

$GL(n; \mathbb{Z})$ の level 2 主合同部分群の有限表示とその応用

小林竜馬 (東京理科大学)*

Abstract

$GL(n; \mathbb{Z})$ の level 2 主合同部分群 $\Gamma_2(n)$ の生成系は古くから知られていたが, 具体的な表示は不明であった. 著者はこの群の有限表示を与えた. 本稿では $\Gamma_2(n)$ の具体的な有限表示を紹介するとともに, 非有向曲面の Torelli 群への応用について解説する.

1. Introduction

$n \geq 1$ に対して, $\Gamma_2(n)$ で自然な全射準同型写像 $GL(n; \mathbb{Z}) \rightarrow GL(n; \mathbb{Z}_2)$ の核を表し, $GL(n; \mathbb{Z})$ の level 2 主合同部分群と呼ぶ. $A \in \Gamma_2(n)$ は対角成分が奇数でありそれ以外の成分は偶数であることに注意する.

$1 \leq i, j \leq n$ ($i \neq j$) に対して, E_{ij} で (i, j) -成分が 2, 対角成分が 1, それ以外の成分が 0 の行列を表す. また, $1 \leq i \leq n$ に対して, F_i で (i, i) -成分が -1 , それ以外の対角成分が 1, それ以外の成分が 0 の行列を表す. $\Gamma_2(n)$ が E_{ij} と F_i で生成されることは Wall や McCarthy-Pinkall [15] 等によって知られていた. 著者は $\Gamma_2(n)$ の有限表示を具体的に与えた ([12] 参照).

Theorem 1.1. $n \geq 1$ に対して, $\Gamma_2(n)$ は E_{ij} と F_i で生成され, 次の関係子を持つ:

1. F_i^2 ,
2. $(E_{ij}F_i)^2, (E_{ij}F_j)^2, (F_iF_j)^2$ ($n \geq 2$),
3. (a) $[E_{ij}, E_{ik}], [E_{ij}, E_{kj}], [E_{ij}, F_k], [E_{ij}, E_{ki}]E_{kj}^2$ ($n \geq 3$),
(b) $(E_{ji}E_{ij}^{-1}E_{kj}^{-1}E_{jk}E_{ik}E_{ki}^{-1})^2$ ($i < j < k$) ($n \geq 3$),
4. $[E_{ij}, E_{kl}]$ ($n \geq 4$).

ただし, $[X, Y]$ で $X^{-1}Y^{-1}XY$ を表し, $1 \leq i, j, k, l \leq n$ は互いに異なるとする.

$\Gamma_2(n)$ の有限表示は Fullarton [6] や Margalit-Putman 等によっても独立に求められている. 本稿では, 主結果の証明のアイデアを紹介し, 非有向曲面の Torelli 群への応用について解説する.

2. 群表示の基礎

ここでは, 本研究で用いた群表示に関する基礎的なことについて説明する. より詳しくは [11] 等を参照することを推奨する.

2.1. Tietze 変換

表示群 $G = \langle X \mid R \rangle$ に対して, $s \in G$ が R の consequence であるとは, s が

$$s = (w_1 r_{j(l)}^{m(l)} w_1^{-1}) \cdots (w_2 r_{j(2)}^{m(2)} w_2^{-1}) (w_1 r_{j(1)}^{m(1)} w_1^{-1})$$

のように書き表せることをいう. ここに, $r_{j(i)}$ は R の要素であり w_i は X 上の語である.

2010 Mathematics Subject Classification: 57M07, 57S05.

Keywords: congruence subgroup, Torelli group.

* e-mail: kobayashi_ryoma@ma.noda.tus.ac.jp

Definition 2.1. 有限表示群 $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_k \rangle$ に対して, ξ を x_1, x_2, \dots, x_n の語, s を r_1, r_2, \dots, r_k の *consequence* とする. このとき, 次の操作を Tietze 変換という:

1. $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_k \rangle \longleftrightarrow \langle x_1, x_2, \dots, x_n, x \mid r_1, r_2, \dots, r_k, x\xi^{-1} \rangle,$
2. $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_k \rangle \longleftrightarrow \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_k, s \rangle.$

2つの有限表示群が有限回の Tietze 変換で移り合えば, もちろんそれらは互いに同型である. 次の命題が成り立つ.

Proposition 2.2. 2つの有限表示群が同型ならば, それらは有限回の Tietze 変換で移り合う.

2.2. 短完全列と群表示

短完全列

$$1 \rightarrow G_1 \xrightarrow{\phi} G_2 \xrightarrow{\pi} G_3 \rightarrow 1$$

を考える. ここでは, G_1 と G_3 の表示から G_2 の表示を得る方法について説明する.

G_1 及び G_3 の表示をそれぞれ $G_1 = \langle X_1 \mid R_1 \rangle, G_3 = \langle X_3 \mid R_3 \rangle$ で与える. 各 $x \in X_3$ に対して $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ を 1 つ選ぶ. X_2 を

$$X_2 = \{ \phi(x_1), \tilde{x}_3 \mid x_1 \in X_1, x_3 \in X_3 \}$$

で定義する. $r = a_1 a_2 \cdots a_n \in R_3$ に対して, \tilde{r} を $\tilde{r} = \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \cdots \tilde{a}_n$ とする. $g \in \ker \pi$ に対して, \bar{g} で g を $\phi(X_1)$ 上の語で書き直したものを表す. このとき, A, B, C をそれぞれ

$$\begin{aligned} A &= \{ \phi(r_1) \mid r_1 \in R_1 \}, \\ B &= \{ \tilde{r}_3 \tilde{r}_3^{-1} \mid r_3 \in R_3 \}, \\ C &= \{ \tilde{x}_3 \phi(x_1) \tilde{x}_3^{-1} \overline{\tilde{x}_3 \phi(x_1) \tilde{x}_3^{-1}}^{-1} \mid x_1 \in X_1, x_3 \in X_3 \} \end{aligned}$$

で定義し, R_2 を $R_2 = A \cup B \cup C$ とする. このとき, G_2 の表示は

$$G_2 = \langle X_2 \mid R_2 \rangle$$

で与えられる. 特に, X_1, X_3, R_1, R_3 が有限集合, すなわち G_1 と G_3 が有限表示を持つとき, G_2 も有限表示可能である. また, 準同型写像 $\rho: G_3 \rightarrow G_2$ で $\pi\rho = id_{G_3}$ をみたくものが存在するとき, 各 $x \in X_3$ に対して $\tilde{x} \in \pi(x)^{-1}$ として $\rho(x)$ を選ぶ.

2.3. Reidemeister-Schreier 手法

表示群 $G = \langle X \mid R \rangle$ に対して, その部分群 H の表示を求める手法 (Reidemeister-Schreier 手法) について説明する.

Definition 2.3. $U \subset G$ が G の H に対する左 Schreier transversal であるとは, U は H の左剰余類の代表元の集合であり, Schreier 性質

$$g_n \cdots g_2 g_1 \in U \implies g_{n-1} \cdots g_2 g_1 \in U$$

をみたくことをいう. ここに, 各 g_i は $X^{\pm 1}$ の要素である.

左 Schreier transversal U を 1 つ選ぶ . $g \in G$ に対して $\bar{g} \in U$ を g が属する H の左剰余類の代表元で定義する . このとき , H の生成系 B は

$$B = \{\overline{xu^{-1}xu} \mid x \in X^{\pm 1}, u \in U, xu \notin U\}$$

により定まる . 各 $r_n \cdots r_2 r_1 \in R$ 及び $u \in U$ に対して , s_{ru} を

$$s_{ru} = (u^{-1} r_n \overline{r_{n-1} \cdots r_1 u}) \cdots (\overline{r_2 r_1 u^{-1} r_2 r_1 u}) (\overline{r_1 u^{-1} r_1 u})$$

で定義する . このとき , 各 $\overline{r_i \cdots r_1 u^{-1} r_i r_{i-1} \cdots r_1 u}$ は $B \cup \{1\}$ の要素であることに注意する . H の関係子の集合 S は

$$S = \{s_{ru} \mid r \in R, u \in U\}$$

で定まる . つまり , H の表示は

$$H = \langle B \mid S \rangle$$

で与えられる . 特に , G が有限表示可能であり H の G における指数が有限のとき , H は有限表示可能である .

3. $\Gamma_2(n)$ が作用する単体複体

一般に , 群 G が作用する単連結な単体複体 X を用いて G の表示を調べる手法がある ([2] 参照) . ここでは , $\Gamma_2(n)$ が作用する単連結な単体複体を紹介する . 初めに , Day-Putman [4] により導入された単体複体を紹介する .

Definition 3.1 ([4]). $1 \leq k \leq n$ に対して , $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset \mathbb{Z}^n$ が $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ の $(k-1)$ -単体であるとは , ある $A \in GL(n; \mathbb{Z})$ が存在して各 x_i に対して $Ae_j = x_i$ となる相異なる $1 \leq j \leq n$ が存在することをいう . ただし , e_1, e_2, \dots, e_n は標準単位ベクトルである .

言い換えれば , $A \in GL(n; \mathbb{Z})$ の相異なる k 個の列ベクトルの組が $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ の $(k-1)$ -単体である . また , $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ は $n-1$ 次元の単体複体である .

Definition 3.2. $A \in GL(n; \mathbb{Z})$ と $\Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in \mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ に対して $A\Delta = \{Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_k\}$ により $GL(n; \mathbb{Z})$ の $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ への作用を定める . また , $\Gamma_2(n)$ の $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ への作用も同様に定義される .

Proposition 3.3 ([4]). $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ は $(n-2)$ -連結である . 特に $n \geq 3$ に対して $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ は単連結である .

この命題により , $n \geq 3$ に対して Brown の手法を適用し $\Gamma_2(n)$ の表示を調べることが可能である . しかし , $\Gamma_2(n)$ の $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ への作用に対して Brown の手法を用いると , 計算量が莫大になり非常に大変である . そこで , 次の複体を導入する .

Definition 3.4. $1 \leq k \leq n$ に対して , $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset \mathbb{Z}^n$ が $\Gamma_2 \mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ の $(k-1)$ -単体であるとは , ある $A \in \Gamma_2(n)$ が存在して各 x_i に対して $Ae_j = x_i$ となる相異なる $1 \leq j \leq n$ が存在することをいう .

言い換えれば , $A \in \Gamma_2(n)$ の相異なる k 個の列ベクトルの組が $\Gamma_2 \mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ の $(k-1)$ -単体である . また , $\Gamma_2 \mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ は $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ の $n-1$ 次元の部分複体である .

Definition 3.5. $A \in \Gamma_2(n)$ と $\Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in \Gamma_2 \mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ に対して $A\Delta = \{Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_k\}$ により $\Gamma_2(n)$ の $\Gamma_2 \mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ への作用を定める .

本研究の最大の鍵となる命題を紹介する .

Proposition 3.6. $n \geq 4$ に対して $\Gamma_2 \mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ は単連結である .

4. 主結果の証明の概略

V を $B_n(\mathbb{Z})$ の頂点集合とする．各 $v \in V$ に対して $\Gamma_2(n)_v$ を $\Gamma_2(n)_v = \{A \in \Gamma_2(n) \mid Av = v\}$ で定義し, $\Gamma_2(n)_v$ たちの自由積 $\ast_{v \in V} \Gamma_2(n)_v$ の部分群とみなす．また, $A \in \Gamma_2(n)_v$ を A_v と書くことにする．つまり, $A \in \Gamma_2(n)_v \cap \Gamma_2(n)_w$ に対して A_v と A_w を区別する． $A_v A_w^{-1} \in \ast_{v \in V} \Gamma_2(n)_v$ を edge relator と呼ぶ．まず次の補題を用意する．

Lemma 4.1. 次の短完全列が存在する：

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \Gamma_2(n)_v \rightarrow \Gamma_2(n-1) \rightarrow 1.$$

この補題と Brown [2] の手法を用いることで, n に関する帰納法により $\Gamma_2(n)$ の表示を得る．

4.1. $n = 2$ の場合

$\Gamma_2(2)$ の表示は $GL(2; \mathbb{Z})$ の表示から Reidemeister-Schreier 手法を用いることで得られる． $GL(2; \mathbb{Z})$ の有限表示は Serre [17] 等により知られている．具体的な表示は

$$GL(2; \mathbb{Z}) = \langle x, y, z \mid xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}, (xy)^6, z^2, xzyz \rangle$$

で与えられる．ここに, x, y, z はそれぞれ

$$x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

である．Schreier transversal U としては,

$$U = \{1, x^{-1}, y, z, x^{-1}z, yz\}$$

を選ぶ．これにより, 適宜 Tietze 変換を施すことで $\Gamma_2(2)$ の表示が得られる．

4.2. $n = 3$ の場合

$v_1, v_2, \dots, v_7 \in B_3(\mathbb{Z})$ をそれぞれ $v_1 = e_1, v_2 = e_2, v_3 = e_3, v_4 = e_1 + e_2, v_5 = e_1 + e_3, v_6 = e_2 + e_3, v_7 = e_1 + e_2 + e_3$ とする．このとき, $\Gamma_2(3)$ の $B_3(\mathbb{Z})$ への作用に対して Brown の手法を適用することで次が得られる．

Proposition 4.2. $\Gamma_2(3)$ は $(\ast_{1 \leq i \leq 7} \Gamma_2(3)_{v_i}) / \langle \text{edge relators} \rangle$ と同型である．

この命題により, 各 $\Gamma_2(3)_{v_i}$ の表示が得られれば $\Gamma_2(3)$ の表示が求まる．また, $\Gamma_2(3)_{v_i}$ の表示は Lemma 4.1 と $\Gamma_2(2)$ の表示から得られる．

4.3. $n \geq 4$ の場合

$n \geq 4$ については, $\Gamma_2(n)$ の $\Gamma_2 B_n(\mathbb{Z})$ への作用に対して Brown の手法を適用することで次が得られる．

Proposition 4.3. $n \geq 4$ に対して, $\Gamma_2(n)$ は $(\ast_{1 \leq i \leq n} \Gamma_2(n)_{e_i}) / \langle \text{edge relators} \rangle$ と同型である．

この命題から, 各 $\Gamma_2(n)_{e_i}$ の表示が分かれば $\Gamma_2(n)$ の表示は得られる． $n = 3$ の場合と同様にして, Lemma 4.1 を用いることで $\Gamma_2(n)_{e_i}$ の表示が求まり, n に関する帰納法により $\Gamma_2(n)$ の表示を得る．

5. Torelli 群への応用

ここでは, 本研究の背景及び応用について解説する．

5.1. 非有向曲面の写像類群

N_g で種数 g の非有向閉曲面を表す．つまり， N_g は実射影平面 $\mathbb{R}P^2$ を g 個連結和したものである．本稿では N_g を，球面から円板を g 個取り除き，各境界にメビウス帯を貼りつけたものとみなす (Figure 1 参照) ．

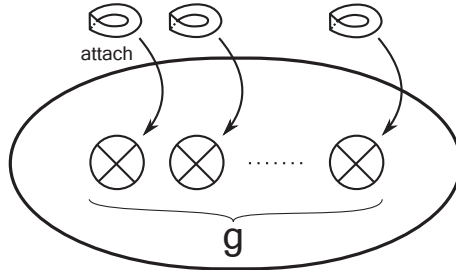


Figure 1: 種数 g の非有向閉曲面 N_g .

$\mathcal{M}(N_g)$ で N_g 上の微分同相写像のアイソトピー類全体からなる群を表し， N_g の写像類群と呼ぶ．本稿では有向曲面の写像類群は扱わないが，有向曲面の写像類群に関連する話題について解説することがある．有向曲面の写像類群については [5] 等を適宜参照するとよい．

N_g 上の単純閉曲線 c が A -circle であるとは， c の N_g における正則近傍がアニュラスのときをいう (Figure 2 (a) 参照) ．また， c が M -circle であるとは， c の N_g における正則近傍がメビウス帯のときをいう (Figure 2 (b) 参照) ．

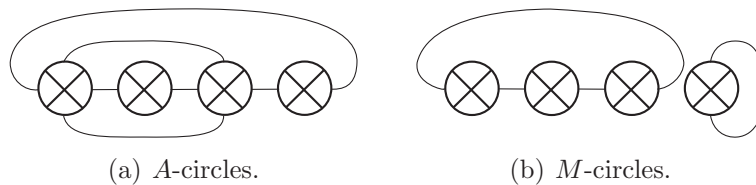


Figure 2:

A -circle c に対して， c に沿った Dehn twist t_c が定義できる (Figure 3 参照) ． m を M -circle, a を A -circle とし，互いに横断的に一点で交わるものとする．ここで， Y -同相写像 $Y_{m,a}$ を定義する．まず， $K \subset N_g$ を $m \cup a$ の正則近傍とし， $M \subset N_g$ を m の正則近傍で K の内部に含まれるものとする． K の境界を固定したまま M を a に沿って一周させる写像類を $Y_{m,a}$ と書き， Y -同相写像と呼ぶ (Figure 4 参照) ．

Lickorish [13] は $\mathcal{M}(N_g)$ が Dehn twist 及び Y -同相写像で生成されることを示した．また，Lickorish [14] は，Dehn twist のみで生成される $\mathcal{M}(N_g)$ の部分群の指数は 2 であることも示した．これは， $\mathcal{M}(N_g)$ は Dehn twist のみでは生成不可能であり， Y -同相写像も必要であることを意味している．さらに， Y -同相写像は $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$ に自明に作用することから， $\mathcal{M}(N_g)$ は Y -同相写像のみでは生成不可能であることも分かる．

$\mathcal{M}(N_g)$ の有限生成系は Chillingworth [3] や Szepietowski [20] 等によって具体的に与えられている． $\mathcal{M}(N_1)$, $\mathcal{M}(N_2)$ の有限表示は古典的に知られていた．また，Birman-Chillingworth [1] は $\mathcal{M}(N_3)$ の有限表示を与えている．さらに，Szepietowski [19] は $\mathcal{M}(N_4)$ の有限表示を与えている． $g \geq 5$ については，最近 Paris-Szepietowski [16] や Stukow [18] によってその有限表示は与えられた．

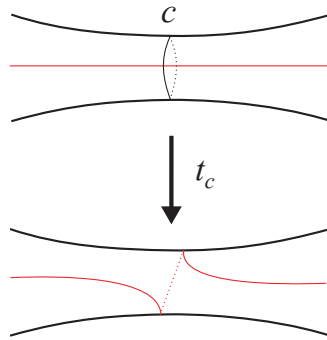


Figure 3: c に沿った Dehn twist t_c .

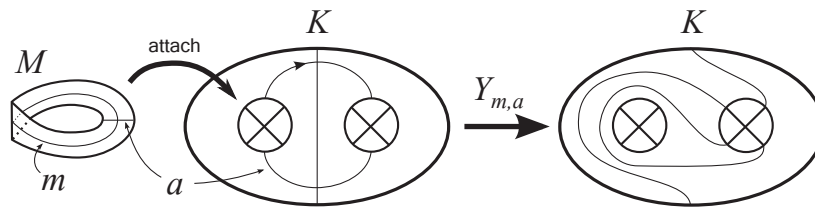


Figure 4:

5.2. 非有向曲面の Torelli 群

$R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$ に対して, N_g の R -係数一次ホモロジー群 $H_1(N_g; R)$ を考える. $\text{Aut}(H_1(N_g; R), \cdot)$ で mod 2 交叉形式 $\cdot : H_1(N_g; R) \times H_1(N_g; R) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ を保つ $H_1(N_g; R)$ 上の自己同型群を表す. また, 自然な全射準同型写像

$$\Phi_g : \text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}), \cdot) \rightarrow \text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$$

を考える. 次の事実がある.

Proposition 5.1 ([15]). $\ker \Phi_g$ は $\Gamma_2(g-1)$ と同型である.

また, McCarthy-Pinkall [15] 及び Gadgil-Pancholi [7] は次も示した.

Theorem 5.2 ([15], [7]). 自然な準同型写像 $\mathcal{M}(N_g) \rightarrow \text{Aut}(H_1(N_g; R), \cdot)$ は全射である.

$\mathcal{I}(N_g)$ でこの全射準同型写像 $\mathcal{M}(N_g) \rightarrow \text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}), \cdot)$ の核を表し, N_g の Torelli 群と呼ぶ. また, $\Gamma_2(N_g)$ で $\mathcal{M}(N_g) \rightarrow \text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ の核を表し, N_g の level 2 写像類群と呼ぶ. 著者は, 東京理科大学の廣瀬進氏との共同研究で $\mathcal{I}(N_g)$ の生成系を得た ([8] 参照).

Dehn twist t_c が BSCC 写像であるとは, $N_g \setminus c$ が非連結のきをいう (Figure 5 (a) 参照). また, $t_{c_1} t_{c_2}^{-1}$ が BP 写像であるとは, $N_g \setminus c_1, N_g \setminus c_2$ は連結だが $N_g \setminus (c_1 \cup c_2)$ は非連結で, その連結成分の 1 つは有向曲面であるときをいう (Figure 5 (b) 参照). BSCC 写像や BP 写像は $\mathcal{I}(N_g)$ の要素である.

Theorem 5.3. $g \geq 5$ に対して, $\mathcal{I}(N_g)$ は次の写像類で生成される:

1. $N_g \setminus c$ の連結成分の 1 つが種数 2 の非有向曲面, もう 1 つが非有向曲面であるような BSCC 写像 t_c ,
2. $N_g \setminus (c_1 \cup c_2)$ の連結成分の 1 つが種数 1 の有向曲面, もう 1 つが $g \geq 5$ のとき非有向曲面であるような BP 写像 $t_{c_1} t_{c_2}^{-1}$.

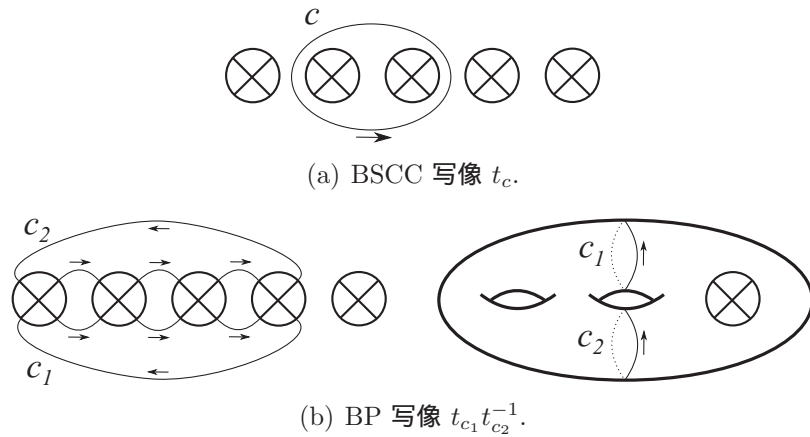


Figure 5:

また, $\mathcal{I}(N_4)$ は次の写像類で生成される:

1. $N_g \setminus c$ の連結成分の 1 つが種数 2 の非有向曲面, もう 1 つが非有向曲面であるような BSCC 写像 t_c ,
2. $N_g \setminus c$ の連結成分の 1 つが種数 2 の非有向曲面, もう 1 つが有向曲面であるような BSCC 写像 t_c ,
3. $N_g \setminus (c_1 \cup c_2)$ の連結成分の 1 つが種数 1 の有向曲面であるような BP 写像 $t_{c_1}t_{c_2}^{-1}$.

次の短完全列

$$1 \rightarrow \mathcal{I}(N_g) \rightarrow \Gamma_2(N_g) \rightarrow \ker \Phi_g \rightarrow 1$$

を用いて, $\Gamma_2(N_g)$ の生成系と $\ker \Phi_g (\cong \Gamma_2(g-1))$ の表示から $\mathcal{I}(N_g)$ の生成系を調べた. 尚, $\Gamma_2(N_g)$ の生成系は Szepietowski [21] や Hirose-Sato [9] 等によって与えられている.

6. いくつかの問題

Problem 6.1. $\Gamma_2\mathcal{B}_3(\mathbb{Z})$ が単連結か否かを決定せよ.

Proposition 3.6 において $n \geq 4$ のとき $\Gamma_2\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ は単連結であることを述べた. もし $\Gamma_2\mathcal{B}_3(\mathbb{Z})$ が単連結であるとする, $\Gamma_2(3)$ の表示を調べる際に $\mathcal{B}_3(\mathbb{Z})$ への作用ではなく $\Gamma_2\mathcal{B}_3(\mathbb{Z})$ への作用に対して Brown [2] の手法を適用できる. 仮に $\Gamma_2\mathcal{B}_3(\mathbb{Z})$ が単連結であるとして Brown の手法を適用すると, $\Gamma_2(n)$ の関係子 $(E_{ji}E_{ij}^{-1}E_{kj}^{-1}E_{jk}E_{ik}E_{ki}^{-1})^2$ が消えることが分かる. 逆に, この関係子が他の関係子から得られるとすると $\Gamma_2\mathcal{B}_3(\mathbb{Z})$ が単連結であることも分かる.

Problem 6.2. $\Gamma_2\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ の高次連結性を調べよ.

Proposition 3.3 において $n \geq 3$ に対して $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ は $(n-2)$ -連結であることを述べた. この事実からも, $\Gamma_2\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ の高次連結性を考えることは自然である.

Problem 6.3. $\mathcal{I}(N_g)$ は BP 写像のみで生成可能かを決定せよ.

Problem 6.4. $\mathcal{I}(N_g)$ は有限生成可能かを決定せよ.

Johnson [10] は有向曲面の Torelli 群は BP 写像のみで有限生成されることを示している. 従って, $\mathcal{I}(N_g)$ について上の問題を解決することには重要な意味がある.

References

- [1] J.S. Birman, D.R.J. Chillingworth, On the homeotopy group of a non-orientable surface, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 71 (1972) 437-448. Erratum: *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 136 (2004) 441-441.
- [2] K.S. Brown, Presentations for groups acting on simply connected complexes, *J. Pure Appl. Algebra* 32, no. 1 (1984) 1-10.
- [3] D.R.J. Chillingworth, A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 65 (1969) 409-430.
- [4] M. Day, A. Putman, The complex of partial bases for F_n and finite generation of the Torelli subgroup of $\text{Aut}(F_n)$, *Geom. Dedicata* 164 (2013) 139-153.
- [5] B. Farb, D. Margalit, A primer on mapping class groups, Princeton Mathematical Series, 49. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [6] N.J. Fullarton, A generating set for the palindromic Torelli group, preprint.
- [7] S. Gadgil, D. Pancholi, Homeomorphisms and the homology of non-orientable surfaces, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* Vol. 115, No. 3 (2005) 251-257.
- [8] S. Hirose, R. Kobayashi, A generating set for the Torelli group of a non-orientable closed surface, in preparation.
- [9] S. Hirose, M. Sato, A minimal generating set of the level 2 mapping class group of a non-orientable surface, arXiv:1306.5382v1 [math.GT], 2013.
- [10] D. Johnson, The structure of the Torelli group. I. A finite set of generators for \mathcal{T} , *Ann. of Math. (2)*, 118(3) (1983) 423-442.
- [11] D. Johnson, Presentations of Groups, London Math. Soc. Stud. Texts 15, 1990.
- [12] R. Kobayashi, A finite presentation of the level 2 principal congruence subgroup of $GL(n; \mathbb{Z})$, arXiv:1407.1612 [math.GT], 2014.
- [13] W.B.R. Lickorish, Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 59 (1963) 307-317.
- [14] W.B.R. Lickorish, On the homeomorphisms of a non-orientable surface, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 61 (1965) 61-64.
- [15] J.D. McCarthy, U. Pinkall, Representing homology automorphisms of nonorientable surfaces, Max Planck Inst. preprint MPI/SFB 85-11, revised version written in 2004. Available at <http://www.math.msu.edu/~mccarthy>.
- [16] L. Paris, B. Szepietowski. A presentation for the mapping class group of a nonorientable surface. arXiv:1308.5856 [math.GT], 2013.
- [17] J.P. Serre, *Trees*, Translated from the French original by John Stillwell, corrected 2nd printing of the 1980 English translation. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [18] M. Stukow, A finite presentation for the mapping class group of a nonorientable surface with Dehn twists and one crosscap slide as generators, arXiv:1310.2722 [math.GT], 2013.
- [19] B. Szepietowski, A presentation for the mapping class group of the closed non-orientable surface of genus 4. *J. Pure Appl. Algebra* 213 (2009) no. 11, 2001-2016.
- [20] B. Szepietowski, Crosscap slides and the level 2 mapping class group of a nonorientable surface, *Geom. Dedicata* 160 (2012) 169-183.
- [21] B. Szepietowski, A finite generating set for the level 2 mapping class group of a nonorientable surface. *Kodai Math. J.* 36 (2013) no. 1, 1-14.