有理 Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論

内藤貴仁 *
東京大学大学院数理科学研究科　特任研究員

1　序文

位相空間 M の自由ループ空間 LM とは，円周 S^1 から M への連続写像全体の成す位相空間の事である．ストリングトポロジーとは，Chas-Sullivan によって創始された自由ループ空間のホモロジーに関する理論である．彼らは論文 [1] において，有向閉多様体の自由ループ空間のホモロジー $H_*(LM)$(以後**ループホモロジー**と呼ぶ) 上に，可換な次数付き代数構造，更には Batalin-Vilkovisky 代数構造を発見している．この結果を出発点として，これでまでに様々なストリングトポロジーに関する研究が行われてきた．特に，Cohen-Godin([3]) によって（余単位元を持たない）2 次元位相的量子場理論の構造や，Godin([7]) によってホモロジー的共形場の理論といった構造が発見されている．

一方，ストリングトポロジーの理論は多様体とは限らない空間においても考えられてきた．例えば，Chataur-Menichi([2]) による，コンパクト連結 Lie 群や有限群の分類空間のストリングトポロジーがある．本稿で注目したいのは，Félix-Thomas([6]) による Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論である．ここで Gorenstein 空間とは，有向閉多様体や連結 Lie 群の分類空間，Borel 構成といった位相空間を含むクラスを成しており，Félix-Thomas の Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論は，Chas-Sullivan による多様体上の理論の拡張になっている．本稿では，多様体上のストリングトポロジーの理論と，筆者によって得られた Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論に関する結果について紹介したい．

本稿の構成は以下の通りである：２章では，多様体上のストリングトポロジーの理論，及びその後の発展について概観し，Félix-Thomas が Gorenstein 空間上の理論に拡張しようと考えた動機について紹介する．３章では，Gorenstein 空間の導入と，Félix-Thomas により拡張された Gorenstein 空間上のストリング作用素の構成について詳しく述べる．４章では，筆者によって得られた，有理 Gorenstein 空間上のストリング作用素の性質や，具体的な計算例について紹介する．

2　ストリングトポロジー

この章では，多様体上のストリングトポロジーの理論について紹介する．1999 年に，Chas-Sullivan により次の定理が示された．

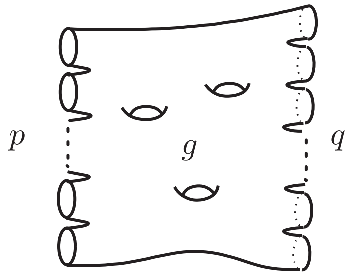
定理 1 ([1])**.** *M を m 次元の有向閉多様体，$\mathbb{H}_*(LM) = H_{*+m}(LM)$ とする．この時，$\mathbb{H}_*(LM)$ は可換な次数付き代数構造を持つ．*

特にこの代数構造を**ループ積**と呼ぶ．正確には，彼らは Batalin-Vilkovisky 代数構造も発見しているが，本稿ではループ積のみに着目する．ループ積は，有向閉多様体 M のホ

* tnaito@ms.u-tokyo.ac.jp

モロジー上に定義される交差積と，基点付きループ空間 ΩM のホモロジー上に定義される Pontryagin 積，つまり ΩM のホップ空間の構造から誘導されるホモロジー上の積を融合させたものである．特に，ループの始点を対応させる写像 $\mathrm{ev}_0 : LM \to M$，$\gamma \mapsto \gamma(0)$ に対し，誘導される射 $H_*(LM) \to H_*(M)$ はループ積を交差積にうつす．

ループ積は，Cohen-Godin によって一般化された．彼らは，下図のような inboundary が p 個，outboundary が q 個（$q \geq 1$），そして種数が g の 2 次元有向コボルディズム



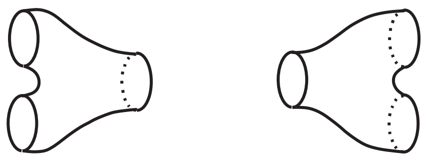
に対し，それに付随するループホモロジー上の作用素

$$H_*(LM^{\times p}) \longrightarrow H_{*+m\chi}(LM^{\times q})$$

を構成した．ここで χ は与えられた 2 次元コボルディズムのオイラー標数である．この作用素を**ストリング作用素**と呼ぶ．このように，境界 S^1 に対して $H_*(LM)$ が対応し，2 次元コボルディズムに対して、上記の様な作用素が対応されるもの（正確には少し条件が付くが）を，2 次元の位相的量子場の理論と呼ぶ．

定理 2 ([3])**.** ループホモロジー $H_*(LM)$ は，（余単位元を持たない）２次元の位相的量子場理論の構造を持つ．

特に，次のような２つのコボルディズム



に対しては，積と余積

$$H_*(LM \times LM) \to H_{*-m}(LM),\ H_*(LM) \to H_{*-m}(LM \times LM)$$

がそれぞれ与えられる．特に積の方は，Chas-Sullivan のループ積と一致する．この意味でストリング作用素はループ積の一般化である．また余積は，**ループ余積**と呼ばれる．

Cohen-Godin の結果により，ループホモロジー上には豊かな代数構造が発見された．しかし，Tamanoi によって次の定理が示された．

定理 3 ([12])**.** 与えられた 2 次元コボルディズムの種数が 1 以上の時，それに付随するストリング作用素は自明である．

これは，合成射 (ループ積) $\circ$ (ループ余積) が自明となる事と同値である．この結果は，次の定理から導かれる．

定理 4 ([12])**.** M を次元 m の有向閉多様体とする．そのループ余積は，$H_m(LM)$ 上のみで非自明である．更に m が奇数の時は，ループ余積は自明である．

つまり，多様体上のループ余積は殆ど自明になるという事である．この結果を受けて，ストリング作用素が定義される位相空間のクラスを，多様体から広げる事が出来ないかと自然に思う．その試みの１つが Félix-Thomas により構成された，Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論である．

3　Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論

この章では，Cohen-Godin が構成したループ積及びループ余積を，Félix-Thomas が Gorenstein 空間上に如何にして拡張したかについて紹介をする．またこの章以降は，代数や加群と言えば，全て体 $\mathbb{K}$ 上とする．

3.1　Gorenstein 空間

まず初めに Gorenstein 空間の定義を与える為の準備を行う．

定義 5. ([5, §6 p.69]) A を DG 代数とする．A-加群 (P, d) が A-**semifree 加群**であるとは，P の部分 A-加群の列

$$P(0) \subset \cdots \subset P(k-1) \subset P(k) \subset \cdots \subset \bigcup_{k \geq 0} P(k) = P$$

で，$P(0)$ 及び各 $P(k)/P(k-1)$ が自由 A 加群で，その基底が cycle であるようなものが存在するものである．また A-加群 (M, d) に対し，semifree 加群 (P, d) 及び疑同型である A-加群の射 $\varepsilon : P \to M$ を (M, d) の A-**semifree 分解**と呼ぶ．ここで擬同型とは，ホモロジー上に誘導された射が同型写像になるものである．

つまり semifree 加群とは，微分を忘れると自由 A 加群であり，そこに "性質の良い" 微分が与えられているものである．よって semifree 分解とは，ホモロジーが同型になるような良い A 加群に置き換える事を意味している．また任意の A 加群に対し，その semifree 分解は必ず存在する事を注意しておく．

左 A-加群 L と, 右 A-加群 M と N に対し,

$$\mathrm{Ext}^*_A(M, N) := H^*(\mathrm{Hom}_A(P, N))$$

と定義する．ただし $\varepsilon : P \to M$ を M の A-semifree 分解である．（詳しくは [4, Appendix] を見てもらいたい）．これを用いて Gorenstein 空間の定義を次で与える．

定義 6 ([4])**.** 位相空間 M が次の条件を満たす時，次元 m の $\mathbb{K}$-**Gorenstein 空間**と呼ぶ：

$$\mathrm{Ext}^*_{C^*(M)}(\mathbb{K}, C^*(M)) \cong \begin{cases} 0 & (* \neq m) \\ \mathbb{K} & (* = m). \end{cases}$$

ここで $C^*(M)$ は M の $\mathbb{K}$ 上特異コチェイン代数である．

この定義では，直感的にどのような空間が Gorenstein 空間なのかは分かり辛い．そこで Gorenstien 空間となる位相空間の例を幾つか挙げる．

例 7. (i) 有向閉多様体は $\mathbb{K}$-Gorenstien 空間である．特に Gorenstein 空間としての次元は，多様体としての次元と一致する．また定義 6 の Ext に関する条件は，多様体のポアンカレ双対性から導かれる．よって一般に，$\mathbb{K}$-ポアンカレ双対空間も $\mathbb{K}$-Gorenstein 空間である．

(ii) 連結 Lie 群 G の分類空間 BG は $\mathbb{K}$-Gorenstein 空間である．BG の Gorenstein 空間としての次元は，$-\dim G$ である．

(iii) S^1 の２次元球面 S^2 への任意の作用に対し，これに付随する Borel 構成 $ES^1 \times_{S^1} S^2$ は $\mathbb{K}$-Gorenstein 空間であり，Gorenstein 空間としての次元は 1 である．

例 7(ii) を見ると，Gorenstein 空間の次元は正のものだけではなく負の次元を取る事が分かる．また，例 7(ii)，(iii) は次の定理によって Gorenstein 空間である事が示される．この定理は，有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の場合は Félix-Halperin-Thomas([4]) により得られた結果であり，その結果を任意の体 $\mathbb{K}$ 上に拡張したのが Murillo([9]) の結果である．

定理 8 ([4], [9])**.** 単連結空間のファイブレーション $F \to E \to B$ で，E, B は $\mathbb{K}$ 上コホモロジーが有限型で F は $\mathbb{K}$ 上コホモロジーが有限次元なものとする．この時，E が $\mathbb{K}$-Gorenstein 空間である事と，B と F が $\mathbb{K}$-Gorenstein 空間である事は同値である．次元については等式

$$\dim E = \dim B + \dim F$$

が成立する．

この定理を用いれば，例 7(ii) の BG は，普遍 G 束 $G \to EG \to BG$ から Gorenstein 空間であることが示される．また EG は可縮な空間であるから，0 次元の Gorenstein 空間である．この事から，BG の次元が $-\dim G$ である事が分かる．

係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{Q}$ の時は，Félix-Halperin-Thomas によって次の定理が示されている．

定理 9 ([4])**.** 単連結な位相空間 X で，有理ホモトピー群 $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ が有限次元なものは $\mathbb{Q}$-Gorenstein 空間である．特に，その次元は

$$\sum_{i=1}^{n} \deg\, x_i - \sum_{j}^{m} (\deg\, y_j - 1)$$

で与えられる．ここで，$\{x_i\}_{i=1}^n$ は $\pi_{\mathrm{odd}}(X) \otimes \mathbb{Q}$ の基底であり，$\{y_j\}_{j=1}^m$ は $\pi_{\mathrm{even}}(X) \otimes \mathbb{Q}$ の基底である．

3.2 Gorenstein 空間上のストリング作用素

この節では，Félix-Thomas による Gorenstein 空間上のループ (余) 積の構成について詳しく述べる．まず次の定理を紹介する．これは，Gorenstein 空間上でストリングトポロジーを展開するための鍵となる定理である．

定理 10 ([6])**.** M を単連結な次元 m の $\mathbb{K}$-Gorenstein 空間で，$\mathbb{K}$ 上コホモロジーが有限型であるものとする．この時，$\mathbb{K}$ 上ベクトル空間として次は同型である：

$$\mathrm{Ext}^*_{C^*(M^{\times 2})}(C^*(M), C^*(M^{\times 2})) \cong H^{*-m}(M; \mathbb{K}).$$

ここで $C^*(M)$ は，対角写像 $M \to M^{\times 2}$ から誘導された射により $C^*(M^{\times 2})$-加群とみなす.

この定理の $* = m$ の場合を見ると，次の同型が得られる：

$$\mathrm{Ext}^m_{C^*(M^{\times 2})}(C^*(M), C^*(M^2)) \cong H^0(M; \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}.$$

単位元 $1 \in \mathbb{K}$ に対応する，$\mathrm{Ext}^m_{C^*(M^{\times 2})}(C^*(M), C^*(M^2))$ の元を $\Delta^! : P \to C^*(M^{\times 2})$ と置く．つまり $\Delta^!$ は，次数 m の $C^*(M^{\times 2})$-準同型である．ここで $\varepsilon : P \to C^*(M)$ は $C^*(M)$ の $C^*(M^{\times 2})$-semifree 分解である．

注意 11. M が有向閉多様体の時，$\Delta^!$ が誘導するコホモロジー間の写像

$$H(\Delta^!) : H^*(M) \cong H(P) \longrightarrow H^{*+m}(M \times M)$$

は，ホモロジー $H_*(M)$ 上の交差積の双対となる．つまり定理 10 から，Gorenstein 空間においても交差積 (のようなもの) が得られる．

この $\Delta^!$ を用いて，コホモロジー $H^*(LM)$ 上に**双対ループ積**及び**双対ループ余積**を定義する．まず双対ループ積を次の合成で定義する：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Dlp} : H^*(LM) \arrow[r, "H(\mathrm{Comp})"] & H^*(LM \times_M LM) \arrow[d, "\cong"', "{\mathrm{EM}_1}^{-1}"] & \\
& H^*(P \otimes_{C^*(M^{\times 2})} C^*(LM^{\times 2})) \arrow[r, "H(\Delta^! \otimes 1)"] & H^*(LM^{\times 2}).
\end{tikzcd}$$

ここで $LM \times_M LM = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in LM \times LM \mid \gamma_1(0) = \gamma_2(0)\}$, つまり次の引き戻し図式が得られる：

$$\begin{tikzcd}
LM \times_M LM \arrow[r, "\mathrm{inclusion}"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"'] & LM \times LM \arrow[d, "\mathrm{ev}_0 \times \mathrm{ev}_0"] \\
M \arrow[r, "\text{diagonal map}"] & M \times M.
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{ev}_0 : LM \to M$ は evaluation map，つまり $\mathrm{ev}_0(\gamma) = \gamma(0)$ で定義される射である．EM_1 は上記の引き戻し図式に付随する Eilenberg-Moore 同型写像である．つまり $x \otimes a \in P \otimes_{C^*(M^{\times 2})} C^*(LM^{\times 2})$ に対し，$\mathrm{EM}_1(x \otimes a) = \mathrm{ev}_0^* \varepsilon(x) \cdot (\mathrm{inclusion})^*(a)$ で定義される．また $\mathrm{Comp} : LM \times_M LM \to LM$ はループを繋ぐ写像である．

この定義から分かるように，ループ積は本質的に写像 Comp と $\Delta^!$ から構成されている．つまり２章でも述べたが，$H_*(\Omega M)$ の Pontryagin 積と $H_*(M)$ の交差積の融合した積がループ積である．

次に双対ループ余積を次の合成で定義する：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Dlcop} : H^*(LM^{\times 2}) \arrow[r, "H(\mathrm{inclusion})"] & H^*(\mathcal{L}M \times_M LM) \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{EM}_2^{-1}"] & \\
& H^*(P \otimes_{C^*(M^{\times 2})} C^*(LM)) \arrow[r, "H(\Delta^! \otimes 1)"] & H^*(LM).
\end{tikzcd}$$

ここで EM_2 は次の引き戻し図式に付随する Eilenberg-Moore 同型写像である：

$$\begin{tikzcd}
LM \times_M LM \arrow[r, "\mathrm{Comp}"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"'] & LM \arrow[d, "l"] \\
M \arrow[r, "\text{diagonal map}"] & M \times M,
\end{tikzcd}$$

写像 l はループ γ に対して，$l(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(\frac{1}{2}))$ で定義される．

以上により，Gorenstein 空間のループコホモロジー上に双対ループ積及び双対ループ余積を構成する事が出来た．特に M が有向閉多様体の時は，Cohen-Godin のループ (余) 積の双対と一致する．

4　有理 Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論

本章では，一般の体ではなく有理数体上での議論に絞り，有理 Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論に関する著者の結果を３つの節に分けて紹介したい.

4.1　双対ループ (余) 積の結合性，及び Frobenius 恒等式

前章で，Gorenstein 空間上に双対ループ積，及び双対ループ余積を定義する事が出来た．まずはじめに，この積と余積の結合性や可換性，Frobenius 恒等式を満たすかが問題になる．これらは，Gorenstein 空間の次元に関する定数倍を除いて，結合性や可換性，Frobenius 恒等式といった性質を満たす事が予想されているが未解決な問題である．私は係数体が有理数体の場合に，次の結果を得る事が出来た.

定理 12 ([11])**.** 単連結な次元 m の $\mathbb{Q}$-Gorenstein 空間 M に対し，その双対ループ積 Dlp 及び双対ループ余積 Dlcop は次を満たす：

(i) $\mathrm{Dlp} \circ (\mathrm{Dlp} \otimes 1) = (-1)^m \mathrm{Dlp} \circ (1 \otimes \mathrm{Dlp})$（双対ループ積の結合性），

(ii) $(\mathrm{Dlcop} \otimes 1) \circ \mathrm{Dlcop} = (-1)^m (1 \otimes \mathrm{Dlcop}) \circ \mathrm{Dlcop}$（双対ループ余積の結合性），

(iii) $\mathrm{Dlp} \circ \mathrm{Dlcop} = (-1)^m (\mathrm{Dlcop} \otimes 1) \circ (1 \otimes \mathrm{Dlp})$（双対 Frobenius 恒等式）

$$= (-1)^m (1 \otimes \mathrm{Dlcop}) \circ (\mathrm{Dlp} \otimes 1).$$

定理の証明のアイデアについて述べたいと思う．係数体が有理数体の場合，特異コチェイン代数の代わりに，ある次数付き可換な DG 代数をとる事が出来る．その可換性を使い，上手く semifree 分解を取る事で，定理の等式を証明する事が出来た．詳しくは，[11] を参照してほしい.

残念ながら，この定理と同じ証明の方針では，双対ループ (余) 積の可換性については示す事は出来ない．しかし，具体例の計算を行うと，どの例も可換性を満たしている事が分かる．よって筆者は，有理数体上の場合は，双対ループ (余) 積の可換性についても，同様の結果が成り立つ事を期待している.

4.2　コンパクト連結 Lie 群の分類空間上のストリング作用素

コンパクト連結 Lie 群 G の分類空間 BG に着目し，そのストリング作用素について考察を行う．序文でも述べたが，BG 上のストリングトポロジーの理論については，Félix-Thomas の双対ループ (余) 積の構成以前に，Chataur-Menichi([2]) によって考えられていた．更に彼らは，BG のループホモロジー上にホモロジー的共形場理論の構造も発見している．初めに，分類空間上の双対ループ積に関する次の定理を紹介する.

定理 13 ([6])**.** 係数体が有理数体の場合は，BG の双対ループ積は自明である.

定理 4 では，有向閉多様体のループ余積が殆ど自明である事を述べた．つまり，有向閉多様体と分類空間 BG は，ストリング作用素に対しは双対的な関係である事が分かる.

次に，双対ループ余積の構造に着目する．分類空間のループ余積の構造については，Kuribayashi-Menichi([8]) によって計算されている．一方，私は有理数体上の場合に，有理ホモトピー論という彼らとは違う手法で下記の計算結果を得る事が出来た.

定理 14 ([8],[10])**.** BG をコンパクト連結 Lie 群 G の分類空間とし，その有理係数コホモロジー環を $H^*(BG;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ とする．この時, 自由ループ空間のコホモロ

ジー環は

$$H^*(LBG;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x_1,\cdots,x_n] \otimes \Lambda(sx_1,\cdots,sx_n)\ (\deg\, sx_i = \deg\, x_i - 1)$$

であり，双対ループ余積は次を満たす：

$$\mathrm{Dlcop}\Big((\omega_1 \otimes sx_{(I)}) \otimes (\omega_2 \otimes sx_{(J)})\Big) = \begin{cases} (-1)^{\varepsilon}\omega_1\omega_2 \otimes sx_{(I\cap J)} & (\{1,\cdots,n\} = I \cup J) \\ 0 & (otherwise). \end{cases}$$

ここで，$I, J \subset \{1,2,\cdots,n\}$ であり，$I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$ の時,

$$sx_{(I)} = sx_{i_1}sx_{i_2}\cdots sx_{i_k}$$

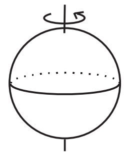
と書き表す．ただし I が空集合の時は，$sx_{(I)} = 1$ とする．また $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Q}[x_1,\cdots,x_n]$. 更に $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \#(J - I \cap J)$ であり，ε_1 と ε_2 は次の等式を満たす Koszul 符号である：

$$\begin{aligned} sx_{(J)} &= (-1)^{\varepsilon_1} sx_{(J-I\cap J)}sx_{(I\cap J)}, \\ sx_1sx_2\cdots sx_n &= (-1)^{\varepsilon_2} sx_{(I)}sx_{(J-I\cap J)}. \end{aligned}$$

4.3 Borel 構成 $ES^1 \times_{S^1} S^2$ のストリング作用素

Gorenstein 空間上のストリング作用素をより理解する為にも，多様体や分類空間以外の具体的な計算例が欲しい．しかし，一般的にストリング作用素の構造を具体的に計算するのは困難であり，多様体ではない Gorenstein 空間でストリング作用素が計算されている例は，分類空間以外は見当たらない．本節では，新たに得られた計算例を紹介したい．

S^1 の $S^2 = \{(z,r) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R} \mid |z|^2 + r^2 = 1\}$ への作用を，$t\cdot(z,r) = (tz,r)$ と定める．つまり下図の様に，縦軸に対し S^2 を 1 回転させる作用である.



これに付随する Borel 構成 $ES^1 \times_{S^1} S^2$ を考える．また $ES^1 \times_{S^1} S^2$ は，次元 1 の $\mathbb{Q}$-Gorenstein 空間である.

例 15 ([10])**.** M を上記の Borel 構成とする．LM の有理係数コホモロジーは $\mathbb{Q}$ 上ベクトル空間として次と同型である：

$$\begin{aligned} &H^*(LM;\mathbb{Q}) \cong A_1 \oplus A_2, \\ &A_1 = \mathbb{Q}\langle 1,\ x_i,\ sx_j,\ y_i,\ sy_j \mid i \geq 1,\ j \geq 0\rangle, \\ &\qquad\qquad (\deg\, x_i = \deg\, y_i = 2i,\ \deg\, sx_i = \deg\, sy_i = 2i+1), \\ &A_2 = \mathbb{Q}\langle v_n,\ w_m\ | n \geq 2,\ m \geq 1\rangle,\ \ (\deg\, v_n = 2n-2,\ \deg\, w_m = 2m+1). \end{aligned}$$

ここで，$\mathbb{Q}\langle a, b, \cdots\rangle$ は，$a, b, \cdots$ を基底とする $\mathbb{Q}$ 上ベクトル空間である.

双対ループ余積は次を満たす：

$$\mathrm{Dlcop}(z \otimes z') = \begin{cases} x_{i+j+1} & ((z,z') = (x_i, sx_j)\ or\ (sx_j, -x_i)), \\ -sx_{i+j+1} & ((z,z') = (sx_i, sx_j)\ or\ (sx_j, sx_i)), \\ -y_{i+j+1} & ((z,z') = (y_i, sy_j)\ or\ (sy_j, -y_i)), \\ sy_{i+j+1} & ((z,z') = (sy_i, sy_j)\ or\ (sy_j, sy_i)), \\ -w_1 & ((z,z') = (sx_0, sy_0)\ or\ (sy_0, sx_0)), \\ 0 & (otherwise). \end{cases}$$

双対ループ積は次を満たす : $\mathrm{Dlp}(A_1)=\{0\}$, $\mathrm{Dlp}(w_1)=0$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Dlp}(w_m) =& (m-1)w_1\otimes w_{m-1}\\ &+\sum_{i=2}^{m-2}(-1)^{i+1}\Big(\frac{(m-1)!}{(i-1)!(m-i-1)!}w_i\otimes w_{m-i}\Big)\\ &+(-1)^m(m-1)w_{n-1}\otimes w_1.\\ \mathrm{Dlp}(v_n) =& nw_1\otimes v_{n-1}\\ &+\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}\frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!}\Big((n-i+1)w_i\otimes v_{n-i}\\ &\qquad\qquad -(i-1)v_{i-2}\otimes w_{n-i+2}\Big)\\ &+(-1)^{n+1}nv_{n-1}\otimes w_1.\end{aligned}$$

この証明には，Sullivan の極小モデルを用いる．これを用いると，自由ループ空間 LM の有理係数特異コチェイン代数 $C^*(LM;\mathbb{Q})$ は，（極小 Sullivan モデルと呼ばれる）計算可能な $\mathbb{Q}$ 上次数付き可換な DG 代数に置き換える事が出来る．更に双対ループ (余) 積を極小 Sullivan モデルの言葉による記述を行い，それを用いて上記の例を得る事が出来た．

Borel 構成 $ES^1\times_{S^1}S^2$ は，多様体や分類空間の様な，ループ積とループ余積のどちらかが殆ど自明という偏った構造ではなく，ループ積とループ余積が共に十分非自明な作用素を持つ例であることが分かる．これを踏まえると，ストリング作用素は多様体のクラスよりも，Gorenstein 空間のクラスから捉えた方が良いのではと筆者は考えている．

参考文献

[1] M. Chas and D. Sullivan, String topology, arXiv:math.GT/9911159.

[2] D. Chataur and L. Menichi, String topology of classifying spaces, arXiv:math.AT/0801.0174.

[3] R. L. Cohen, V. Godin, A polarized view of string topology, Topology, geometry and quantum field theory, 127-154, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[4] Y. Félix, S. Halperin, J. -C. Thomas, Gorenstein spaces. Adv. in Math. 71 (1988), no. 1, 92-112.

[5] Y. Félix, S. Halperin, J. -C. Thomas, Rational Homotopy Theory, Graduate Texts in Mathematics, 205. Springer-Verlag.

[6] Y. Félix and J. -C. Thomas, String topology on Gorenstein spaces, Math. Ann., 345 (2009), no. 2, 417-452.

[7] V. Godin, Higher string topology operations, arXiv:math.AT/0711.4859.

[8] K. Kuribayashi and L. Menichi, On the loop (co)products on the classifying space of a Lie group, preprint.

[9] A. Murillo, The virtual Spivak fiber, duality on fibrations and Gorenstein spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), no. 8, 3577-3587.

[10] T.Naito, Computational examples of rational string operations on Gorenstein spaces, preprint.

[11] T.Naito, String topology on rational Gorenstein spaces, arXiv:1301.1785.

[12] H. Tamanoi, Loop coproducts in string topology and triviality of higher genus TQFT operations, J. Pure Appl. Algebra, 214 (2010), 605-615.