## 練習問題2

(1) 確率変数 $X$ は平均 2、分散 4 の正規分布に従うとする。$X$ が区間 $[-2, 2]$ に入る確率 $\Pr(-2 \le X \le 2)$に最も近いものを以下より選びなさい。

(A) 0.076, (B) 0.121, (C) 0.218, (D) 0.299, (E) 0.343,
(F) 0.477, (G) 0.549, (H) 0.653, (I) 0.724, ( J) 0.873,

(2) 確率変数 $X$ は確率 $p$ で $X=1$, 確率 $1-p$ で $X=0$ をとるベルヌーイ確率変数だとする。大きさ $n=50$ の i.i.d.標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ において 0 は 10 個、1 は 40 個観測されたとしよう。この時 $p$ の標本平均として正しいものを以下より選びなさい。

(A) 0.1, (B) 0.2, (C) 0.3, (D) 0.4, (E) 0.5, (F) 0.6,
(G) 0.7, (H) 0.8, (I) 0.9, ( J) (A) – (I)のどれでもない。

(3) 確率変数 $X$ と $Y$ はそれぞれ独立で $X \sim N(0, 1), Y \sim N(1, 4)$であるとする。確率変数 $Z$ を $Z = 3X + 2Y$ で定義すると $X$ と $Z$ の相関係数はいくつになるか? 以下より選びなさい。

(A) 0.0, (B) 0.2, (C) 0.3, (D) 0.4, (E) 0.5, (F) 0.6,
(G) 0.64, (H) 0.8, (I) 1.0, ( J ) (A) – (I) のどれでもない

(4) 確率変数 $X$ は平均 2、分散 16 の正規分布に従うとする。 $\Pr(X \le c) = 0.75$ となるような $c$ の値に最も近いものを以下より1つ選びなさい。

(A) 0.0001, (B) 0.003, (C) 0.09, (D) 0.28, (E) 0.81,
(F) 1.41, (G) 2.51, (H) 3.35, (I) 4.7, (J ) 5.87,

(5) $Y \sim U(0, 1)$ とする。$\Pr(3Y + 2 \le 3)$ となる確率を求めなさい。

(6) 確率変数 $X$ と $Y$ は独立で、$X \sim N(1, 3)$, $Y \sim N(2, 1)$ とする。この時 $Z = X + Y$ の分布はどのようになるか? 以下より正しいものを一つ選びなさい。

(A) $N(0, 1)$, (B) $N(3, 4)$, (C) $N(12, 8)$, (D) $U(0, 1)$, (E) $U(2, 3)$, (F) $U(12, 8)$,
(G) $B(2, 0.5)$, (H) $B(3, 0.6)$, (I) $B(5, 0.7)$ (J) (A) – (I) のどれでもない。

(7) $X \sim U(0, 2)$ とする。この時 $\mathrm{var}(X)$ の値を求めなさい。

(8) $X \sim U(0, 1)$ とする。$Y = -\log X$ と定義する。この時 $Y$ の密度関数を求めなさい。

次の問題文に関して問題(9) – (10)に答えなさい。
$X_i, i = 1, \ldots, n$ は大きさ $n$ の i.i.d.標本であるとする。$E(X_i) = \mu$ および $\mathrm{var}(X_i) = \sigma^2$ であるとする。

(9) この時 $\sigma^2$ の推定量として $\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ を用いた場合のバイアスはいくつになるか?

(10) この時 $\sigma^2$ の推定量として $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2}$ を用いた場合のバイアスはいくつになるか?

(11) 確率変数 $X$ を $U(0, 1)$ からの大きさ 3 のi.i.d.標本の最大値とする。$X$ の密度関数を求めなさい。

(12) 問題 (11) の $X$ の期待値 $E(X)$ を求めなさい。

(13) ある検定統計量 $T_n$ を用いてある帰無仮説を検定する事を考える。$T_n$ は常に 0 以上の値をとるとする。この検定統計量は帰無仮説のもとで密度関数 $f(t) = \exp(-t)\ (t > 0)$ を持つ連続型の分布に従うとする。$T_n$ の値が $\log(25)$ 以上である時に帰無仮説を棄却するとすると、**有意水準**は何%になるか?

(14) ある新聞社が内閣支持率の調査を行ったところ、無作為に選んだ $n = 2500$人の回答者のうち1250人が支持すると回答した。$X_i$ を $i$ 番目の有権者が支持するなら $X_i = 1$, 支持しないなら $X_i = 0$ をとる確率変数とする。この時、真の支持率 $p$ は$E(X_i)$ で与えられるとする。$X_i$ の標本平均を $\hat{p}_n$ とする。この標本平均と中心極限定理を利用して真の支持率 $p$ の95%信頼区間を推定しなさい。その上限の値はいくつになるか? $X_i$ の標準偏差の推定量として $\hat{\sigma}_n = \sqrt{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}$ を用いるとする。

(15) 再び問題(14)の状況を考える。ただし調査対象は2400人とし、そのうち1380人が支持をしたものとする。真の支持率 $p$ について帰無仮説 $\mathrm{H}_0$: $p = 0.6$ を対立仮説、$\mathrm{H}_1$: $p \neq 0.6$ に対して5%および1%有意水準で検定しなさい。検定統計量として

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}(\hat{p}_n - p_0)}{\sigma}, \quad \sigma = \sqrt{p_0(1-p_0)}$$

を用いなさい。ここで $n$ は標本数、$p_0$ は帰無仮説の下での $p$ の値とする。

(16) 再び問題(15)の状況を考える。真の支持率 $p$ について帰無仮説 $\mathrm{H}_0$: $p = 0.6$ を対立仮説 $\mathrm{H}_1$: $p < 0.6$ に対して5%および1%有意水準検定しなさい。検定統計量は(15)の時と同様 $Z_n$ とする。

(17) ある新薬を 100 人の患者に投与したところ、投与後の患者の腫瘍の大きさの変化の標本平均 $\overline{X}$ は $\overline{X} = -1.4$(mm)であった。またその標本分散は $s^2 = 100$ であった。この新薬による腫瘍の大きさの変化 (新薬の効果)の母平均 $\mu$ に対して、帰無仮説 $H_0$: $\mu = 0$ を対立仮説 $H_1$: $\mu \neq 0$ に対して、検定統計量:

$$Z_n = \frac{\sqrt{100}\ \overline{X}}{s}$$

を用いて有意水準 5%で検定した場合の検定結果はどのようになるか?