練習問題 1 解答

(答えに関して質問等ある場合は nagakura@z7.keio.jp まで連絡して下さい)

(1) **答え 0.3**

(2) **答え 0.9**

(3) **答え 1.7**

$$E(X) = 0 \times \Pr(X=0) + 1 \times \Pr(X=1) + 2 \times \Pr(X=2) + 3 \times \Pr(X=3) + 4 \times \Pr(X=4)$$
$$= 0 \times 0.2 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.1 = 1.7$$

(4) **答え 0**

$\bar{X} = (-3+2+5-4)/4 = 0$

(5) **答え 22**

$\bar{X} = (-2+1+6-5)/4 = 0$, 標本分散 $= [(-2)^2 + 1^2 + 6^2 + (-5)^2]/3 = 22$

(6) **答え 0.2**

確率の性質 $\Pr(E_1 \cup E_2) = \Pr(E_1) + \Pr(E_2) - \Pr(E_1 \cap E_2)$ より

$$\Pr(E_1 \cap E_2) = \Pr(E_1) + \Pr(E_2) - \Pr(E_1 \cup E_2)$$
$$= 0.4 + 0.3 - 0.5 = 0.2$$

となる。

(7) **答え 0.2**

標準化したデータのメディアンはメディアンを標準化したものに等しい。メディアンを標準化すると $(1.8 - 1.4)/2 = 0.2$ なので答えは 0.2 である。

(8) **答え 65**

偏差値は $50+10\dfrac{46-40}{4}=65$ である。

(9) **答え 55**

女子全員の点数の合計は

(クラス全員の点数の合計)−(男子全員の点数の合計)

$= 50 \times 16 - 45 \times 8 = 800 - 360 = 440$

である。よって女子の平均は

$440/8 = 55$ となる。

(10) **答え 10 人**

30 人の平均が 50 点なのでクラス全体の得点の和は

$$50 \times 30 = 1500$$

より 1500 点である。このクラスの女子の人数を x 人とすると、女子だけの得点の和は平均が 60 点なので $60x$ 点である。よって男子だけの平均は

$$\text{男子の平均点} = \frac{\text{男子だけの得点の総和}}{\text{男子の人数}} = \frac{1500 - 60x}{30 - x}$$

であるが、これが 45 点に等しいので

$$\frac{1500 - 60x}{30 - x} = 45 \Leftrightarrow 1500 - 60x = 1350 - 45x \Rightarrow x = 10$$

となる。

(11) **答え 0.2**

空欄をうめていくと

	Y=1	Y=2	Y=3	Y=4	X の周辺分布
X=1	**0.1**	0.2	★	0	0.5
X=2	**0.1**	0.1	0.2	0.1	**0.5**
Y の周辺分布	0.2	0.3	**0.4**	**0.1**	1

となる。よって★は 0.2 である。

(12) **答え 1.5**

$Y = 3$ という条件付期待値は

$$E(X \mid Y{=}3) = 1 \times \Pr(X = 1 \mid Y = 3) + 2 \times \Pr(X = 2 \mid Y = 3)$$
$$= 1 \times 0.5 + 2 \times 0.5 = 1.5$$ となる。

(13) **答え 13/16**

正答する回数を x 回とすると点数が 0 以上になるとは

$$3x - 2(5 - x) \geq 0$$

という事なのでこれを満たす x は $x \geq 2$ となる。つまり 2 回以上正答すれば点数は 0 以上となる。この確率は

$$\Pr(x \geq 2) = 1 - \Pr(x < 2)$$
$$= 1 - [\Pr(x = 0) + \Pr(x = 1)]$$ （x は離散型確率変数なので)
$$= 1 - \left[{}_5C_0\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + {}_5C_1\left(\tfrac{1}{2}\right)^1\left(\tfrac{1}{2}\right)^4\right]$$
$$= 1 - \left[\frac{5!}{0!\,5!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + \frac{5!}{1!\,4!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5\right]$$
$$= 1 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 - 6\frac{1}{32} = \frac{26}{32} = \frac{13}{16}$$

である。

(14) **答え 0.13**

少なくとも 1 匹生きているというのは 2 匹とも死ぬという事象の余事象なので

$$1 - 0.87 = 0.13$$

となる。

(15) **答え 0.93**

多くとも一匹生きているとは 2 匹とも死んでいるという事象とどちらかが死ぬという事象の和事象なので

0.87(両方死んでいる) + 0.03 (セミ 1 だけが生きている) + 0.03 (セミ 2 だけが生きている)=0.93

となる。もしくは多くとも 1 匹生きているとは 2 匹とも生きているという事象の余事象なので 1 – 0.07= 0.93 と考えてもよい。

(16) **答え 0.7**

$$\Pr(\text{セミ 2 が生} \mid \text{セミ 1 が生}) = \frac{\Pr(\text{セミ 1 が生かつセミ 2 が生})}{\Pr(\text{セミ 1 が生})} = \frac{0.07}{0.1} = 0.7$$

である。

(17) **答え 0.6**

X と Z の相関 corr(X, Z) は、まずcorr(X, Z) の定義より

$$\mathrm{corr}(X,Z) = \frac{\mathrm{cov}(X,Z)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Z)}}$$

である。右側の分子は、$Z = 3X + 2Y$, $\mathrm{var}(X) = 1$, であるので

$\mathrm{cov}(X, Z) = \mathrm{cov}(X, 3X + 2Y)$

$= \mathrm{cov}(X, 3X) + \mathrm{cov}(X, 2Y)$ (離散型確率変数宿題問題 1(2)の性質より)

$= 3\mathrm{cov}(X, X) + 2\mathrm{cov}(X, Y)$ (共分散の性質(4)より)

$= 3\mathrm{var}(X)$ ($\mathrm{cov}(X, X)= \mathrm{var}(X)$ および X と Y が独立なので共分散の性質(2)より $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$)

$= 3$ ($\mathrm{var}(X) = 1$ より)

また分母の方は

$\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Z)} = \sqrt{\mathrm{var}(Z)}$ ($\mathrm{var}(X) = 1$ より)

$= \sqrt{\mathrm{var}(3X + 2Y)}$ ($Z = 3X + 2Y$ より)

$= \sqrt{\mathrm{var}(3X) + \mathrm{var}(2Y) + 2\,\mathrm{cov}(3X, 2Y)}$ (共分散の性質(3)より)

$= \sqrt{9\,\mathrm{var}(X) + 4\,\mathrm{var}(Y) + 12\,\mathrm{cov}(X, Y)}$ (分散の性質(2), 共分散の性質(4)より

$= \sqrt{9 + 16}$ ($\mathrm{var}(X) = 1$, $\mathrm{var}(Y) = 4$ および X, Y 独立より $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ より)

$= \sqrt{25} = 5$

となる。よって

$$\mathrm{corr}(X,Z) = \frac{\mathrm{cov}(X,Z)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Z)}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

となる。よって答えは 0.6 である。

(18) **答え 27.5**

$E(W^2) = \mathrm{var}(W) + [E(W)]^2 = 10\times0.5\times0.5 + (10\times0.5)^2 = 2.5+25 = 27.5$ となる。