

練習問題 3

(1) 正規母集団から無作為に取り出した 5 個のデータの標本標準偏差は 10 でした。この時、母分散 σ^2 の 95%信頼区間を求めなさい。

(2) 個人投資家が、ある株式の真の収益率 μ の 95%信頼区間を知りたいとします(収益率は確率変数であり、真の収益率 μ とはその確率変数の期待値の事であるとする)。株式の収益率は正規分布に従うとします。無作為に選ばれた 16 日について、日次の収益率を調べたところ、収益率の標本平均は 0.1、標本標準偏差は 0.2 でした。 μ の 95%信頼区間を求めなさい。

(3) 回帰モデル: $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$, $i=1, \dots, n$, $\varepsilon_i \sim \text{i.i.d.}$, $E(\varepsilon_i) = 0$, $\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ を考える。ここで X_i は確率変数ではないとする。この回帰モデルにより回帰分析を行うとする。 $n=3$ の時、観測値 $Y_1 = 2, Y_2 = -5, Y_3 = 0, X_1 = 1, X_2 = -2, X_3 = 1$ が与えられたとする。この時、

(i) α と β の最小二乗推定値 $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ を求めなさい。

(ii) この回帰分析の R^2 の値を求めなさい。

(4) 回帰モデル: $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$, $i=1, \dots, n$, $\varepsilon_i \sim \text{i.i.d.}$, $E(\varepsilon_i) = 0$, $\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ を考える。ここで X_i は確率変数ではないとする。この回帰モデルの α と β の最小二乗推定値を $\hat{\alpha}$ および $\hat{\beta}$ とする。

(i) Y_i と X_i の間には $Y_i = 0.5 - 2X_i$ という線形の関係があるとしよう。この時、この回帰モデルの R^2 の値はいくつになるか?

(ii) $\hat{\beta} = 0$ であったとする。この時、この回帰モデルの R^2 の値はいくつか?

(iii) この回帰モデルからの残差平方和は $SSR = 120$ であったとしよう(つまり

$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2 = 120$ であるという事)。さらに $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = 150$ であるとする。

ここで \bar{Y} は Y_i の平均である。この時、この回帰モデルの R^2 の値はいくつか?

(5) 回帰モデル: $Y_i = \beta X_i + \varepsilon_i$, $i=1, \dots, n$, $\varepsilon_i \sim \text{i.i.d.}$, $E(\varepsilon_i) = 0$, $\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, を考える。

(定数項がないことに注意。つまり推定するパラメータは β のみである)。ここで X_i は確率変数ではないとする。

(i) 観測値 $Y_1 = 5, Y_2 = -5, Y_3 = 2, X_1 = 3, X_2 = -1, X_3 = 0$ が得られたとする。この時この回帰モデルの β の最小二乗推定値 $\hat{\beta}$ はいくつか?

(ii) 最小二乗推定値の下での残差平方和の値はいくつになるか?

(6) 回帰モデル: $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$, $i=1, \dots, n$, $\varepsilon_i \sim \text{i.i.d.}$, $E(\varepsilon_i) = 0$, $\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ を考える。ここで X_i は確率変数ではないとする。この回帰モデルの α と β の最小二乗推定値を $\hat{\alpha}$ および $\hat{\beta}$ とする。

(i) Y_i の標本平均が 5、 X_i の標本平均が 10、 Y_i と X_i の標本共分散が 20、 Y_i の標本分散が 16、 X_i の標本分散が 100 であったとする。この時、 $\hat{\alpha}$ の値はいくつになるか?

- (ii) 問題(i)と同じ状況を考える。この時、この回帰モデルの決定係数 R^2 の値はいくつになるか?
(iii) Y_i の標本分散が10、 X_i の標本分散が2、 $R^2 = 0.8$ の時、 $\hat{\beta}^2$ の値はいくつか?

(7) 以下の回帰モデルを考えよう

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i, \quad i=1, \dots, n, \quad u_i \sim \text{i.i.d.} N(0, \sigma^2)$$

について以下の(i) – (iv) に答えなさい。ここで X_i は確率変数ではないとする。

- (i) 今、 $n = 25$ であるとする。この時、これら 25 個の観測値からの β の最小二乗推定値が 1.5、標準誤差の推定値が 0.2 であったとする。この時、帰無仮説 $H_0: \beta = 0$ を検定する t 検定統計量の値を求めなさい。
- (ii) (i)で求めた t 検定統計量の値を用いて、 $H_0: \beta = 0$ を有意水準 1%で両側検定しなさい。結果はどうなるか?
- (iii) (i)と同じ状況(同じ推定値、同じ標準誤差)において 帰無仮説 $H_0: \beta = 1.7$ を t 検定によって有意水準 1%で両側検定しなさい。結果はどうなるか?