練習問題 4 解答

(1)

(i) 7.5

帰無仮説 $H_0: \beta = \beta_0$ を検定するための t 検定統計量は

$$t_\beta = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\sqrt{\hat{\sigma}_\beta^2}}$$

であるここで $\hat{\beta}$ は β の最小二乗推定量、$\sqrt{\hat{\sigma}_\beta^2}$ は標準誤差(の推定値)である。今、$\beta_0 = 0$, $\hat{\beta} = 1.5$, $\sqrt{\hat{\sigma}_\beta^2} = 0.2$ であるので t 値(t 検定統計量の実現値)は $t_\beta = 1.5/0.2 = 7.5$ である。

(ii) 棄却する

この回帰モデルには定数項が存在し、定数項以外の説明変数の数が 1 つなので、t 検定統計量は自由度 $n-2$ の t 分布に従う。今 $n = 25$ なので $t_\beta \sim t\,(23)$ である。有意水準 1%で検定するという事は、分布表より、$|\,t_\beta\,| > 2.807$ であれば棄却するという事になるので、この場合帰無仮説は棄却となる。

(iii) 棄却できない

この場合の t 値は

$$t_\beta = \frac{1.5 - 1.7}{0.2} = -1$$

となるので、帰無仮説は棄却できない(採択する)となる。

(iv) 棄却できない

P 値が 0.06 という事は t 検定統計量の絶対値が t 値の絶対値よりも大きい値を取る確率が 6%という事であるので、5%有意水準で検定すると棄却できないという事になる。

(2)

(i) $(\hat{\beta},\ \hat{\gamma}) = (0.6,\ 0.5)$

残差平方和は $SSR = \sum_{i=1}^{3}(Y_i - \beta X_i - \gamma Z_i)^2$ である。最小化のための 1 階の条件より

$$\frac{\partial SSR}{\partial \beta} = -2\sum_{i=1}^{3} X_i(Y_i - \beta X_i - \gamma Z_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{3} X_i Y_i - \beta \sum_{i=1}^{3} X_i^2 - \gamma \sum_{i=1}^{3} X_i Z_i = 0$$

および

$$\frac{\partial SSR}{\partial \gamma} = -2\sum_{i=1}^{3} Z_i(Y_i - \beta X_i - \gamma Z_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{3} Z_i Y_i - \beta \sum_{i=1}^{3} Z_i X_i - \gamma \sum_{i=1}^{3} Z_i^2 = 0$$

をえる。これらの式に観測値を代入すると

$$3-5\beta=0 \quad と \quad 3-6\gamma=0$$

を得る。これらを解いて

$$\hat{\beta}=\frac{3}{5}=0.6 \quad と \quad \hat{\gamma}=\frac{3}{6}=0.5$$

を得る。

(ii) (h)

帰無仮説 $\beta=2\gamma$ をこの回帰モデルに代入すると

$$\begin{aligned} Y_i &= 2\gamma X_i + \gamma Z_i + u_i \\ &= \gamma(2X_i + Z_i) + u_i \\ &= \gamma W_i + u_i, \end{aligned}$$

ここで $W_i = 2X_i + Z_i$ 。よって答えは(h)となる。

(iii) 棄却できない

帰無仮説のものでの制約条件の数をq、定数項を除いた説明変数の数をKとすると、定数項が**ない**回帰モデルに対してF統計量は、

$$F=\frac{(SSR_R - SSR_{UR})/q}{SSR_{UR}/(n-K)}$$

と計算され、帰無仮説の下でこの F 統計量は自由度 $(q, n-K)$ のF分布に従う(ところで、定数項が**ある**回帰モデルの場合、F 統計量は

$$F=\frac{(SSR_R - SSR_{UR})/q}{SSR_{UR}/(n-K\mathbf{-1})}$$

と定義され、自由度$(q, n-K\mathbf{-1})$ のF分布に従う事に注意。定数項があるかないかで第2自由度の部分が異なる(ちなみに t 検定の場合も、帰無仮説のもとで t 統計量が従う t 分布の自由度は、定数項があるときは $n-K-1$ だがないときは $n-K$ になる)。

今、$q=2, n=25, K=2$ であるので F 統計量は 自由度(2, 23)のF分布に従う。F値が3.4であるが、これと自由度(2, 23)のF分布の5%点である 3.42 と比べると後者の方が大きい。よって有意水準5%では棄却できないとなる。

(iv) 238.4

上記の解説にあるようにこの場合 F 値は

$$F=\frac{(SSR_R - SSR_{UR})/q}{SSR_{UR}/(n-K)}$$

によって計算されるので。今回の場合

$$3.4=\frac{(SSR_R-184)/2}{184/23} \quad \Leftrightarrow \quad SSR_R = 54.4+184=238.4$$

となる。

(3)

(i) (e)

(ii) (d)

男性の労働者の賃金関数を $\alpha, \alpha_M, \beta, \beta_M$ を用いて表すと:

$$Y_i = \alpha + \alpha_M + (\beta + \beta_M)\, X_i + \varepsilon_i$$

であり、δ と γ を用いて表すと:

$$Y_i = \delta + \gamma\, X_i + \varepsilon_i$$

である。これらを比べて

$$\delta = \alpha + \alpha_M \quad \text{と} \quad \gamma = \beta + \beta_M.$$

を得る。同様に、女性の労働者の場合を考えると

$$\alpha = \delta + \delta_F\,, \text{ と } \quad \beta = \gamma + \gamma_F.$$

をえる。後者の 2 つを前者の 2 つに代入すると

$$\delta = \delta + \delta_F + \alpha_M \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_M = -\,\delta_F$$

と

$$\gamma = \gamma + \gamma_F + \beta_M \;\; \Leftrightarrow \beta_M = -\,\gamma_F.$$

を得る。