



中級計量経済学

統計学の復習3 - 仮説検定

担当： 長倉 大輔
(ながくらだいすけ)

仮説検定

■ 仮説検定とは？

仮説検定とはある「**仮説**」をたて、その仮説が統計的に**受け入れられる**か**受け入れられない**かを判断する事である。

仮説とは例えば「ある新薬は腫瘍を小さくするのに効果がない」や「真の内閣支持率は50%である」などである。

仮説検定の考え方は、慣れるまでは少しややこしい。

仮説検定

- 仮説検定の用語

帰無仮説:

確かめたい仮説の事

対立仮説:

確かめたい仮説が正しくない時に成り立っていると仮定している仮説の事

仮説検定

■ 帰無仮説、対立仮説の例

(1) あるクラスで数学の補講を行った。このクラスの補講後の試験の平均点と補講前の平均点は等しいか？

補講を受ける前の平均点を μ_A 、補講を受けた後の平均点を μ_B とすると

帰無仮説: $\mu_A = \mu_B$ 対立仮説: $\mu_A \neq \mu_B$

(2) (1)の例において、補講後の試験の平均点は補講前の平均点より高いか？

帰無仮説: $\mu_A = \mu_B$ 対立仮説: $\mu_B > \mu_A$

仮説検定

■ 仮説検定の用語

帰無仮説の棄却:

帰無仮説を正しくないと判断する事を帰無仮説を**棄却する**という。

帰無仮説の採択:

帰無仮説を正しくないとは判断できない時、帰無仮説を**採択する**という(これは、ほぼ同じ意味ではあるが、より正確には**帰無仮説を棄却できない**といった方がよいかもしれないが、この講義ではこの2つは区別しない)。

仮説検定

■ 仮説検定の考え方

仮説検定では、まず

- (1) ある統計量(このような統計量を**検定統計量**と呼ぶ)の**帰無仮説が正しい時**の分布を考える。
- (2) その統計量の実現値がその分布からどれくらいの確率で起こりうるかを考える。
- (3) もしその実現値が**帰無仮説が正しい時**の分布からは著しく低い確率(例えば1%以下など)でしか起きえない場合に帰無仮説は**正しくない(棄却する)**と考える。
- (4) 逆にその実現値が起こりうる確率が十分高い時(例えば50%など)には、その帰無仮説は**正しくないとは言えない (採択する)**事になる。

仮説検定

■ 有意水準と検出力

有意水準：帰無仮説が正しい時に誤って帰無仮説を棄却する確率。通常、有意水準は α を使って $\alpha = 0.05$ (これは有意水準が5%である事を意味する) のように表わされる。

検出力：帰無仮説が間違っているときに、(正しく) 帰無仮説を棄却する確率。

仮説検定の手法はいくつもあるが、通常は α をある値 (よく使われるのは 1%、5%である) に固定し、検出力をより高くするような検定方法がよいとされる。

仮説検定

■ サイコロの目の検定

例として、あるサイコロの3の目は公平に出るか否か?を仮説検定の考え方を用いて検証してみよう。

3の目が出る確率を p とすると公平なサイコロであれば $p = 1/6$ であろう。そこで

$$H_0: p = 1/6 \approx 0.167, \quad H_1: p \neq 1/6$$

という仮説検定を考える(H_0 と H_1 はそれぞれ帰無仮説と対立仮説を表している。ここで H は英語の仮説 (Hypothesis)を表す)。

仮説検定

■ サイコロの目の検定

まず p を推定する。

n をサイコロを振った回数、 X_i を i 回目に 3 が出た時 $X_i = 1$ を取り、3 以外が出た時 $X_i = 0$ を取るベルヌーイ確率変数だとすると、3の目が出る確率 p は

$$\hat{p}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$$

によって推定できる。確率 p の真の値を p_0 としよう。この時、 $E(\hat{p}_n) = p_0$, $\text{var}(\hat{p}_n) = p_0(1-p_0)/n$ である。

仮説検定

■ サイコロの目の検定

この \hat{p}_n を基準化したものを

$$Z_n = \frac{\hat{p}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

とする。この時、中心極限定理により、漸近的に(つまり観測数 n が非常に大きい時に)

$$Z_n \sim N(0, 1)$$

となる。

仮説検定

- サイコロの目の検定

それでは 帰無仮説を

$$H_0: p_0 = 1/6、$$

対立仮説を

$$H_1: p_0 \neq 1/6$$

とした**仮説検定**を試みよう。

仮説検定

■ サイコロの目の検定

仮説検定では、**帰無仮説が正しいとして**、ある統計量(**検定統計量**)の分布がどうなるかを考える。

観測数を $n = 500$ としよう。

今回は、先ほどの Z_n に 帰無仮説の下での p_0 の値、すなわち $p_0 = 1/6$ (と $n = 500$) を代入したものを検定統計量として使用する。すなわち、検定統計量として

$$\tilde{Z}_n = \frac{\hat{p}_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})/500}} = \frac{\hat{p}_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{1/3600}} = 60 \left(\hat{p}_n - \frac{1}{6} \right)$$

を用いる。

仮説検定

■ サイコロの目の検定

この時、**帰無仮説が正しい場合には** $p_0 = 1/6$ が真の値であるので、中心極限定理により($n = 500$ が十分大きいとして)

$$\tilde{Z}_n = 60 \left(\hat{p}_n - \frac{1}{6} \right) \sim N(0, 1)$$

となる(これは**帰無仮説が正しい場合に成り立つ**という事に注意)。

仮説検定

■ サイコロの目の検定

有意水準を $\alpha = 0.05$ としよう。

有意水準 $\alpha = 0.05$ とは、起き得る確率が5%以下の事が起こった場合に(帰無仮説が正しいなら)**ありえない事が起こった**として帰無仮説を棄却するという事である。

仮説検定

■ サイコロの目の検定

\tilde{Z}_n は(H_0 が正しい場合)標準正規分布に従うので、

$$\Pr(|\tilde{Z}_n| > 1.96) = 0.05$$

である(これは \tilde{Z}_n の絶対値が1.96より大きくなる確率は5% であるという事を表している)。

例えば、 $\tilde{Z}_n = 2.98$ であるとする、本当に H_0 が正しいければ、これは5% よりも低い確率でしか起こらないという事である。このような場合、帰無仮説を棄却する。

このように考えると 帰無仮説 $H_0: p_0 = 1/6$ は \tilde{Z}_n の絶対値が 1.96 より大きい時に**有意水準 5%で棄却される**。

仮説検定

■ サイコロの目の検定

よって

$$\begin{aligned} |\tilde{Z}_n| > 1.96 &\Rightarrow \tilde{Z}_n < -1.96 \text{ もしくは } \tilde{Z}_n > 1.96 \\ &\Rightarrow 60\hat{p}_n - 10 < -1.96 \text{ もしくは } 60\hat{p}_n - 10 > 1.96 \\ &\Rightarrow \hat{p}_n < \frac{8.04}{60} = 0.134 \text{ もしくは } \hat{p}_n > \frac{11.96}{60} \approx 0.199 \end{aligned}$$

の時に**帰無仮説を棄却する**、という事になる。言い換えると、

$$0.134 < \hat{p}_n < 0.199$$

の時に**帰無仮説を採択する**という事である。

仮説検定

■ 臨界値

先ほどの仮説検定では \tilde{Z}_n の絶対値が1.96より大きければ帰無仮説を棄却した。

このように帰無仮説を棄却するか採択するかを決定する値の事を**臨界値**とよぶ。

臨界値は**有意水準によって違う**事に注意。

仮説検定

■ 第1種と第2種の誤り

仮説検定における**統計的な誤り**とは何か？
仮説検定では次の2つの誤りが起こりうる。

第1種の誤り(Type 1 Error)

帰無仮説が正しい時に、誤って帰無仮説を棄却する事。
(これは有意水準と等しい)

第2種の誤り (Type 2 Error)

対立仮説が正しい時に、誤って帰無仮説を採択する事。
(これは $1 - \text{検出力}$ に等しい)

仮説検定

当然どちらの誤りも望ましくない。

しかしながら、この2つの誤りは互いに**相反する**関係にある(どちらか片方の誤りが起きる確率を小さくしようとすると他方の誤りが起きる確率が大きくなる)。

仮説検定

どちらか一方だけを考慮して、誤りの確率を0にする事は簡単である。

第1種の誤りの起こる確率を0にするには**常に帰無仮説を採択**すればよいし、
第2種の誤りの起こる確率を0にするには**常に帰無仮説を棄却**すればよい。

ただしこんな方法でどちらかの誤りの確率を0にするともう片方の誤りが起こる確率が1になってしまう。

仮説検定

- 有意水準と検出力と第1種、2種の誤りの関係

よって実際には、第1種の誤りを非常に小さい値に固定するという方法がとられる。

有意水準と検出力 については

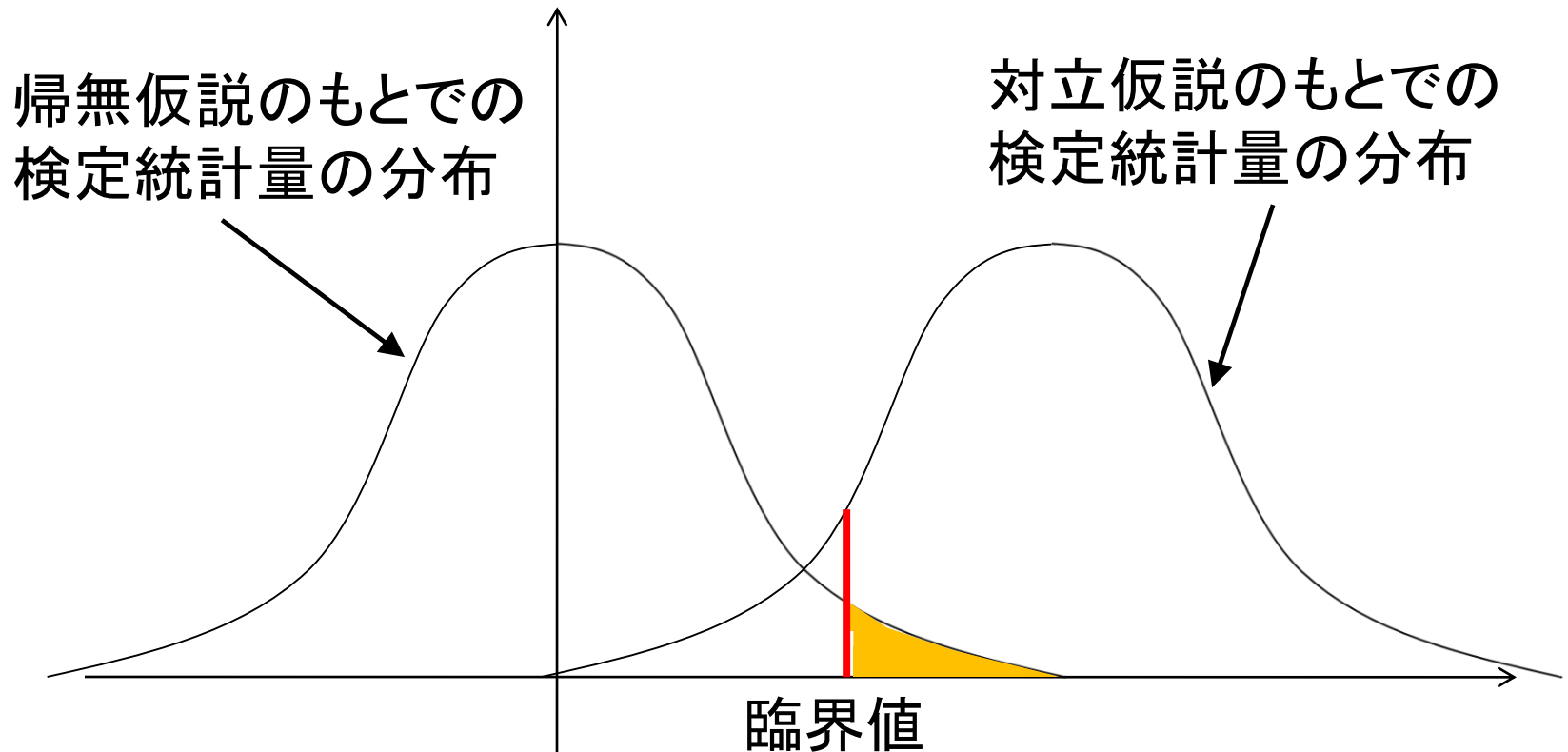
有意水準 = 第1種の誤りの確率,
検出力 = $1 -$ 第2種の誤りの確率

という関係がある。

つまり実際的には有意水準 α を小さい値(よく用いられるのは $\alpha = 0.05$ や $\alpha = 0.01$) に固定する。

仮説検定

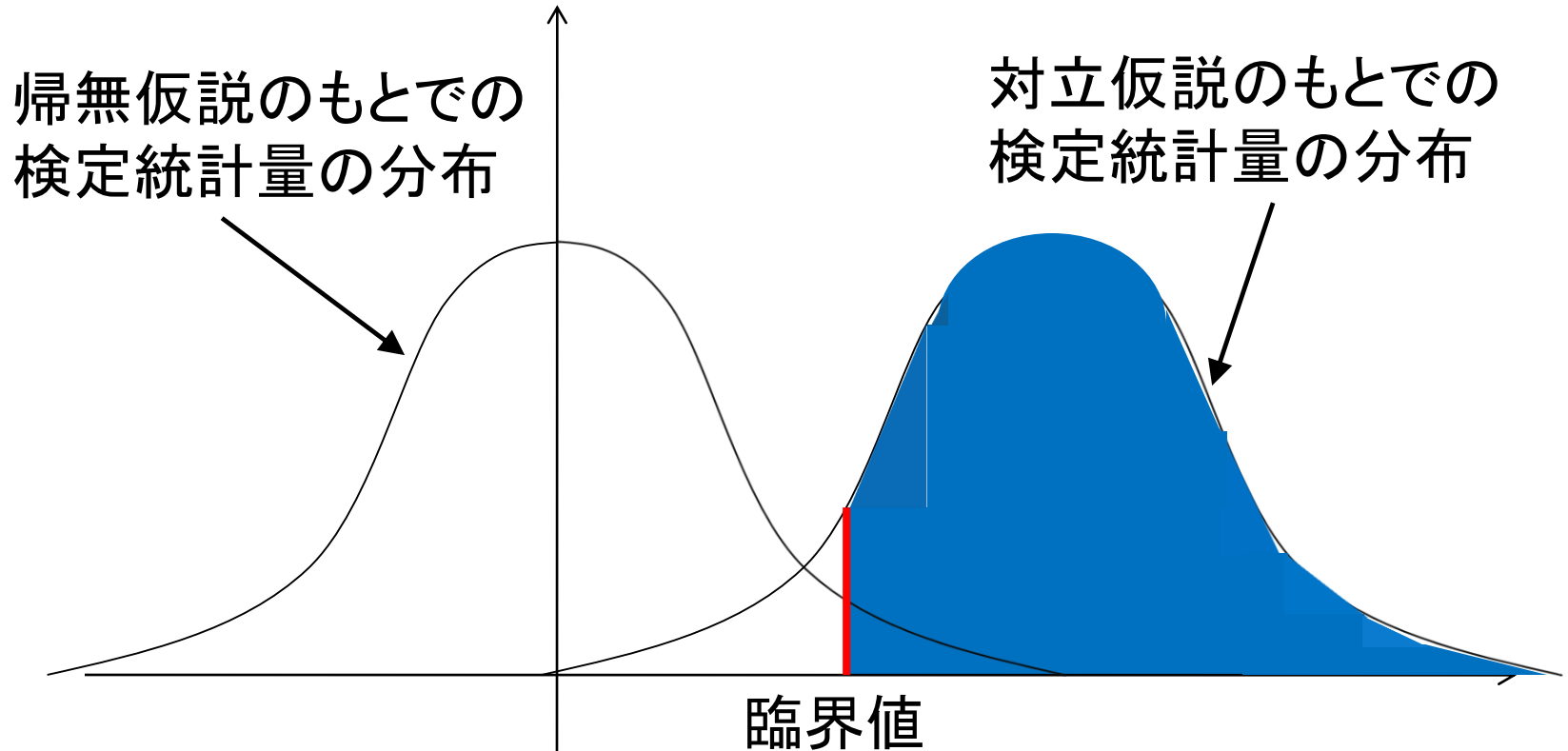
- 有意水準と検出力と臨界値の関係 (片側検定)



 の面積 = 有意水準

仮説検定

- 有意水準と検出力と臨界値の関係 (片側検定)



 の面積 = 検出力

演習問題 (仮説検定)

問題 1

ある検定統計量 Z_n は帰無仮説の下では $N(0, 1)$ に従う事がわかっている。今、ある対立仮説が正しい時には、この検定統計量は $Z_n \sim N(1, 1)$ となる事がわかっているとす。この帰無仮説を有意水準 5% で(両側)検定した時、この対立仮説に対する検出力は何%になるか?