

# 極値理論とボラティリティ変動モデルのアンサンブル による VaR 算出

石塚昂

慶應義塾大学経済学部長倉大輔研究会

## 要旨

VaR(バリューアットリスク)の算出に関して、EVT は高い推定精度と安定性を持つが、バイオレーション・クラスタリングが発生する。一方ボラティリティ変動モデルは推定精度と安定性の面で劣るが、バイオレーション・クラスタリングが起きにくい。特徴の異なる EVT とボラティリティ変動モデルをアンサンブルすることで、両者の欠点を補いあったモデルを構築する。

キーワード：リスク管理、VaR、GARCH、GJR、極値理論

## 1. はじめに

企業は、事業活動を行う上で、戦略リスクや経営リスク、環境リスク、金融リスクなど様々なリスク（不確実性）にさらされている。その中でも金融リスクは金融マーケットで起きる損失のことであり、投資手法や投資対象が急速に拡大する中で金融リスクは高まっている。そのような金融リスクに対応し自社の競争優位性を高めるためにリスク管理は重要な要素である。本稿では最初に、VaR やボラティリティ変動モデル、EVT の概念や理論を説明する。次にボラティリティ変動モデルと EVT(極値理論)による VaR の推定を比較し、両者の特徴を把握する。最後に両者をアンサンブルしたモデルの有効性と分析結果について報告する。

## 2. 収益率の分布

流動性のある資産の収益率の分布が正規分布に従わないことは、多くの研究や分析で示されており、リスク管理の分野で広く知られている。ダニエルソン・森本(2000)は、流動性のある資産のリスク管理を分析する上で重要となる特性として、収益率の非正規性、ボラティリティ・クラスタリング、収益率分布の非対称性を挙げている。収益率の非正規性とは、収益率分布は同じ平均と分散を持つ正規分布と比較して、中心部分は高く、中心部分と裾部

分の間は低く、裾部分は高い（ファットテール性）という特徴があることを指す。特にファットテール性がリスク管理との関連性が高い。図1はTOPIXの対数収益率のヒストグラムである。点線で示した正規分布の近似曲線と比較して、上記の特徴が見てとれる。ボラティリティ・クラスタリングとは、ボラティリティが自己相関すること、言い換えれば収益率の大きな変動が集中して続く時期が観察されることである。収益率分布の非対称性とは、右側と左側の裾の形状が異なることである。多くの株式市場やその他の金融市場に関する研究では、正のショックよりも負のショックの方がボラティリティに対してより大きな影響を持つことが報告されている<sup>2)</sup>。これはレバレッジ効果(leverage effect)と呼ばれ、分布の非対称性の原因となる

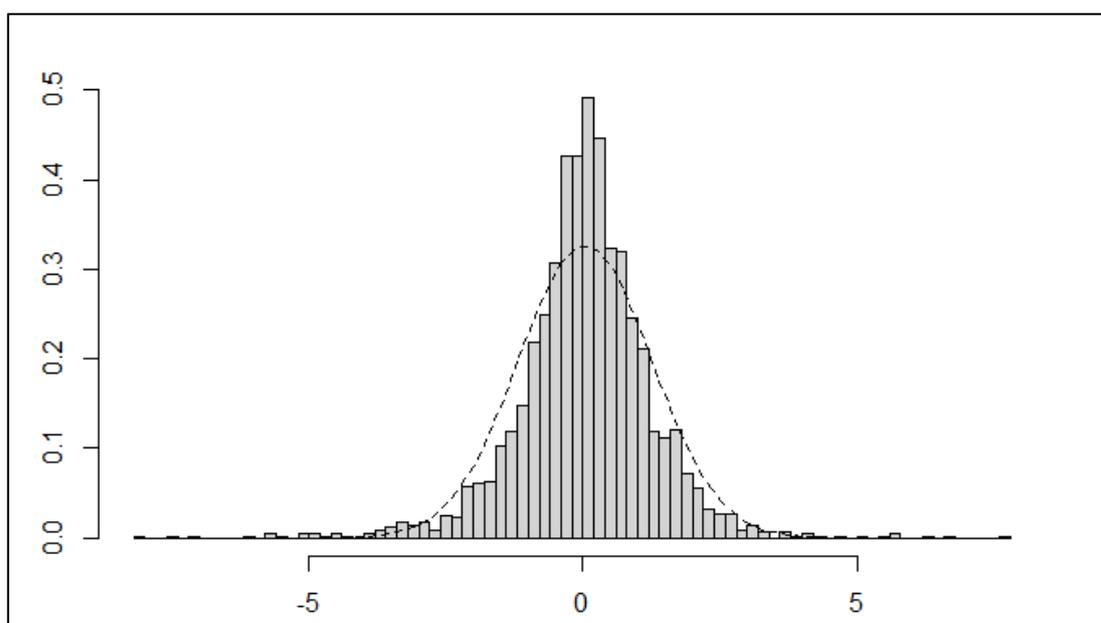


図1：TOPIX 対数収益率(2012年～2021年)

### 3. バリュアットリスク (VaR)

リスクの指標には保有期間を1日としたバリュアットリスク (VaR) を用いる。VaRとはある一定の確率の範囲内で発生する可能性のある最大の損失額である。ある資産の現時点 $t$ の価値を $P(t)$ として、将来の時点 $\gamma$ までに生じる損益額 $\Delta P = P(\gamma) - P(t)$ に対して、式(1)が成立するとき、損失額 $X$ を、保有期間 $\gamma - t$ 、信頼水準 $100(1 - \alpha)\%$ の VaR と呼ぶ。

$$Pr[\Delta P \leq -X] = \alpha \quad (1)$$

概念的にわかりやすく、算出が容易であることから市場リスク計測の手法として多くの金融機関で活用されている。本稿の実証分析では保有期間を1日とした VaR を算出する

### 4. ボラティリティ変動モデル

ボラティリティ変動モデルとはボラティリティの自己相関(ボラティリティ・クラスタリング)をモデル化するために考案されたモデルであり、Engle(1982)が ARCH モデルを考案して以降多くの金融データ分析で用いられている。本稿では代表的なボラティリティ変動モデルである GARCH モデルとその発展形である t-GARCH モデル、GJR モデルを用いて分析を行う。

本稿で使用する GARCH モデルは、以下の式(2)である。

$$\begin{aligned} r_t = u_t &= \sqrt{h_t} v_t, & v_t &\sim iid N(0,1) = \alpha \\ h_t &= \omega + \alpha u_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \end{aligned} \quad (2)$$

単純化とファイナンスデータに GARCH モデルを当てはめ  $u_t$  の推定精度を比較すると GARCH(1,1)モデルが最良となる場合が多い<sup>2)</sup>ことから、GARCH モデルの次数はすべて1とした。また条件付き期待値は0と仮定した。GARCH モデルは、ボラティリティの自己相関構造をモデル化しているため、ボラティリティ・クラスタリングを表現することができる。

本稿で使用する t-GARCH モデルは以下の式(3)である。

$$\begin{aligned} r_t = u_t &= \sqrt{h_t} v_t, & v_t &\sim iid t(v) \\ h_t &= \omega + \alpha u_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \end{aligned} \quad (3)$$

t-GARCH モデルはモデルのノイズ  $v_t$  が t 分布に従うことを仮定し、分布のファットテール性を表現することができる。

本稿で使用する GJR モデルは以下の式(4)である。

$$\begin{aligned} r_t = u_t &= \sqrt{h_t} v_t, & v_t &\sim iid t(v) \\ h_t &= \omega + \beta h_{t-1} + \alpha u_{t-1}^2 + \gamma u_{t-1}^2 \cdot I_{t-1} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $I_{t-1}$  は  $u_{t-1}$  が負のときに1 正のときに0をとる指示関数である。GJR モデルは GARCH モデルに指示関数を組み込むことでレバレッジ効果を捉え、分布の非対称性を表現することができる。

## 5. EVT (極値理論)

極値理論 (EVT) リスク管理の分野で注目を集める統計手法である。EVT を VaR の算出に用いる概念的背景は、数%以下の確率で発生するリスクを算出するために、ボラティリティ変動モデルが全観測値を用いているのに対して、確率分布の裾部分の観測値のみを用いてモデル化する EVT は効率的な方法である可能性があるという点である。また、EVT は収益率分布の裾部分をモデル化することで収益率分布ファットテール性と非対称性を捉えることができる。

裾部分の観測値とは、十分に大きな閾値を超えるデータのことである。母集団分布  $F$  が一般極値分布の吸引領域に属しているならば  $F$  の裾部分のデータは式(5)のような分布関数

を持つ一般パレート分布に従う。

$$H(x) = 1 - \left(1 + \xi \frac{x-u}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, \quad x > u \text{ かつ } \left(1 + \xi \frac{x-u}{\sigma}\right) > 0 \quad (5)$$

ここで $u$ は閾値であり、パラメータ $\xi$ は分布  $F$  の極値指数と呼ばれ裾部分の形状を決定するパラメータである。 $\xi > 0$  のとき一般パレート分布はパレート分布となり、分布  $F$  は裾の厚い分布となる。ファイナンスや保険の分野では、極値指数 $\xi$ が正になることが多いと言われている<sup>4)</sup>。本稿では Brooks, Clare, Dalle Molle, & Persaud (2003) に従い閾値 $u$ として正規分布の5%点を採用した。

## 6. 検証方法

### 6.1. データ

2012年から2021年における東証株価指数(TOPIX)とジャスダック指数(JASDAQ)の日次対数収益率で分析を行う。収益率を $r_t$ とすると対数収益率は以下の式(6)となる。

$$r_t = \log\left(\frac{r_t}{r_{t-1}}\right) \quad (6)$$

### 6.2. バックテスト

ウィンドウサイズを1000としたローリングウィンドウ法によりバックテストを行う。すなわち、直前の1000日間のデータから VaR を算出し観察された収益率と比較する。

### 6.3. バイオレーション率

最初に、バイオレーション率を比較することで、各モデルの VaR 推定精度を比較する。信頼水準 $100(1-\alpha)\%$ の VaR を推定した場合、バックテストにおいて実際に観測された値が推定した VaR を超過した割合(バイオレーション率)は $\alpha\%$ であることが望ましい。したがって、バックテストによって得られたバイオレーション率が期待超過率 $\alpha\%$ にどれだけ近いかによってモデルの精度を比較することができる。バイオレーション率が期待されたバイオレーション率 $\alpha\%$ にどれだけ近いかを統計的に評価するために、Kupiec の尤度比検定を使用する。

#### 6.3.1. Kupiec の尤度比検定

収益率が VaR を超過したか否かをベルヌーイ試行にとらえ、尤度比検定を行う。T を収益率総数、 $\pi$  をバイオレーション率、 $T_0$  をバイオレーション数、 $T_1$  を非バイオレーション数とすると、ベルヌーイ分布の尤度関数は式(7)で表せる。

$$L(\pi) = \prod_{t=1}^T (1-\pi)^{1-I_{t+1}} \pi^{I_{t+1}} = (1-\pi)^{T_0} \pi^{T_1} \quad (7)$$

データから観測されるバイオレーション率は $\hat{\pi} = T_1/T$ で与えられ、帰無仮説を $\pi = \alpha$ とすると、尤度比検定統計量LRは式(8)で表される。帰無仮説が正しいとすると、LRは漸近的

に自由度 1 のカイ二乗分布 $x^2(1)$ に従う。

$$LR = -2\log \left[ \frac{(1 - \alpha)^{T_0} \alpha^{T_1}}{(1 - T_1/T)^{T_0} (T_1/T)^{T_1}} \right] \quad (8)$$

この尤度比検定統計量 $LR$ をもとに、帰無仮説を $H_0: T_1/T = \alpha$ 対立仮説を $H_0: T_1/T \neq \alpha$ とした尤度比検定を行うことを Kupiec の尤度比検定と呼ぶ。

安藤 (2004) に従い、本稿では Kupiec の尤度比検定から得られた  $p$  値が大きいほど予測精度が高いと判断する。 $p$  値が大きいことは、帰無仮説 $H_0: T_1/T = \alpha$ を積極的に肯定するものではないが、帰無仮説を棄却する証拠がデータから得られないことを示唆している。したがって、 $p$  値が高いことはモデルが推定した VaR が設定した超過率と整合的であるという意味で予測精度が高いと判断できる。

#### 6.4. VaR 推定値のボラティリティ

次に、各モデルの VaR 推定値のボラティリティを比較する。金融機関は BIS 規制により VaR の 3 倍以上の自己資本額が必要とされている<sup>5)</sup>。VaR が大きく変動すると必要とされる自己資本額も変動するため、その変動を考慮してより多くの自己資本額を用意することになる。また、内部リスク管理では、一般的にトレーダーのポジション限度として VaR が用いられており、VaR が大きく変動するとポジション調節が困難となる<sup>6)</sup>。したがって、VaR 推定値自体のボラティリティは実務上重要な要素である。

### 7. 分析結果

#### 7.1. バイオレーション率

GARCH モデル、t-GARCH モデル、GJR モデル、EVT のバイオレーション率と Kupiec の尤度比検定の  $p$  値を示したのが、表 1 である。6 つの対象データと信頼水準の組み合わせのうち 4 つで EVT が最も高い推定精度となった。またボラティリティ変動モデル間では、すべての組み合わせにおいて GJR モデルの推定精度が最も高くなった。

観測されたバイオレーション率と期待超過率との関係を見ると、ボラティリティ変動モデルは全てのバイオレーション率が期待超過率を上回り、EVT は全てのバイオレーション率が期待超過率を下回った。バイオレーション率 > 期待超過率となることは推定したリスクよりも実現したリスクが高いことを示している。反対にバイオレーション率が期待超過率を下回るとは推定したリスクよりも実現したリスクは低いことを示している。したがって、EVT はリスクを過大に評価しボラティリティ変動モデルはリスクを過少に評価する傾向があると分かる。

		バイオレーション率			p値			平均
		95%	97.5%	99%	95%	97.5%	99%	
信頼水準		95%	97.5%	99%	95%	97.5%	99%	
期待超過率		0.0500	0.0250	0.0100				
TOPIX	GARCH	0.0539	0.0380	0.0193	0.5046	0.0032	0.0016	0.1698
	t-GARCH	0.0573	0.0352	0.0138	0.2112	0.0188	0.1681	0.1327
	GJR	0.0532	0.0297	0.0131	0.5828	0.2661	0.2546	0.3678
	EVT	0.0428	0.0200	0.0083	0.1990	0.2096	0.4997	0.3028
JASDAQ	GARCH	0.0629	0.0449	0.0290	0.0303	0.0000	0.0000	0.0101
	t-GARCH	0.0691	0.0442	0.0214	0.0016	0.0000	0.0002	0.0006
	GJR	0.0608	0.0422	0.0200	0.0675	0.0001	0.0007	0.0228
	EVT	0.0498	0.0214	0.0083	0.9663	0.3719	0.5013	0.6132

表1：バイオレーション率と p 値

## 7.2. VaR 推定値のボラティリティ

2021年の各モデルのVaR推定値の統計量を示したのが、表2である。EVTのVaR推定値のボラティリティはボラティリティ変動モデルの10分の1程度であった。またEVTのVaRの最大値と最小値の差はボラティリティ変動モデルの9分の1程度であった。

図2、3は、GJRモデルとEVTの信頼水準99%のVaR推定値の推移である。点プロットは観測値がVaRをバイオレーションしたことを示している。GJRモデルはボラティリティの変化に反応して大きく変動しているのに対して、EVTはボラティリティの変化にはあまり影響を受けずに安定して推移している。

		平均	標準偏差	最小値	最大値
TOPIX	n-GARCH	-2.33	0.43	-4.27	-1.58
	t-GARCH	-2.68	0.46	-4.75	-1.80
	EGARCH	-2.50	0.61	-5.01	-1.62
	EVT	-3.06	0.05	-3.31	-3.00
JASDAQ	n-GARCH	-1.80	0.42	-3.94	-1.18
	t-GARCH	-1.97	0.41	-4.13	-1.35
	EGARCH	-1.94	0.56	-4.95	-1.30
	EVT	-3.05	0.05	-3.33	-2.98

表2：VaR推定値の統計量(2021年)

## 7.3. バイオレーション・クラスタリング

図2と比較して図3では、集中してVaRのバイオレーションが起きている時期があることが分かる。これはバイオレーション・クラスタリングと呼ばれ、リスク管理上望ましくな

い現象である。GARCH モデルは一度大きな損失が生じると、VaR を大きくすることでそれ以降のバイオレーションを防ごうとしており、その結果としてバイオレーション・クラスタリングを防いでいる。一方 EVT は大きな損失に対して反応を示さないため、バイオレーション・クラスタリングが発生している。

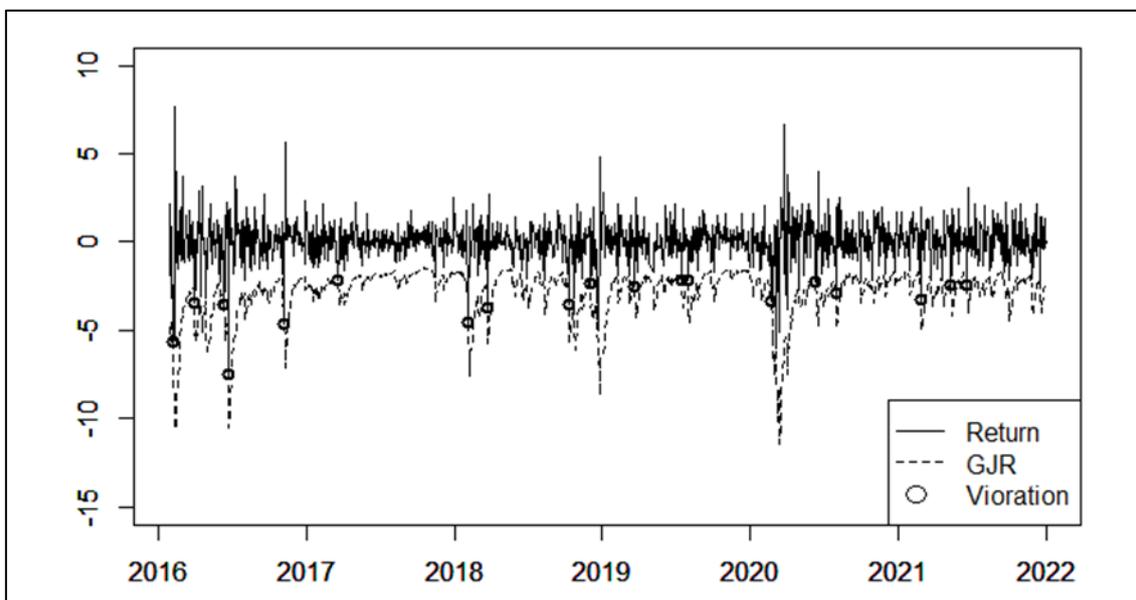


図 2： VaR 推定値の推移(GJR モデル、TOPIX)

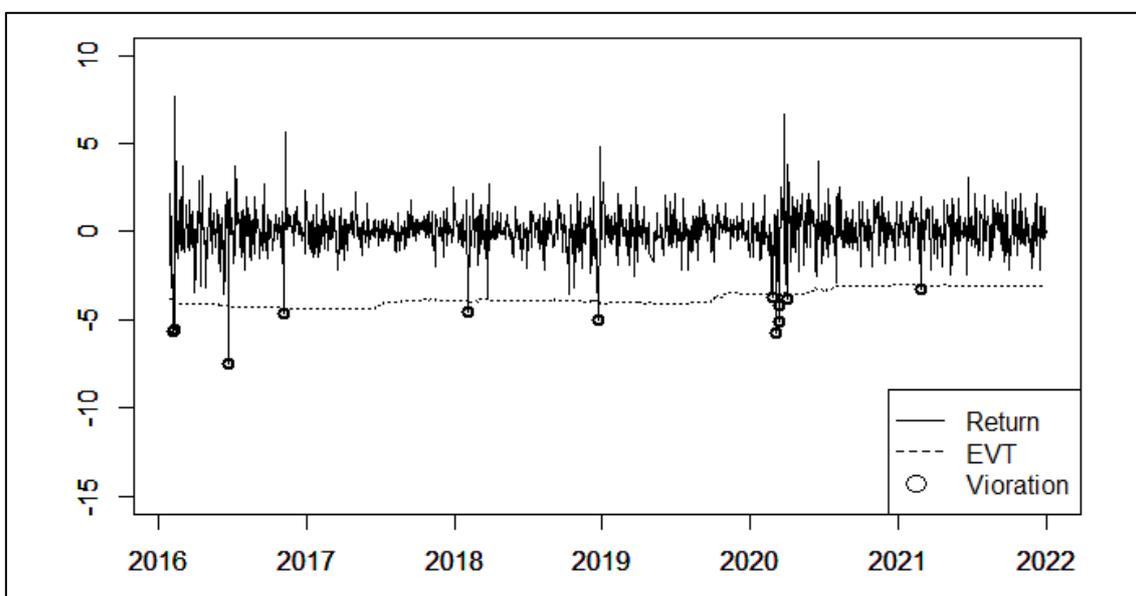


図 3： EVT の VaR 推定値の推移(EVT、TOPIX)

## 8. アンサンブルモデル

これまでの分析結果をまとめると、ボラティリティ変動モデルはバイオレーション・クラスタリングを防ぐことができるという特徴があるが、推定精度と安定性に欠ける。一方で、EVT は推定精度が高く、VaR 推定値は安定しているが、バイオレーション・クラスタリングが発生するという欠点がある。さらにEVTはリスクを過大に評価しボラティリティ変動モデルはリスクを過少に評価する傾向がある。両者の特徴をまとめたのが、表3である。

この両者をアンサンブルすることで、両者の欠点を補い合い、より良い VaR 推定モデルを構築する。本稿が提案するアンサンブルモデルの VaR 推定値は、ボラティリティ変動モデルと EVT の VaR 推定値の単純平均である。

$$VaR_{\text{アンサンブルモデル}} = \frac{(VaR_{\text{ボラティリティ変動モデル}} + VaR^{EVT})}{2} \quad (9)$$

ボラティリティ変動モデルとして GJR モデルを選択した場合のアンサンブルモデルに対して同様のバックテストを行った。アンサンブルモデルのバイオレーション率と p 値を示したのが、表3である。また表4に VaR 推定値の統計量、図2に VaR 推定値の推移を示した。推定精度は先述のどのモデルよりも高い値を示した。また VaR 推定値の標準偏差と最大値と最小値の差は GJR モデル単体と比較して減少した。さらに図3と図4を比較すると、バイオレーションの発生が散らばっており、バイオレーション・クラスタリングが改善していることが分かる。

	推定精度	安定性	バイオレーション クラスタリング	リスク評価
ボラティリティ変動モデル	低い	低い	抑制	過小評価
EVT	高い	高い	発生	過大評価

表3：モデルの特性

	バイオレーション率			p値			平均
	0.95	0.975	0.99	0.95	0.975	0.99	
信頼水準	0.95	0.975	0.99	0.95	0.975	0.99	平均
期待超過率	0.0500	0.0250	0.0100				
Ensemble TOPIX	0.0483	0.0207	0.0069	0.7711	0.2824	0.2102	0.4212
JASDAQ	0.0518	0.0235	0.0090	0.7506	0.7115	0.6927	0.7183

表4：バイオレーション率と p 値(Ensemble)

		平均	標準偏差	最小値	最大値
Ensemble	TOPIX	-2.78	0.31	-4.03	-2.33
	JASDAQ	-2.49	0.28	-4.00	-2.16

表 5： VaR 推定値の統計量(Ensemble)

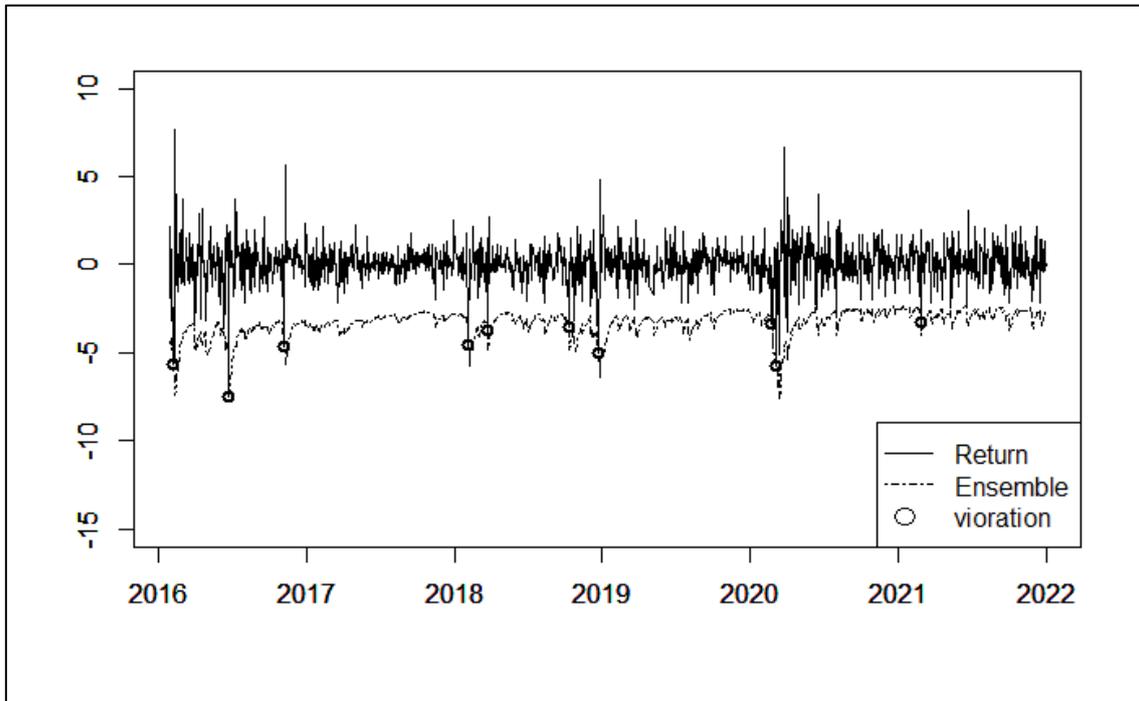


図 4： VaR 推定値の推移(Ensemble、TOPIX)

## 9. おわりに

ボラティリティ変動モデルと EVT をアンサンブルすることで、①推定精度を向上させる、②ボラティリティ変動モデル単体よりも VaR 推定値のボラティリティを減少させる、③ EVT 単体とと比較してバイオレーション・クラスタリングを抑制する、ことができた。アンサンブルモデルは欠点の少ないモデルだといえる。

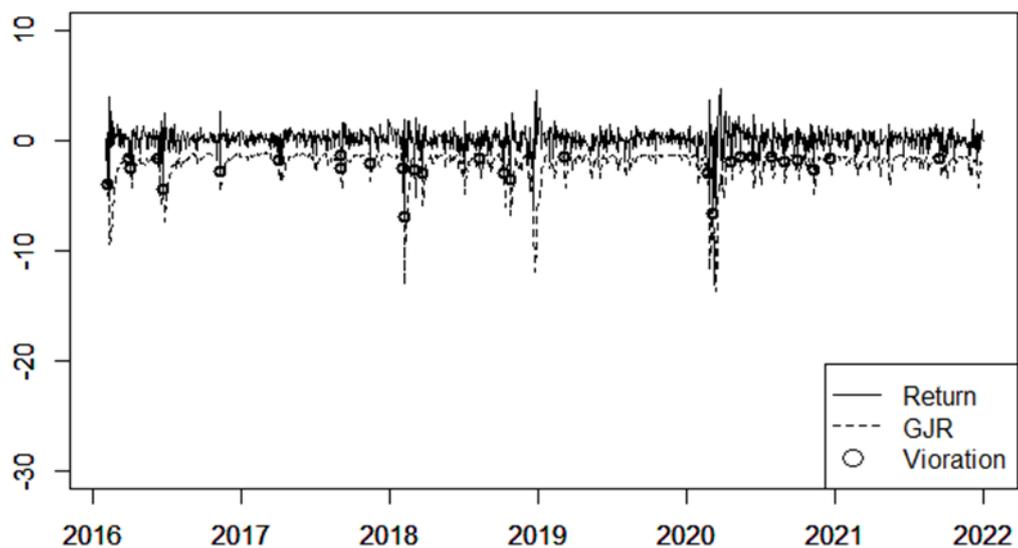
本稿ではアンサンブルモデルを GJR モデルと EVT との単純平均としたが、アンサンブルの方法は他にも考えられる。例えば、推定精度など重視したい項目で加重平均する方法や他のボラティリティ変動モデルもアンサンブルする方法などがある。

本稿で使用したモデルの中に絶対的に優れているモデルは存在しなかった。それぞれのモデルに長所と短所があるため、実際に VaR を算出する際には、バックテストの結果を見て各々の目的に沿ったモデルを選択すべきである。

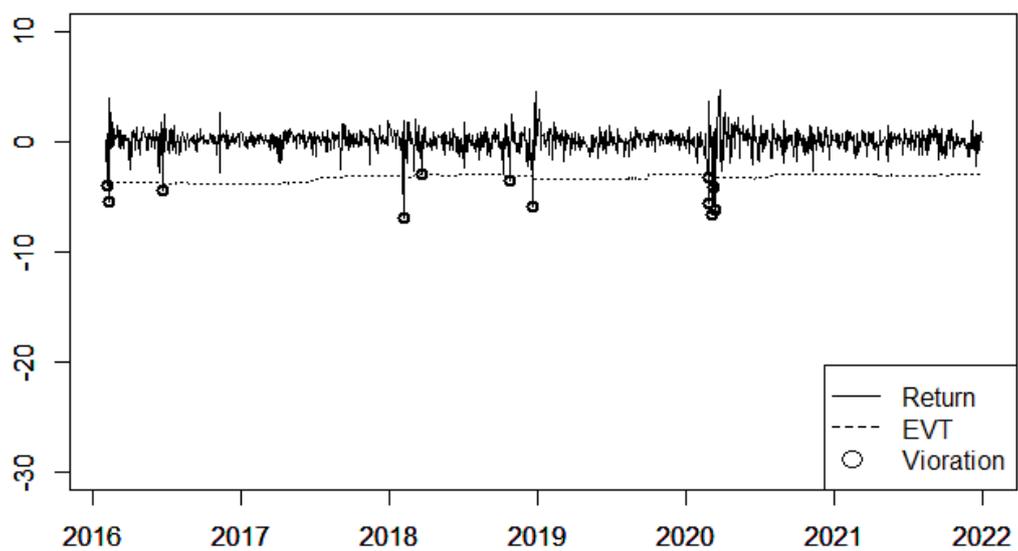
## 参考文献

- [1]安藤美孝 (2004) 「ヒストリカル法によるバリュー・アット・リスクの計測：市場価格変動の非定常性への実務的対応」、金融研究 (2004)、日本銀行金融研究所
- [2]沖本竜義 (2010) 「経済・ファイナンスデータの計量時系列分析」、朝倉書店
- [3]ジョンダニエルソン、森本裕司 (2000) 「市場リスクの予測について—EVT と GARCH モデルを用いたバリューアットリスク算定の比較分析—」、IMES discussion paper series ; no.2000-J-15、日本銀行金融研究所
- [4]高橋倫也、志村隆彰 (2016) 「極値統計学」、近代科学社
- [5]服部隆宏 「VaR の算出方法— 極値論とヒストリカル法の比較分析 —」
- [6]森本孝之、川崎能典 (2006) 「イントラデイ VaR による GARCH モデルの比較実証」、統計数理 (2006) 第 54 卷 第 1 号 5-21、統計数理研究所
- [7]Investing.com、(<https://jp.investing.com/crypto/bitcoin/historical-data> 参照日次:2022-2-10)
- [8]Caeiro, J. and Gomes, M.I. (2016).” Threshold selection in extreme value analysis,” Extreme Value Modeling and Risk Analysis. Chapman and Hall/CRC 2007, 2016. 69-86.
- [9]C. Brooks, A. D. Clare, J.W. Dalle Molle and G. Persaud. (2003). “A Comparison of Extreme Value Theory Approaches for Determining Value at Risk” Journal of Empirical Finance, Volume 12, Issue 2, March 2005, 339-352
- [10]Konstantinos, Gkillasa and Paraskevi, Katsiampa. (2018) “An application of extreme value theory to cryptocurrencies” Economics Letters Volume 164, March 2018, 109-111
- [11]Peter F. Christoffersen (2003). “Elements of Financial Risk Management” Academic Press

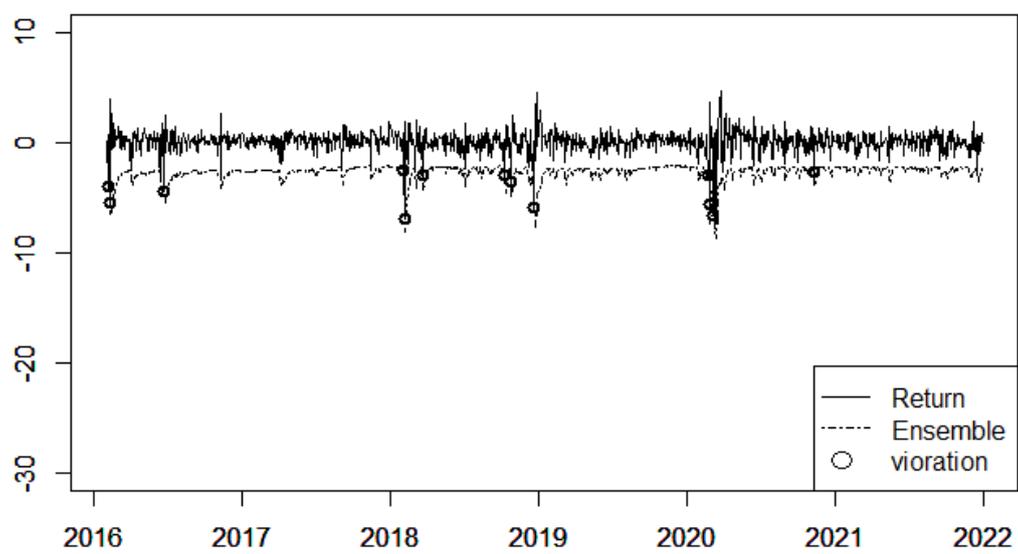
Appendix



VaR 推定値の推移(GJR、JASDAQ)



VaR 推定値の推移(EVT、JASDAQ)



VaR 推定値の推移(Ensemble、JASDAQ)