多変量GARCHモデル

担当：　長倉　大輔
（ながくらだいすけ）

多変量GARCHモデル

- 多変量GARCHモデル

一変量のGARCHモデルを多変量に拡張したものをいくつか紹介する。これによって、多数の変数の間のボラティリティの動的な依存関係を分析する事ができる。

多変量GARCHモデル

- 多変量GARCHモデル

$\mathbf{y}_t$ を n 変量変数とすると、n 変量GARCHモデルは一般的に

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t^{1/2}\mathbf{v}_t \ , \quad \mathbf{v}_t \sim \mathrm{iid}\ N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$$

という形で表現される。ここで $\mathbf{H}_t$ は $n\times n$ の対称行列、$\mathbf{I}_n$ は $n\times n$ の単位行列である。 $\mathbf{H}_t^{1/2}$ は 2回かけると $\mathbf{H}_t$ になるような行列、すなわち

$$\mathbf{H}_t^{1/2}\mathbf{H}_t^{1/2} = \mathbf{H}_t$$

を満たすような行列である。このような行列を**行列 $\mathbf{H}_t$ の平方根**という。$\mathbf{H}_t$ が対称行列であれば $\mathbf{H}_t^{1/2}$ も対称行列となる。

多変量GARCHモデル

- 多変量GARCHモデル

もし $\mathbf{H}_t$ が $t-1$ 時点までの変数だけに依存するとすると、それらを含む情報集合 Ω_{t-1} に対して、

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{y}_t \mid \Omega_{t-1}) &= E(\mathbf{H}_t^{1/2}\mathbf{v}_t \mid \Omega_{t-1}) \\
&= \mathbf{H}_t^{1/2} E(\mathbf{v}_t \mid \Omega_{t-1}) \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

であるので $\mathbf{y}_t$ の条件付き期待値は$\mathbf{0}$ である。

多変量GARCHモデル

- 多変量GARCHモデル

よって $\mathbf{y}_t$ の条件付き**分散共分散行列**は

$$E(\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t^{\mathrm{T}} \mid \Omega_{t-1}) = E(\mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{v}_t \mathbf{v}_t^{\mathrm{T}} \mathbf{H}_t^{1/2} \mid \Omega_{t-1})$$
$$= \mathbf{H}_t^{1/2} E(\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t^{\mathrm{T}} \mid \Omega_{t-1}) \mathbf{H}_t^{1/2}$$
$$= \mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{I}_n \mathbf{H}_t^{1/2} = \mathbf{H}_t$$

となる。ここで "T" は行列の転置を表す。

多変量GARCHモデルはこの $\mathbf{H}_t$ をどのように定式化するかによって種類が分かれる。

多変量GARCHモデル

- VEC モデル

一変量の GARCH モデルの場合は 条件付き分散 h_t^2 を

$$h_t^2 = \omega + \beta h_{t-1}^2 + \alpha y_{t-1}^2$$

のようにモデル化した。これの多変量への拡張を考える。

ここで この拡張の準備として **“VEC” オペレーター**というものを導入する。

多変量GARCHモデル

- VEC オペレーター

VEC オペレーターとは任意の行列をベクトルに変換するオペレーターである。例えば今 2 × 2 行列:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

が与えられたとしよう。

この時、vec(**A**) とはこの行列 **A** のそれぞれの列を縦に一列に並べたもの、すなわち

多変量GARCHモデル

- VEC オペレーター

$$\mathrm{vec}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

と定義される。これは行列 **A** の**1 列 めから順に一列に**並べたものである。

多変量GARCHモデル

- VEC オペレーター

例えば

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}, \text{および} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

という行列に対して vec(**B**), vec(**C**) は

$$\mathrm{vec}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{12} \\ b_{22} \\ b_{13} \\ b_{23} \end{bmatrix} \quad \text{および} \quad \mathrm{vec}(\mathbf{C}) = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{bmatrix}$$

で与えられる。**要素の並び方に注意**。

多変量GARCHモデル

- VECH オペレーター

さらに**正方対称行列**に対して**“VECH” (ベクハーフ) オペレーター**は以下のように行列の下三角部分にある成分を1列目から順に並べるオペレーターとして定義される。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{vech}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{vech}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{22} \\ b_{32} \\ b_{33} \end{bmatrix}$$

これも並べる順番に注意。

多変量GARCHモデル

例題 1

(1) $n \times n$ 行列 $\mathbf{A}$ は n^2 個の成分からなる行列であるが、では vec($\mathbf{A}$) はいくつの成分からなるか？
また vech ($\mathbf{A}$) はいくつの成分からなるか？

(2) 行列 $\mathbf{A}$ は2×2の**対称行列**で vech($\mathbf{A}$) = $[2,\ 1,\ 3]^T$ であるとする時、行列 $\mathbf{A}$ を求めなさい。

多変量GARCHモデル

- VEC モデル

VECモデルはvech($\mathbf{H}_t$) をモデル化したものである
($\mathbf{H}_t$ は正方行列である事に注意)。

具体的には VEC(1, 1) モデルは(VEC(m, r) モデルも同様に定義できる)。

$$\mathrm{vech}(\mathbf{H}_t) = \mathbf{c} + \mathbf{B}\,\mathrm{vech}(\mathbf{H}_{t-1}) + \mathbf{A}\,\mathrm{vech}(\mathbf{y}_{t-1}\mathbf{y}_{t-1}^{\mathrm{T}})$$

と定義される。ここで $\mathbf{c}$ は $n(n + 1)/2$ ベクトルであり、$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は $n\,(n + 1)/2 \times n\,(n + 1)/2$ 行列である。

多変量GARCHモデル

- VEC モデル

例えば $n = 2$ の時には (2 変量のモデル)、

$$\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} \\ h_{21,t} & h_{23,t} \end{bmatrix}$$

であるので($h_{12,t} = h_{21,t}$ に注意) 先ほどのモデルは

$$\begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{21,t} \\ h_{23,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{21,t-1} \\ h_{23,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t}^2 \\ y_{1,t} y_{2,t} \\ y_{2,t}^2 \end{bmatrix}$$

となる。

多変量GARCHモデル

- VEC モデルの特徴

VECモデルは GARCH モデルの多変量への自然な一般化であるが、***n* が大きくなるにつれて推定するパラメーターの数が急速に大きくなる**という欠点がある。
例えば n =2の場合は

3 (**c** のパラメーター数) + 9 (**A** のパラメーター数) + 9 (**B** のパラメーター数) = 21 個の未知パラメーター

n = 3 の時は

6 (**c** のパラメーター数) + 36 (**A** のパラメーター数) + 36 (**B** のパラメーター数) = 78 個の未知パラメーター

となり、応用上 n = 3 以上の場合は推定がほぼ不可能である。

多変量GARCHモデル

- BEKK モデル

VEC モデルのこのような欠点を補うために Baba, Engle. Kraft, and Kroner (1990) は以下のBEKKモデルと呼ばれるモデルを提案した (具体的な出典については教科書を参照。BEKK というのは彼らの頭文字)。

BEKK(1, 1) モデルは

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{H}_{t-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}\mathbf{y}_{t-1}\mathbf{y}_{t-1}{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

と定義される。ここで **C** は $n \times n$ の対称行列、**A** と **B** は $n \times n$ の行列である。

多変量GARCHモデル

- BEKK モデルの特徴

BEKK モデルの利点の1つは **C** が**正定値行列**である限り、$\mathbf{H}_t$ も必ず正定値行列になる事である($\mathbf{H}_t$ は分散共分散行列であり、これは通常全ての時点で必ず正定値行列であると想定されるので、この想定をモデルが満たしている必要がある(GARCHの時の全ての時点で $h_t > 0$ であるという条件と似たようなもの)。

$n = 3$ の時、BEKKモデルは**24個**のパラメーターを持ち、VECモデルの**78個**と比べるとかなり倹約的になっている。にもかかわらず、BEKKモデル条件付き分散間の相互関係を柔軟に記述できる。

多変量GARCHモデル

- 正定値行列と半正定値行列

$n \times n$ 対称行列 $\mathbf{A}$ に対して、$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ である全ての $n \times 1$ ベクトル $\mathbf{x}$ に対して

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$$

が成り立つとき $\mathbf{A}$ は**正定値行列**であると言われる。また全ての $n \times 1$ ベクトル $\mathbf{x}$ に対して

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$$

が成り立つとき $\mathbf{A}$ は**半正定値行列**であると言われる。

分散共分散行列は半正定値行列となる。

多変量GARCHモデル

例題2

分散共分散行列が半正定値行列である事を証明せよ。

例題3

$n = 3$ の時、BEKKモデルのパラメーター数が24である事を確認せよ。

多変量GARCHモデル

- CCC モデル

VECモデルより倹約的なモデルとしてよく用いられるモデルに **CCC (constant conditional correlation) モデル** がある。このモデルは $\mathbf{y}_t$ の条件付き相関(行列)が時間を通じて一定であると仮定して、$\mathbf{H}_t$ をモデル化したものである。

まず $\mathbf{H}_t$ の対角成分の平方根を取り出してそれを $\mathbf{d}_t$ とする。つまり

$$\mathbf{d}_t = [\sqrt{h_{11,t}}\ , \sqrt{h_{22,t}}\ , \ldots.., \sqrt{h_{22,t}}\ ]^{\mathrm{T}}$$

である(行列 **A** の対角成分は diag(**A**) と書かれる)。

多変量GARCHモデル

- CCC モデル

この $\mathbf{d}_t$ と $\mathbf{H}_t$ を

$$\mathbf{d}_t = \mathbf{c} + \mathbf{B}\mathbf{d}_{t-1} + \mathbf{A}\mathrm{diag}(\mathbf{y}_{t-1}\mathbf{y}_{t-1}{}^{\mathrm{T}}), \quad \mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}\, \mathbf{D}_t$$

とモデル化する。ここで $\mathbf{c}$ は $n\times 1$ベクトル、$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は $n \times n$ 対角行列、$\mathbf{R}$ は $\mathbf{y}_t$ の相関を表す相関行列であり時間を通じて一定である ($\mathbf{R}$ は対角成分は全て 1 で非対角成分は -1 より大きく1 より小さい行列である。$\mathbf{R}$ も正定値行列でなければいけない)。$\mathbf{D}_t$ は $\mathbf{d}_t$ を対角成分とする対角行列

多変量GARCHモデル

- CCC モデルの特徴

このモデルにおいても (**R**が正定値行列であれば)
$\mathbf{H}_t$ は常に正定値行列になる。

$n = 3$ の時、**12個**のパラメーターを持ち、非常に倹約的なモデルである。

例題 4
上記を確認せよ。

多変量GARCHモデル

- 相関変動モデル

ここまでの多変量GARCHモデルにおいては主に条件付き分散と共分散の変動をモデル化していた。しかしながら変数間の関係を要約する指標としてより重要で解釈が容易なものは**相関係数**である。

分散と共分散が変動すれば間接的に相関関係も変動するが、それらの変動がどのように相関関係に影響を与えているかを分析するのは容易ではない。

よって相関関係の変動を分析したい場合には**相関を直接モデル化**する方が望ましい。

多変量GARCHモデル

- DCCモデル

DCC(dynamic conditional correlation)モデル はCCCモデルにおいて相関行列 $\mathbf{R}$ も変動するように拡張したモデルである。すなわち

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t$$

としたモデルある。ここで $\mathbf{D}_t$ は CCC モデルと同様に定義される。

$\mathbf{R}_t$ のモデル化の仕方によって様々な DCC モデルが存在する。

多変量GARCHモデル

- Engle (2002) による DCC モデル

Engle (2002) は $\mathbf{R}_t$ を

$$\mathbf{R}_t = \mathrm{diag}(\mathbf{Q}_t)^{-1/2}\,\mathbf{Q}_t\,\mathrm{diag}(\mathbf{Q}_t)^{-1/2}$$

のようにモデル化した。ここで $\mathbf{Q}_t$ は

$$\mathbf{Q}_t = (1 - a - b)\,\overline{\mathbf{Q}} + b\,\mathbf{Q}_{t-1} + a\,\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}{}^{\mathrm{T}}$$

によって決定される。ここで $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{D}_t^{-1}\,\mathbf{y}_t$ である ($\mathbf{y}_t$ の各成分を基準化したもの)。$\overline{\mathbf{Q}}$ は $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ の条件なしの相関行列になる。$a > 0,\ b > 0,\ a + b \leq 1$ の時、$\mathbf{R}_t$ は相関行列の条件を満たす。

多変量GARCHモデル

演習問題

問題1. VEC (1, 1) モデル:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t^{1/2}\,\mathbf{v}_t\,,\ \ \mathrm{vech}(\,\mathbf{H}_t\,) = \mathbf{c} + \mathbf{A}\,\mathrm{vech}(\,\mathbf{y}_{t-1}\mathbf{y}_{t-1}^{\mathrm{T}})$$

において $\mathrm{vech}(\mathbf{y}_t\,\mathbf{y}_t^{\mathrm{T}})$ が $\mathbf{w}_t = \mathrm{vech}(\mathbf{y}_t\,\mathbf{y}_t^{\mathrm{T}}) - \mathrm{vech}(\mathbf{H}_t)$ をノイズとする(形式上)VAR(1)過程に従う事を示し、その(条件なし)期待値を求めよ。

問題2. VEC(1, 1) モデル、BEKK(1, 1) モデルにおいて、それぞれ係数の行列 **A** と **B** がどのような行列の時に、$\mathbf{H}_t$ の i 番目の対角成分 $h_{ii,t}$ は GARCH(1, 1) モデルに従うか? またその係数はどのようになるか?