

#### 練習問題 4

(1) 以下の回帰モデルを考えよう

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i, \quad i=1, \dots, n, \quad u_i \sim \text{i.i.d.} N(0, \sigma^2)$$

このモデルについて以下の(i) – (iv) に答えなさい。ここで  $X_i$  は確率変数ではないとする。

- (i) 今、 $n = 25$  であるとする。この時、これら 25 個の観測値からの  $\beta$  の最小二乗推定値が 1.5、標準誤差の推定値が 0.2 であったとする。この時、帰無仮説  $H_0: \beta = 0$  を検定する  $t$  検定統計量の値を求めなさい。
- (ii) (i) で求めた  $t$  検定統計量の値を用いて、 $H_0: \beta = 0$  を有意水準 1% で検定しなさい。結果はどうなるか?
- (iii) (i) と同じ状況(同じ推定値、同じ標準誤差)において 帰無仮説  $H_0: \beta = 1.7$  を  $t$  検定によって検定しなさい。結果はどうなるか?
- (iv) ある帰無仮説に対して  $t$  検定統計量の P 値が 0.06 であった。この  $t$  値を用いて有意水準 5% でこの帰無仮説を検定した時の結果はどうなるか?

(2) 以下の回帰モデルを考えよう

$$Y_i = \beta X_i + \gamma Z_i + u_i, \quad i=1, \dots, n, \quad u_i \sim \text{i.i.d.} N(0, \sigma^2),$$

このモデルについて以下の(i) – (iv) に答えなさい。ここで  $X_i$  は確率変数ではないとする。

- (i)  $Y_i, X_i, Z_i$  の観測値として  $Y_1 = 2, Y_2 = -1, Y_3 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 0, Z_1 = 1, Z_2 = -2, Z_3 = -1$  を得たとする。この時、 $\beta$  と  $\gamma$  の最小二乗推定値  $\hat{\beta}$  と  $\hat{\gamma}$  を求めなさい。
- (ii) 帰無仮説  $H_0: \beta = 2\gamma$  を  $F$  検定によって検定したいとする。この時この制約のもとでの回帰モデルの残差平方和を計算するにはどのような回帰モデルを推定すればよいか? 以下より正しいものを答えなさい。
- (a)  $Y_i = \gamma X_i + u_i$ , (b)  $Y_i = \gamma Z_i + u_i$ , (c)  $Y_i = \delta + \gamma X_i + u_i$ , (d)  $Y_i = \delta + \gamma Z_i + u_i$ ,  
 (e)  $Z_i = \gamma X_i + u_i$ , (f)  $Y_i = \delta + \gamma X_i + u_i$ , (g)  $Y_i = \delta + \gamma W_i + u_i$ , (h)  $Y_i = \gamma W_i + u_i$ ,  
 (i)  $X_i = \gamma W_i + u_i$ , (j) (a) ~ (i) は全て正しくない。
- ここで  $W_i = 2X_i + Z_i$  とする。
- (iii)  $n = 25$  の観測値が得られたとする。帰無仮説  $H_0: \beta = \gamma = 0$  に対する  $F$  値は 3.4 であった。この帰無仮説を有意水準 5% で  $F$  検定した場合、検定結果はどのようになるか答えなさい。
- (iv) (iii) の  $F$  値を計算する際に使用した無制約の回帰モデルの残差平方和は 184 であった。この時、制約付の回帰モデルの方の残差平方和を求めなさい。

(3)  $Y_i$  を  $i$  番目の労働者の賃金の対数値、 $X_i$  を  $i$  番目の労働者の就業年数としよう。今、 $X_i, Y_i, i=1, \dots, n$  が観測されたとする。 $Y_i$  はもし  $i$  番目の労働者が女性なら  $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ , 男性なら  $Y_i = \alpha + \alpha_M + (\beta + \beta_M)X_i + u_i$  によって決定されるとする。 $D_i$  を  $i$  番目の労働者が男性なら 1、女性なら 0 を取るダミー変数としよう。

(i) この時、 $D_i$  を用いて上記の 2 つの回帰モデルを一つの回帰モデルで表したものとして、正しいものを以下より選びなさい。

(a)  $Y_i = \alpha_M D_i + \beta_M D_i X_i$ , (b)  $Y_i = \alpha D_i + \beta D_i X_i + u_i$ , (c)  $Y_i = \alpha D_i + \alpha_M + u_i$

(d)  $Y_i = \beta D_i X_i + \beta_M X_i + u_i$ , (e)  $Y_i = \alpha + \alpha_M D_i + \beta X_i + \beta_M D_i X_i + u_i$ ,

(f)  $Y_i = \alpha D_i + \alpha_M + \beta D_i X_i + \beta_M X_i + u_i$ , (g)  $Y_i = \alpha_M X_i + \beta_M D_i X_i + u_i$ ,

(h)  $Y_i = \alpha_M + \alpha X_i + u_i$ , (i)  $Y_i = \beta + \beta_M D_i X_i + u_i$ , (j) (a) ~ (i) は全て正しくない。

(ii)  $F_i$  を  $i$  番目の労働者が女性なら 1 男性なら 0 を取るダミー変数としよう。(i)における男性と女性の2つの回帰モデルが  $Y_i = \delta + \delta_F F_i + \gamma X_i + \gamma_F F_i X_i + u_i$  と1つの回帰モデルで表せたとして。この時、 $\delta_F$ ,  $\gamma_F$ ,  $\alpha_M$ , および  $\beta_M$  の間にはどのような関係があるか?正しいものを以下より選びなさい。

(a)  $\alpha_M = \delta_F$ ,  $\beta_M = \gamma_F$ , (b)  $\alpha_M = \delta_F$ ,  $\beta_M = -\gamma_F$ , (d)  $\alpha_M = -\delta_F$ ,  $\beta_M = \gamma_F$ ,

(d)  $\alpha_M = -\delta_F$ ,  $\beta_M = -\gamma_F$ , (e)  $\alpha_M = -\gamma_F$ ,  $\beta_M = -\delta_F$ , (f)  $\alpha_M = \delta_F - \gamma_F$ ,  $\beta_M = \gamma_F - \delta_F$ ,

(g)  $\alpha_M \beta_M = \delta_F + \gamma_F$ , (h)  $\alpha_M \beta_M = \delta_F - \gamma_F$ , (i)  $\alpha_M / \beta_M = \delta_F - \gamma_F$ ,

(j) (a) ~ (i) は全て正しくない。