわかっていれば、s_t が観測可能なため、y_t がどの状態から観測されたかがわかるためである(演習問題2参照)。

しかしながら $a_1,\ldots,a_{S-1}$が既知ではなく、これらも推定しなければならない時は、若干難しくなる。これについては(沖本先生の)教科書を参照のこと。

状態変化を伴うモデル

- 平滑(へいかつ)推移 (smooth transition; ST) モデル

閾値モデルの1 つの問題点は、状態の変化に伴いパラメーターの値が**離散的に**変化する事である。しかしながら、状態が変化した時、一気にパラメーターの値が変化するのではなく、**徐々に**変化すると考えるのがより自然な場合が多いであろう。

平滑推移(ST)モデル とは状態変化に伴い、パラメーターの値が緩やかに次の状態の値へと移行していくようなモデルである。

状態変化を伴うモデル

- 平滑(へいかつ)推移 (smooth transition; ST) モデル

例として、**2状態平滑推移AR(STAR)モデル**を考える。

説明の簡単化のためにここでは定数項がないAR(1)モデルにおいて、係数のみが状態に応じて変化するモデルを考える(誤差項の分散は一定)。

状態変化を伴うモデル

- 平滑(へいかつ)推移 (smooth transition; ST) モデル

2状態STAR(1)モデルは以下のようなモデルである。

$$y_t = [\phi_{11}(1 - G(s_t)) + \phi_{12}G(s_t)]\, y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0, \sigma^2)$$

ここで $G(.)$ は**推移関数**と呼ばれる。

上の定式化より明らかなように 係数は ϕ_{11} と ϕ_{12} の値を $1 - G(s_t)$ と $G(s_t)$ で重みを付けた加重平均になっており、(以下の例のように$G(s_t)$ の値が 0 以上 1 以下であれば) 係数はϕ_{11}とϕ_{12} の間の数になる。

状態変化を伴うモデル

- 平滑(へいかつ)推移 (smooth transition; ST) モデル

推移関数としてよく用いられるのは以下の**ロジスティック型関数**でありこの時 STAR モデルは ロジスティック (Logistic) STAR (LSTAR) モデルと呼ばれる。

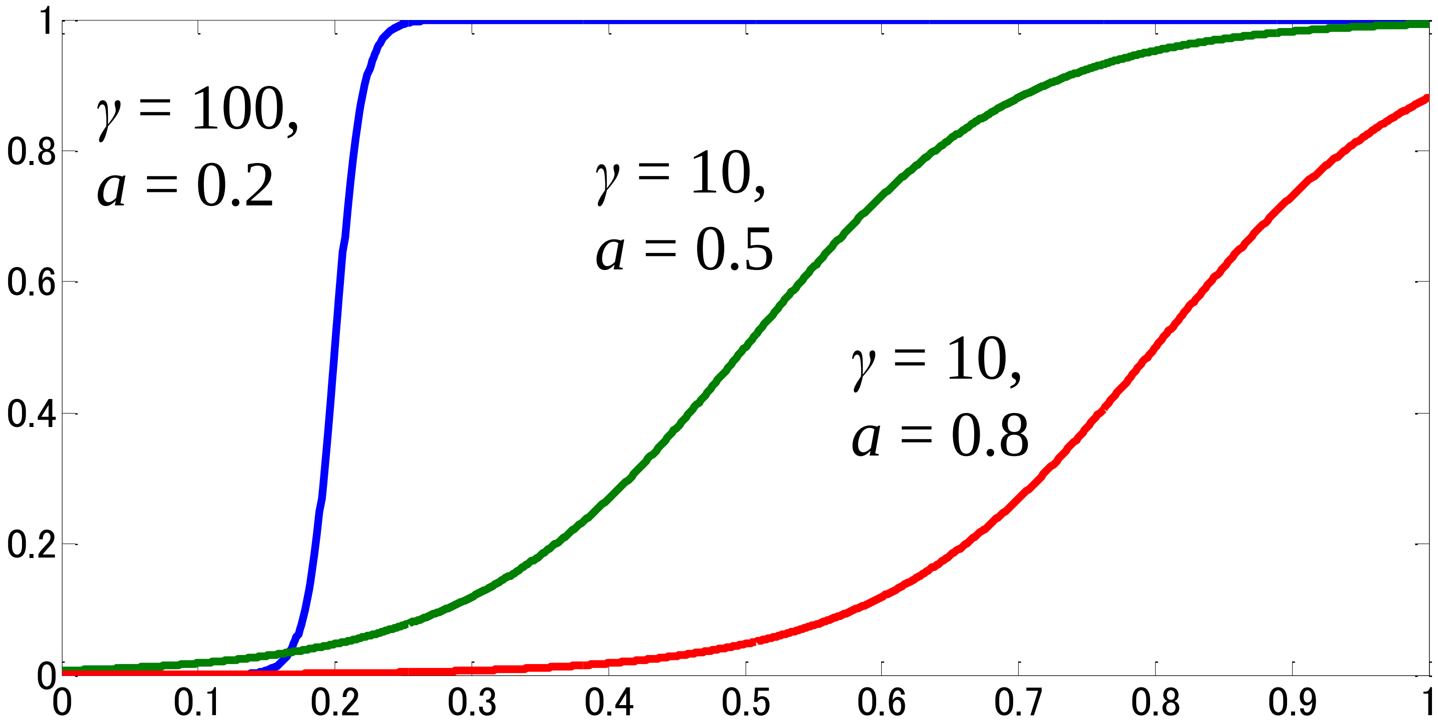
$$G(s_t;\gamma,a)=\frac{1}{1+\exp(-\gamma(s_t-a))},\quad \gamma>0$$

ここで γ と a はある定数である。

以下、このモデルの特徴を見ていく。

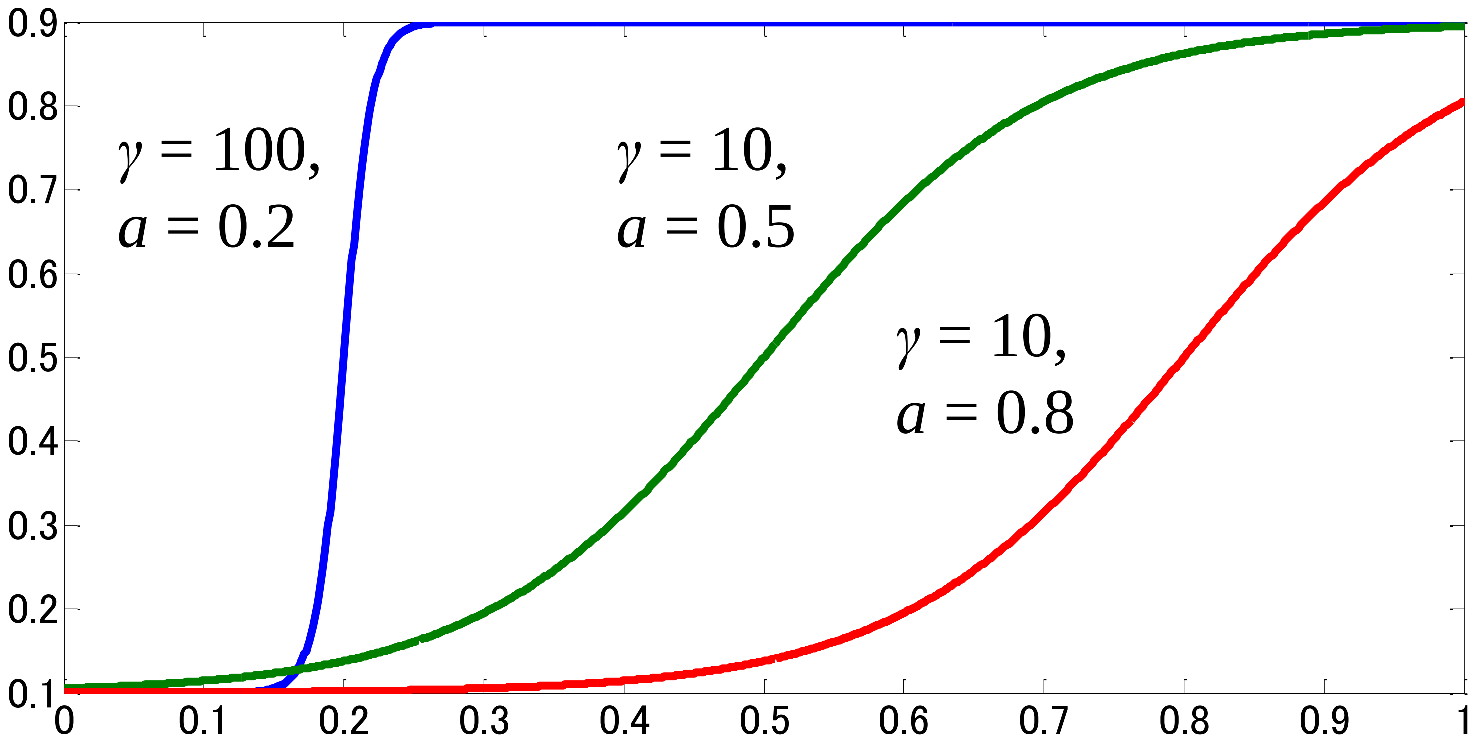
状態変化を伴うモデル

以下の図は γ と a のいくつかの値に対する G(.; γ, a)の形状である (横軸が s_t, 縦軸が $G(s_t\,; \gamma, a)$ の値)。



状態変化を伴うモデル

以下の図はy_{t-1}の係数 $\phi_1 = [\phi_{11}(1 - G(s_t)) + \phi_{12}G(s_t)]$と状態変数 s_t とのグラフである(横軸がs_t, 縦軸がϕ_1の値)。ここで$\phi_{11} = 0.1$, $\phi_{12} = 0.9$ としてある。



状態変化を伴うモデル

- 平滑(へいかつ)推移 (smooth transition; ST) モデル

図より、LSTAR モデルにおいて γ が大きくなると 推移関数の傾斜が大きくなる、つまり**状態が移行するスピードが速くなる**。またa はどのあたりが状態変化の中心となるかを決めるパラメータである事がわかる。

また γ が 0 であれば、$G(s_t, \gamma, a) = 0.5$ となるので ϕ_1 は $\phi_1 = \frac{1}{2}\phi_{11} + \frac{1}{2}\phi_{12}$ という一定の値を取り(つまり状態変化はない)、逆に $\gamma \to \infty$ になるにつれ、$G(s_t, \gamma, a)$ の傾きがほぼ直角になってくるから a の前後で急激に値が変わるようになる(これは TARモデルと同じ)

状態変化を伴うモデル

- 複数の状態を考えるとき

LSTARモデルにおいて状態が複数あるようにするのは概念的には簡単である。例えば状態を 3 つにしたい場合は

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t,\quad \phi_1 = [\,\phi_{11} - (\phi_{12} - \phi_{11})G(s_t;\gamma_1, a_1) + (\phi_{13} - \phi_{12})G(s_t;\gamma_2, a_2)\,],$$

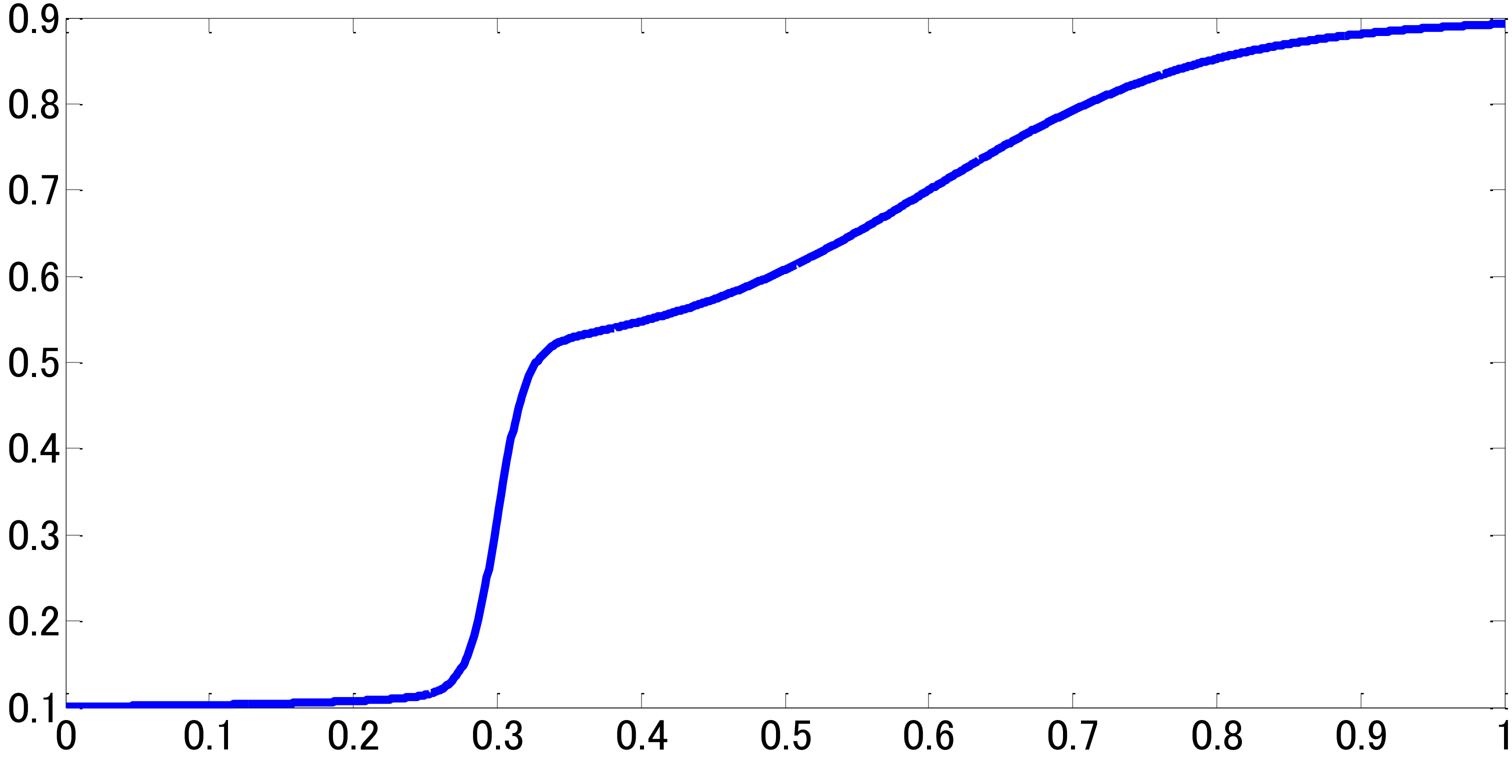
のようにすればよい。ここで $a_1 < a_2$である。以下は

$$\phi_{11} = 0.1,\ \phi_{12} = 0.5,\ \phi_{13} = 0.9,$$
$$\gamma_1 = 100,\ \ \gamma_2 = 10,\ \ a_1 = 0.3,\ \ a_2 = 0.6,$$

とした時の s_t と ϕ_1 のグラフである。

状態変化を伴うモデル

(横軸がs_t, 縦軸がϕ_1の値)



演習問題

問題 1　2状態TARモデル

$$y_t = \begin{cases} c_1 + \phi_1 y_{t-1} + \sigma_1 \varepsilon_t, & s_t < c \\ c_2 + \phi_2 y_{t-1} + \sigma_2 \varepsilon_t, & s_t \geq c \end{cases}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\ (0,\ 1),$$

において y_t が定常であるとわかっている時の y_t の定常平均の値を求めなさい。ただし、状態変数 s_t も定常であり、誤差項 ε_s と全ての t と s について独立で、$\Pr(s_t < c) = p$ であるとする。

演習問題

問題 2　2状態TARモデル

$$y_t = \begin{cases} \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, & s_t < c \\ \phi_2 y_{t-1} + \varepsilon_t, & s_t \geq c \end{cases}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid } N(0, 1),$$

において $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $y_3 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = -1$, $c = 0$ の時、未知パラメーター ϕ_{11} と ϕ_{12} を(y_1 で条件付けした)条件付き最尤法で推定する時の対数尤度関数を求めなさい。