分割行列の逆行列の公式

$n \times n$ 行列

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

は

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

と表せるとする。ここで

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,j+1} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} a_{k+1,j+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

とする。この行列 $\mathbf{A}$ の別表現の事を分割行列という。

この時 $\mathbf{A}$ の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ は $(k = j$ の時)

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{F}_2\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{F}_2 \\ -\mathbf{F}_2\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1},$$

と計算できる。これが分割行列の逆行列の公式である。この公式は実際に $\mathbf{A}\ \mathbf{A}^{-1}$ を計算して単位行列になる事より簡単に確認できる。また $\mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{F}_2\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}$ に対して

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{F}_2\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1})(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}) \\
&= \mathbf{I}_k - \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{F}_2\mathbf{A}_{21} - \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{F}_2\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} \\
&= \mathbf{I}_k - \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{F}_2(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} \\
&= \mathbf{I}_k - \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} \\
&= \mathbf{I}_k
\end{aligned}$$

が成り立つので $\mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{F}_2\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}$ は $\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}$ の逆行列である。よって上記の公式は

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{F}_2 \\ -\mathbf{F}_2\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1}$$

と書く事もできる。