ゲージ理論のいくつかの側面

東京大学数理科学研究科　　　古田 幹雄

概 要

第一にゲージ理論の基本的な枠組みを説明し、第二にゲージ理論のいくつかの側面を具体的な３つの議論を例として説明する。前者のポイントは、無限次元空間の幾何学であって有限次元的な対象に帰着可能である状況の設定にある。後者で取り上げるのは、（１）制約条件のある TQFT としての側面、（２）$K3$ 曲面の Seiberg-Witten 不変量の計算、（３）４次元多様体の可微分構造を調べる道具としての使い方の例、である。[1]。

1　ゲージ理論とは —— 接続の空間のもつ対称性

1.1　接続、曲率

G を Lie 群、$\mathfrak{g} = (TG)_e$ を G の Lie 環、P を多様体 X の上の G 主束とする。

P 上の接続 A とは、主束 P の上の「右 G 不変な『水平方向分布』」のことであった。特に P が自明な主束 $P = X \times G$ であるとき、接続 A は接続形式と呼ばれる $\mathfrak{g}$ 値 1-form a によって表示された。ここで「$a = \{a_x\}_{x \in X}$ が接続 A の接続形式である」とは、「接ベクトル $(u, v) \in (TX)_x \oplus (TG)_e$ の水平性」が、線形写像 $a_x : (TX)_x \to \mathfrak{g}$ によって

$$au + v = 0$$

として特徴付けられることであった。

ゲージ理論の考察の対象は接続 A に対する偏微分方程式とその解の空間である。ただし、解が次の同値関係に対して保たれるような、偏微分方程式を考える。多様体 X は以下固定する。

P と A の他に、主束 P' と P' の上の接続 A' が与えられたとする。ペア (P, A) とペア (P', A') とが同型であるとは、「主束間のある同型 $\phi : P' \to P$ によって $A' = \phi^* A$ となること」である。ペア (P, A) のすべての可能な同型類を考察するには、第一に、主束 P の主束としての同型類の可能性をひとつずつピックアップし、第二にそれら全ての P に対して次の $\mathcal{B}_P$ を考えればよい。P の自己同型群 $\mathcal{G}_P$ は「P のゲージ群」と呼ばれ、その要素 g は「ゲージ変換」と呼ばれる。$P' = P$ なるとき、ペア (P, A') とペア (P, A') とが同型となるのは、あるゲージ変換 g によって。$g^* A' = A$ となる

[1]筆者の力不足により、物理と関係した諸側面、また 3,4 次元多様体論としての現在の膨大な研究の前線については重要と思われることであってもここでは述べていない。この記事では基本的な事項に限った入門的な説明を目標とする。なお、この記事の中の”定理”は、いずれも筆者によるものではなく、現在ではよく知られた事実である。

ときである。このとき A と A' は同じ「ゲージ同値類」を与えるという [2]。ゲージ同値類全体の集合を $\mathcal{B}_P$ とおく。$\mathcal{B}_P$ は P 上の接続全体の空間 $\mathcal{A}_P$ の商空間である。

$$\mathcal{B}_P = \mathcal{A}_P/\mathcal{G}_P.$$

P が自明な主束 $P = X \times G$ であるとき、A, A' は接続形式を a, a' によって表され、ゲージ変換 g は写像 $g : X \to G$ による $P = X \times G$ の自己同型 $(x, p) \mapsto (x, g(x)p)$ として書ける。このとき関係式 $A' = g^*A$ は

$$a' = g^{-1}ag + g^{-1}(dg)$$

と同値である。すなわち、G の表現空間 R を任意に固定すると、R 値関数たちの上への作用素として

$$d + a' = g^{-1} \circ (d + a) \circ g$$

の関係にある。ただし、作用素 d および a の定義域は、R 値関数の空間、あるいは一般化して、R 値 k-form の空間 $\Omega^k(R)$ である。そして値域は、次数のひとつ大きな R 値 $(k + 1)$-form である。ここで、k は 0 以上の整数である。

作用素 $d + a$ の定義は一般の主束 P の上の接続 A に対して拡張される。その作用素 d_A の定義域と値域は、同伴ベクトル束 $\hat{R} := P \times_G R$ も値をもつ form の空間であり、d_A は「共変外微分」と呼ばれる。

$$d_A : \Omega^k(\hat{R}) \to \Omega^{k+1}(\hat{R}).$$

1.2　ゲージ群、接続の空間、写像としての偏微分方程式

ゲージ群 $\mathcal{G}_P$ を無限次元の Lie 群と見立てるなら、その Lie 代数は $\hat{\mathfrak{g}}$ の切断全体となる。

$$(T\mathcal{G}_P)_e = \Omega^0(\hat{\mathfrak{g}}).$$

ゲージ群 $\mathcal{G}_P$ の作用による接続 $A \in \mathcal{A}$ の軌道を $\mathcal{G}_P(A)$ とおく。この $\mathcal{G}_P$ 軌道の A における接空間を考える。すなわち、次の写像

$$\bullet^*A : \mathcal{G}_P \to \mathcal{A}, \qquad\qquad g \mapsto g^*A$$

の線形近似＝微分の像である。以下、形式的な議論を行う。

ゲージ群 $\mathcal{G}_P$ の Lie 代数は、$\Omega^0(\hat{\mathfrak{g}})$ であった。また P の自明化の存在する範囲において局所的表示を見ると、ふたつの接続の「差」は $\Omega^1(\hat{\mathfrak{g}})$ に属するとわかる。よって一般に

$$(T\mathcal{A}_P)_A = \Omega^1(\hat{\mathfrak{g}}).$$

このとき、上の線形近似＝微分は、A についての共変（外）微分 d_A を用いて

$$d[\bullet^*A : \mathcal{G}_P \to \mathcal{A}] \quad = \quad [d_A : \Omega^0(\hat{\mathfrak{g}}) \to \Omega^1(\hat{\mathfrak{g}})]$$

[2]場合に応じて、$\mathcal{G}$ の部分群による同値関係を考える。後述の $G = SO(3)$ の場合は、X の 1-skeleton 上で恒等写像とホモトピックであるような g のつくる部分群を考える（ことが多い)。

となる。

さて、接続に対する偏微分方程式であって、ゲージ変換によって解が保たれるものを考えたい。ひとつの例として、局所自明化を使って接続形式 a によって

$$da + a \wedge a = 0 \qquad\qquad (a \wedge a := \frac{1}{2}[a \wedge a])$$

と書かれる方程式がある。実際、$A' = g^*A$ のとき、A' の接続形式 a' に対して $da' + a' \wedge a' = g^{-1}(da + a \wedge a)g$ が成立し、よって上の偏微分方程式は $da' + a' \wedge a' = 0$ と同等である。

左辺の局所表示 $da + a \wedge a$ は、$\Omega^2(\hat{\mathfrak{g}})$ の要素として 大域的に well-defined であり、A の曲率と呼ばれる。A の曲率を F_A と書く [3]。F_A は A の曲率と呼ばれた。考えたいのは接続に曲率を対応させる次の非線形偏微分作用素である。

$$F_\bullet : \mathcal{A}_P \to \Omega^2(\hat{\mathfrak{g}}), \qquad\qquad A \mapsto F_A$$

ここで、$\mathcal{A}_P$ を無限次元の多様体と見立て、$F_\bullet$ を無限次元の多様体 $\mathcal{A}_P$ から無限次元のベクトル空間 $\Omega^2(\hat{\mathfrak{g}})$ への滑らかな写像と見立ててみる。そして非線形偏微分作用素の、$A \in \mathcal{A}_P$ における線形近似＝微分は、

$$d[F_\bullet : \mathcal{A}_P \to \Omega^2(\hat{\mathfrak{g}})] \quad = \quad [d_A : \Omega^1(\hat{\mathfrak{g}}) \to \Omega^2(\hat{\mathfrak{g}})]$$

によって与えられる。

方程式 $F_A = 0$ の解のゲージ同値類の全体の空間を考えたい。この空間を $\mathcal{M}_P$ と書くと、

$$\mathcal{M}_P := \{A \,|\, F_A = 0\}/\mathcal{G} \subset \mathcal{B}_P.$$

である。また、$[A] \in \mathcal{M}_P$ における $\mathcal{M}_P$ の接空間は上の考察から、少なくとも形式的には、、

$$0 \longrightarrow \Omega^0(\hat{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{d_A} \Omega^1(\hat{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{d_A} \Omega^2(\hat{\mathfrak{g}}) \longrightarrow 0$$

の１次のコホモロジーによって与えられる [4]。さらに、形式的には

- $\mathcal{G}_P$ 作用が A の軌道上で自由であるときには 0 次のコホモロジーがゼロ
- 写像 $\bullet^*A$ がゼロと横断的であるときには 2 次のコホモロジーがゼロ

となる。

（一般的な考察） $\mathcal{M}_P$ が有限次元の滑らかな多様体であると保証されるのはどんな場合か。少なくとも多様体に近い状況である状況を設定したいとする。そのためには、上の考察によると、上の複体の各コホモロジーが有限次元であることが必

[3] F_A は次の特徴づけをもつ。合成 $d_A^2 : \Omega^k(\hat{R}) \to \Omega^{k+2}(\hat{R})$ は、外積および $\mathfrak{g}$ の R 上の自然な自己準同型による写像 $F_A : \Omega^k(\hat{R}) \to \Omega^{k+2}(\hat{R})$ と一致する。

[4] この列が複体になることは、軌道 $\mathcal{G}_P(A)$ の上で曲率 $F_\bullet$ が常にゼロになることから従う。あるいは、$d_A^2 = F_A$ からも従う。

要と想定される。この有限次元性は、第一に X が閉多様体であり、第二に上の複体が「楕円型」と呼ばれる条件を満たすときに成立する [5]

（今の場合） 上の複体の場合はどうか。$F_A = 0$ であるとき接続 A は $\hat{\mathfrak{g}}$ に局所系の構造を与える。上の複体は、この局所系を係数とする de Rham 複体を、次数 2 まででカットしたものである。これが「楕円型」である必要十分条件は、X が 2 次元以下であることである。次元がそれよりも高くなると不成立である。$\mathcal{M}_P$ は X 上の基本群から G への準同型の共役類のなすコンパクト集合の部分集合として埋め込まれる。

（一般的な考察）$\mathcal{M}_P$ が多様体であるとともに、さらにもし、コンパクトな多様体であれば、その基本類 [$\mathcal{M}_P$ は、ambient space $\mathcal{B}_P$ のあるホモロジー類を与える。これは位相不変量であるから、方程式（今の場合は $F_A = 0$）を摂動しても、この不変量は変わらないはずである。また、$\mathcal{M}_P$ 自身がコンパクトではなくとも、その「端」の形状の情報が十分わかっていれば、台が適切に制限されたコサイクルを $\mathcal{M}_P$ 上で積分し、不変量を得ることが可能であろう。

（今の場合） 方程式 $F_A = 0$ の場合には、たとえば X が閉多様体、G がコンパクト Lie 群であれば $\mathcal{M}_P$ はコンパクトになる。X が種数 g の有向閉曲面、$G = SO(3)$, $w_2(P) \neq 0$ のとき、$\mathcal{M}_P$ は $6g - 6$ 次元の閉多様体となる [6]。この例では上の複体のコホモロジーは 0 次と 2 次ではゼロとなり、1 次の次元は $6g - 6$ となり、$\mathcal{M}_P$ の次元と一致している。特に $g = 1$ のとき、$\mathcal{M}_P$ は一点となり、その基本類 $[\mathcal{M}_P]$ から定義される「不変量」は、次数 0 のホモロジー類としての 1 となる。

（一般的な考察）一般の次元の一般の場合に戻ると、方程式 $F_A = 0$ の変種を考えると、次元がより高い場合にも楕円型の状況が成立し得る。そのとき、M_P は特異性をもつ多様体の構造をもつ。$\mathcal{M}_P$ になんらかの弱い意味でのコンパクト性を持たせるために、G は通常はコンパクト Lie 群を考える [7]

そのような状況を次に例示する。

1.3　2 次元、3 次元、4 次元の例

次の 4 つの状況が代表的なものである。各々の背景の説明を簡単に付記する [8]。

- X ：2 次元有向閉 Riemann 多様体, G：コンパクト Lie 群, 方程式：$F_A = c \otimes \omega$ (ω は体積要素、c は $\mathfrak{g}$ の中心の要素。主束 P の特性類として c は P によって与えられる。)

---

[5] 線形偏微分方程式の一般論である。「楕円型」とは、主表象のもつ性質として定義される。上の複体を X の各点 $x \in X$ の近くで考える。x の近傍を $(TX)_x$ のゼロの近傍と同一視する。（大きさの十分大きな）各 $\xi \in (TX)^*_x$ を考える。x の近傍における切断であって、$(TX)_x$ 上の関数 $e^{i\xi x \bullet}$ の形の振動をする切断たちに対して、複体に現れる線形偏微分作用素の作用を考える。今の場合、それは次の形に集約される。$0 \to \hat{\mathfrak{g}}_x \xrightarrow{i\xi\wedge} (TX)^*_x \otimes \hat{\mathfrak{g}}_x \xrightarrow{i\xi\wedge} (\wedge^2 (TX)^*_x) \otimes \hat{\mathfrak{g}}_x \to 0$ となる。これが複体の「主表象」である。複体が楕円型であるとは、$\xi \neq 0$ のときこの主表象が常に exact になることである。

[6] 脚注 2 参照

[7] 非コンパクト Lie 群の考察としては、2 次元の Hitchin による $SL_2(\mathbb{C})$ 等の構造群をもつ接続の考察が Higgs 場を用いてなされた。最近の Witten の提案に基づく Taubes の考察でも非コンパクト群 $SL_2(\mathbb{C})$ が用いられている。

[8] X に幾何構造が入っているとき、より高次元に拡張的に構成する議論 (Donaldson-Thoma) 変種もある。

[Atiyah-Bott による 2 次元閉 Riemann 多様体の上の「Yang-Mills 接続」のモジュライ空間のコホモロジーの構造へのアプローチ。この場合の「不変量」は、$\mathcal{M}_P$ の種々の特性類たちの情報と同等である。Ambient space の（ゲージ群作用に関する）同変コホモロジーから $\mathcal{M}_P$ のコホモロジーへの制限写像は単射であることが示され、$\mathcal{M}_P$ のコホモロジー環の構造の情報も原理的には与えられる。その証明は、$\int_X ||F_A||^2\omega$ を Morse 関数とみなす無限次元の Morse 理論が用いられる。安定多様体は無限次元だが、不安定多様体は有限次元。G の構造の複雑さに関する帰納的な議論により $\mathcal{M}_P$ の Betti 数の帰納的公式が得られる [9]。$\mathcal{A}_P$ がシンプレクティック構造をもち、無限次元シンプレクティック幾何、無限次元 Kahler 幾何と見立てることができる。代数幾何とのつながりが深い。]

- X ：3 次元有向閉 Riemann 多様体, G：コンパクト Lie 群, 方程式：$F_A = *d_A\psi$ (ψ は $\Omega^1(\hat{\mathfrak{g}})$ の要素。作用素 $*$ は Hodge star operator.)

  [Taubes による Casson 不変量の定式化において用いられた。両辺は直交しているので [10] 解は $F_A = 0, d_A\psi = 0$ を満たす。$G = SU(2)$ であり X がホモロジー球面のとき、A が自明な接続でなければ、$\psi = 0$ となる。このとき、その A が自明でない解の同型類の全体を $\mathcal{M}_P^*$ とおくとき、$\mathcal{M}_P$ は形式的次元が 0 次元であり、かつコンパクトである。よって不変量は ambient space の 0 次ホモロジー群すなわち $\mathbb{Z}$ に値をとる。この整数値不変量の Casson 不変量の 2 倍であることを Taubes は示した。]

- X: 4 次元有向閉 Riemann 多様体, G：コンパクト Lie 群, 方程式：$p_+F_A = 0$ (p_+ は、4 次元 Riemann 多様体の 2-form の空間から、自己双対 2-form の空間への直交射影。Hodge star operator $*$ を用いると $p_+\alpha = (\alpha + *\alpha)/2$)

  [Donaldson にはじまる、4 次元多様体上の自己反双対接続のモジュライを用いた可微分構造に対する諸結果。$G = U(1)$ のときは線形方程式であり、Hodge 理論からコホモロジーの考察に帰着。次に複雑な $G = SU(2), SO(3)$ であるときが主たる研究の対象。4 次元多様体の可微分構造について得られる情報は、この場合が本質的であると考えられている。不変量は Donaldson 不変量と呼ばれる。4 次元多様体が hyperkahler であるときには、上の Atiyah-Bott 理論の hyperkahler 版。4 次元多様体が projective Kahler であるときには代数幾何とのつながりが深い [11]。しかし、一般の可微分多様体に対して考察可能である。解のモジュライ空間は「弱いコンパクト性」を持ち、曲面からの調和写像のモジュライと似て、bubble の現象が伴う。]

- X: 4 次元スピン c 閉多様体, $G = U(1)$、連立方程式：$p_+F_A = \sigma(\phi), D_A\phi = 0$ (主束 P は、スピン c 表現に付随する $U(1)$ 束。ϕ は正スピノル、D_A は A と

[9] Mehta-Seshadri によって Betti 数公式は代数幾何的アプローチによって知られていた。一方 Torsion free であることが Atiyah-Bott の議論で示された。

[10] Bianchi の恒等式 $d_AF_A = 0$ による。

[11] Projective でないときにも最近の Teleman の仕事がある。Donaldson 理論の複素曲面幾何への応用

Levi-Civita 接続を用いて定義される Dirac 作用素。σ は正スピノルの空間から自己双対 2-form の空間へのベクトル束レベルでのある標準的二次写像。)

[Witten が提示したいわゆる Seibeg-Witten 方程式（monopole 方程式とも呼ばれる）の解のモジュライを用いて、Kronheimer-Mrowka, Fintushel-Stern その他の人々によって、反自己双対接続による議論と平行した議論の急速な発達。不変量は Seiberg-Witten 不変量と呼ばれる。G が（本質的に）$U(1)$ であることがモジュライ空間のコンパクト化にとって本質的 [12]。]

X が 4 次元有向き閉多様体の場合 $b^+(X)$ を、交叉形式の負の部分の次元とする。$b^+(X)$ は、モジュライ空間 $\mathcal{M}(X)$ の中で商特異点集合のもつ形式的な余次元に相当し、これが正ならば方程式を摂動すると特異点を"よける"ことができる。

定理 1.1. X を 4 次元有向閉多様体とする。もし $b^+(X) \geq 2$ であれば、「*Donaldson* 不変量」、「*Seiberg-Witten* 不変量」が可微分構造の不変量として定義される。

仮定が $b^+(X) \geq 1$ ではなく $b^+(X) \geq 2$ となっているのは、「よけ方」が up to homotopy で一意であることを保証するためである。

上に述べた Taubes による 3 次元の方程式は、4 次元の方程式 $p_+F_A = 0$ を、「次元簡約」して得ることができる。同様にもう一方の 4 次元の方程式を「次元簡約」して別種の 3 次元の方程式を得ることもできる。それに対応する不変量は 3 次元多様体の Seiberg-Witten 不変量と呼ばれる。

これらを取り巻く重要な状況として次の 3 つの項目を挙げておく。

1. 境界のある多様体の不変量と、その張り合わせに関する TQFT 的構造：Floer ホモロジー、相対不変量

   [簡単のため $G = SU(2)$ を仮定する。3 次元有向閉 Riemann 多様体 Y に対して　$X = Y \times \mathbb{R}$ の場合。　X 上の方程式 $p_+F_A = 0$ の解を考える。もしその解として $\mathbb{R}$ 方向の平行移動によって不変なものを考えるなら、上の 3 次元の Taubes による方程式に帰着する。これが「次元簡約」の操作である。しかし、より精密に、任意の解を考えるならば、それは Y 上の接続 B 全体の空間の上の、ある flow に沿った道としての解釈をもつ。その flow は、Y 上の接続 B に対してその Chern-Simons 不変量

$$cs(B) = \int_Y tr(\frac{1}{2}b \wedge db + \frac{1}{3}b \wedge b \wedge b) \bmod 4\pi^2\mathbb{Z}$$

   を対応させる S^1 値関数の勾配流である。ここで b は接続 B の接続形式である。接続形式を定義するために必要な主束の自明化の取り方の不定性が、mod$4\pi^2$ の不定性に対応している。この勾配流を無限次元の空間の上で Morse 理論を展開し、ホモロジー群に相当するものを定義するのが Floer の理論である。この Morse 理論は、安定多様体と不安定多様体の次元がいずれも無限大になるタイ

[12] Donaldson 理論の方程式と Seiberg-Witten 理論の方程式のいずれもの拡張になっている方程式もあり、Feehan-Leness によって研究されたが、モジュライ空間のコンパクト性の扱いが解析的により難しい。

プの理論であり、無限次元特有の性質が現れる。3 次元多様体 Y に対して定義されるこの「ホモロジー群」は Floer ホモロジーと呼ばれる。

Floer ホモロジーは、4 次元多様体の切り貼りの操作による不変量の振る舞いの叙述に用いられる。実際には、B のゲージ同値類の空間がゲージ群作用による商特異点を持つため、Morse 理論はナイーヴな形では形式的にあっても遂行できない。しかし、この張り合わせの原理自体は上述のどの方程式においても成立する。この「制約のある張り合わせ公式」については次章で説明する。]

2. 3 次元多様体の Heegaard 分解にを利用して定義される Floer ホモロジー : Heegaard 分解に付随する「シンプレクティック多様体内の Lagrangian 交差」を用いて定義される

   [Ozsvath-Szabo による Heegaard Floer 理論。これは上に述べたような接続の理論として定式化されるものではない。しかし TQFT 的枠組みをもつ $3+1$ 次元の理論に拡張され、SW 理論と同等であることが Taubes による SW とコンタクト構造との関係を基礎として示されつつある。また、具体的な計算がしやすく、3 次元トポロジーへの深い応用が数多くある。]

3. SW と、シンプレクティック構造、コンタクト構造との関係

   [Taubes による、4 次元シンプレクティック幾何と摂動された Seiberg-Witten 方程式の解との関係、またそれと対応した 3 次元コンタクト構造との関係。シンプレクティック幾何学、コンタクト幾何学への応用がある。Taubes による Weinstein 予想の解決など。]

2　ゲージ理論の展開 — いくつかの例による説明

2.1　制約条件つきの TQFT

以下、上の 4 通りの場合のひとつを考えることにする。X に埋め込まれた余次元 1 の連結有向閉部分多様体 Y によって $X = X_0 \cup_Y X_1$ と分解したとする。以下しばらく記号から P を省き、モジュライ空間を $\mathcal{M}(X)$ と書く。

X 上の解は、X_0 上の解と X_1 上の解であって、Y 上で張り合うものである。まず、極めてナイーヴに考えることにする。Y 上の境界値の可能性全体の集合 $\mathcal{B}(Y)$ とおく。X_0 上の解の同値類全体を $\mathcal{M}(X_0)$ と書き、境界値をとる写像を $\pi_0 : \mathcal{M}(X_0) \to \mathcal{B}(Y)$ とおく。同様に $\pi_1 : \mathcal{M}(X_1) \to \mathcal{B}(Y)$ を定める。このとき、$\mathcal{M}(X)$ は　$\pi_0 : \mathcal{M}(X_0) \to \mathcal{B}(Y)$ と $\pi_1 : \mathcal{M}(X_1) \to \mathcal{B}(Y)$ とのファイバー積と同一視されるすなわち、$\mathcal{M}(X)$ は $\mathcal{B}(Y)$ の中における $\mathcal{M}(X_0)$ の像と $\mathcal{M}(X_1)$ の像との「交差」である。

上の考察において、X を切る Y のところに、チューブ $Y \times [-R, R]$ を挿入したものを X_R とおく。Riemann 計量もこめてこの構成を行う。すると、R が大きくなるとき、チューブの部分の解の列を R ごとに選ぶと、適当なテクニカルな仮定のもとで、その列の部分列は、$Y \times \mathbb{R}$ の解に近づくと思われる。

先に説明した Floer ホモロジーは、$Y \times \mathbb{R}$ の上の解がある Morse 的関数による勾配流によって記述されるということであった。この勾配流を $[-R, 0]$ と $[0, R]$ とに分けて考えると、次の描像となる。

$X_0 \cup (Y \times [-R, 0])$ の上の解の同値類の集合を $\mathcal{M}(X_0, R)$ とおき、$X_1 \cup (Y \times [0, R])$ の上の解の同値類の集合を $\mathcal{M}(X_1, R)$ とおくと、さきほどと同様に $M(X)$ は $\pi_0 : \mathcal{M}(X_0, R) \to \mathcal{N}(Y)$ と $\pi_1 : \mathcal{M}(X_1, R) \to \mathcal{N}(Y)$ とのファイバー積と同一視される。異なるのは、$\mathcal{M}(X_0, R)$ の像が、$\mathcal{M}(X_0)$ の像を、勾配流にそって時間 R だけ流したものに置き換わり、同様に $\mathcal{M}(X_1, R)$ の像が、$\mathcal{M}(X_1)$ の像を、勾配流にそって時間 R だけさかのぼったものに置き換わることである。すると、両者の「交叉」である $\mathcal{M}(X_R)$ は、もしどこかに収束するなら、勾配流の停留する、いくつかの臨界点に連結成分ごとに収束する。

とくに、「交叉」$\mathcal{M}(X)$ の次元がゼロであるとき、以上の描像は、勾配流に対応する Morse（コ）ホモロジーを用いて、形式的には次のように定式化される：$\mathcal{M}(X_0)$ の像が定める $\mathcal{B}(Y)$ の Morse ホモロジー類を $[CM(X_1)]$ とおき、$\mathcal{M}(X_1)$ の像が定める $\mathcal{B}(Y)$ の Morse コホモロジー類を $[\mathcal{M}(X_1)$ とおくとき、交叉点 $\mathcal{M}(X)$ の個数 $[\mathcal{M}(X)] \in \mathbb{Z}$ は、適切に数えるなら Kronecker 積

$$[\mathcal{M}(X)] = [\mathcal{M}(X_0)] \cdot [\mathcal{M}(X_1)]$$

によって与えられる。この描像において、$\mathcal{B}(Y)$ の Morse(コ) ホモロジーが、”Floer(コ) ホモロジー”と呼ばれるものであった。また、境界付多様体 X_0, X_1 の、Floer(コ) ホモロジーに値をとる不変量 $[\mathcal{M}(X_0)]$, $[\mathcal{M}(X_1)]$ は「相対不変量」と呼ばれる。

もしこの描像が正しければ、Y の Floer(コ) ホモロジーがゼロであれば、X の不変量はゼロでなくてはならない。実際次の定理の成立が知られている。

定理 2.1. X が 4 次元閉多様体であり、連結和 $X = \bar{X}_0 \# \bar{X}_1$ の形をしているとする。もし $b^+(\bar{X}_0), b^+(\bar{X}_1) > 0$ であれば、X の Donaldson 不変量、SW 不変量はゼロである。

しかし、実際には上のナイーブな描像は、第一にコンパクト性（収束性）が限定的にしか成立せず、第二にモジュライ空間が ambient space $\mathcal{B}$ の商特異点とも交わり得ること、によって限定的にしか成立しない。上の場合もコンパクト性はクリアされるが、商特異点は考察が必要である。不変量そのものの定義の場合と同様に、上の議論で商特異点からの寄与がないことを保証するため、仮定 $b^+(X_0), b^+(X_1) > 0$ が必要となる。

例 2.2. $a\mathbb{C}P^2 \# b(-\mathbb{C}P^2)$ の Donaldson 不変量、SW 不変量は、$a, b \geq 2$ であるときゼロである。

商特異点がどのように関与し得るかを以下の例で説明する。

前章の 3 次元の場合を考える。X を 3 次元の有向閉 Riemann 多様体とする。X 上の G 主束 P は自明である。また、自明な接続に対応する解を除いた部分を $\mathcal{M}(X)^*$ と書くことにする。

X が $X = X_0 \cup_Y X_1$ と分解したとする。さらに、$G = SU(2)$、X がホモロジー 3 球面、$Y = S^2$ の場合を以下考察する。X_0 と X_1 の各々の境界をつぶしたものを $\bar{X}_0, \bar{X}_1$ とおくと、X は両者の連結和である。このとき

$$\mathcal{M}(X)^* \cong (\mathcal{M}(\bar{X}_0)^* \times \mathcal{M}(\bar{X}_1)^*) \coprod \mathcal{M}(\bar{X}_0)^* \coprod \mathcal{M}(\bar{X}_1)^*$$

という同一視が成立する。たとえば $\mathcal{M}(\bar{X}_0)$ の要素は、X_1 をつぶす写像 $X \to \bar{X}_0$ による引き戻し写像によって $\mathcal{M}(X)$ の要素とみる。すると X_1 の上では自明な接続として延長される。

特に、$\mathcal{M}^*(X_1)$ が空集合であるとき、$\mathcal{M}(X)^*$ と $\mathcal{M}(\bar{X}_0)^*$ とは同一視される。よって X の不変量と X_0 の不変量とは同等の情報を与えていると思われる。ただし、$\mathcal{M}(\bar{X}_1)^*$ が空になる状況は、$\bar{X}_1$ が S^3 である場合以外には設定しがたいと思われる。

しかし、X が 4 次元多様体である状況では、X に対する Donaldson 不変量、SW 不変量においては、上とパラレルな状況であり、かつ非自明な設定を行うことができる。それは $\bar{X}_1$ が $-\mathbb{C}P^2$ である場合、あるいはより一般に、負定値の交叉形式をもつ閉多様体である場合である [13]。$-\mathbb{C}P^2$ との連結和は、（位相的な）blow-up と呼ばれる。原理的に上とパラレルな考察により次がわかる。

定理 2.3. *Donaldson* 不変量、*SW* 不変量に対しては、*blow-up* 公式があり、*blow-up* の前後で、適切な範囲において不変量は不変である。

2.2 $K3$ 曲面の Seiberg-Witten 不変量

$K3$ 曲面の Seiberg-Witten 不変量が非自明であることを説明する。結論はスピン構造に対応するスピン c 構造においては不変量は (符号を無視するなら)1 であり、他のスピン c 構造においてはゼロとなる。

ステップ１： Seiberg-Witten 方程式を標準的な平坦な Riemann 計量をもつ $X = T^4$ の上で考える。スピン c 構造としては自明な $U(1)$ 束 P が付随するもの、すなわちあるスピン構造から得られるスピン c 構造を以下考える。

$$D_A\phi = 0, \qquad p_+F_A = \sigma(\phi)$$

平坦計量に対して、Weitzenbock 公式によって

$$\int (\phi, D_A^2\phi) = \int_X (|\nabla_A\phi|^2 + (\phi, F_A\phi))$$

となる [14]。また、σ の性質から $(\phi, \sigma(\phi)\phi) = |\phi|^4$. であり、これら 4 つの式から、恒等的に $\phi = 0$ がただちに分かる。よって $p_+F_A = 0$ であるが、これと F_A が closed form であること [15] から $F_A = 0$ も従う。すなわち、解は $U(1)$ 平坦接続 A と $\phi = 0$ とのペアの全体となる。

$$\mathcal{M}(T^4) = Hom(\pi_1(T^4), U(1))$$

Seiberg-Witten 方程式に対しては、一般の閉多様体 X においても、やはり Weitzenbock 公式を用いた議論によって解のモジュライ $\mathcal{M}$ のコンパクト性が示される。

[13] 自己双対 2-form だけを見る方程式には負定値部分が”見えない”ことがポイントである。なお P は適切にとる必要がある。

[14] ∇_A は A と Levi-Civita 接続による共変微分。一般の X ではさらに X のスカラー曲率を含む項が付け加わる。

[15] Bianchi 恒等式による

ステップ２：　次にオービフォルド $T^4/\{\pm 1\}$ に対して考えてみる。ただし、$\{\pm 1\}$ は $T^4=\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$ に掛け算で作用するものとする。"オービフォルド"を考えるとは、この場合、T^4 上の方程式に $\{\pm 1\}$ をリフトし、その作用に関して不変な解を考えることに相当する。すると、上の考察により、解は $\{\pm 1\}$ の作用で不変な $U(1)$ 平坦接続の全体である。$\mathcal{M}(T^4)=Hom(\pi_1(T^4),U(1))$ はふたたび 4 次元トーラスであり、この作用で不変な点は次の $2^4=16$ 点ある。

$$\mathcal{M}(T^4/\{\pm 1\})=Hom(\pi_1(T^4),\{\pm 1\})$$

16 個の解を、$T^4/\{\pm 1\}$ の特異点のリンクの $S^3/\{\pm 1\}$ に制限すると、16 個のうち、ひとつは自明な平坦接続となり、他は自明でない平坦接続である。

ステップ３：　$K3$ 曲面の SW 不変量のひとつの求め方を述べる。$K3$ 曲面は、位相的にはオービフォルド $T^4/\{\pm 1\}$ の 16 個の特異点を blow-up することによって得られる。すなわち $-\mathbb{C}P^2$ に $[z_0,z_1,z_2]\to[-z_1,z_1,z_2]$ によって $\{\pm 1\}$ を作用させると、商 $-\mathbb{C}P^2/\{\pm 1\}$ は一点のみに商特異点をもつオービフォルドの構造をもつ。その特異点の近傍を除くと、$-S^3/\{\pm 1\}$ を境界とする滑らかな単連結負定値多様体である、これの 16 個のコピーを、$T^4/\{\pm 1\}$ の 16 の商特異点において張り合わせる。この blow-up の操作によって、前述のように基本的には SW 不変量は不変である。ただし、リンクにおいて平坦でない接続が生じる場合は、それと張り合わせられる主束が $-\mathbb{C}P^2/\{\pm 1\}$ の上に存在しない [16]。よって、$\mathcal{M}(K3)$ に寄与する $\mathcal{M}(T^4/\{\pm 1\})$ の要素は自明な平坦接続ひとつのみである。すなわち、$K3$ 曲面の計量を適当にとるなら（かつ方程式の適当な摂動のもとで）

$$\mathcal{M}(K3)=\{\text{ 自明な平坦接続に対応する一点 }\}.$$

ステップ４：　上で求めた $\mathcal{M}(K3)$ の点は、$\mathcal{B}(K3)$ の中で、ゲージ群作用の特異点の上に載っている。ゲージ変換 g は $U(1)$ 値関数であり、(A,ϕ) への作用は、$(A,\phi)\mapsto(g^*A,g\phi)$ であり、ϕ には積で作用する。よって $\phi=0$ のときには、g が $U(1)$ 値定数関数の作用で (A,ϕ) は固定される。しかし、$b^+(K3)=3\geq 2$ のときには、方程式を摂動して解を $\mathcal{B}(K3)$ の特異点集合から外すことができ、外し方は up to homotopy で一意的であった。この摂動を、$\mathcal{M}(K3)\subset\mathcal{B}(K3)$ の考えている一点の近傍で、方程式の有限次元近似モデルを扱うことによって構成しよう。このモデルは「倉西モデル」と呼ばれる。結論を述べると、今の場合、方程式のモデルは次の写像によって与えられる。

$$\mathbb{H}\to\langle i,j,k\rangle\,,\qquad q\mapsto qi\bar{q}$$

この写像で 0 をヒットするものが解である。ここで $\mathbb{H}$ は四元数体であり、正スピノルの切断の空間の近似である。$\langle i,j,k\rangle$ は、自己双対 2-form の空間の近似である。前者には $U(1)$ 値定数関数に対応する $U(1)$ の要素が右からの掛け算で作用している。

[16] $-\mathbb{C}P^2/\{\pm 1\}$ の上のオービフォウドの意味の平坦接続は、特異点のリンク $-S^3/\{\pm 1\}$ に制限すると自明な平坦接続となる事実と関係する。

後者へは自明に作用する。$\mathcal{M}(K3)$ は、0 をヒットする $\mathbb{H}$ の点全体を $U(1)$ 作用で割った空間と同一視される。なお、上の写像の微分と、$U(1)$ の Lie 環　$i\mathbb{R}$ の無限小作用を合わせると複体

$$0 \to i\mathbb{R} \to \mathbb{H} \to \langle i, j, k \rangle \to 0$$

を得る。隣り合う項の間の線形写像はいずれもゼロであり、コホモロジーは、再びその複体によって与えられる。実は逆に、コホモロジーを用いるてモジュライ空間の一点の近傍のモデルとして構成されたもののが「倉西モデル」である。

上の倉西モデルの写像を、小さな $\epsilon > 0$ を用いて

$$\mathbb{H} \to \langle i, j, k \rangle, \qquad q \mapsto qi\bar{q} - \epsilon^2 i$$

と $U(1)$ 作用と同変なまま摂動する。このときゼロは正則値となり、ゼロにヒットするのは $\{q \in \mathbb{C} \,|\, : \, |q| = \epsilon\}$ であり、$U(1)$ 作用による商は（なめらかな）一点となる。すなわち、このモデルの摂動に従ってもとの方程式を摂動すると、

$$\mathcal{M}(K3)' = \{(\text{なめらかな})\text{ 一点 }\}.$$

となることが従う。これは、$K3$ 曲面のすべてのスピン c 構造を合わせて考えたとき、SW 不変量は、唯一のスピン c 構造においてが 1 であり、それ以外ではゼロであることを意味する。また上の構成をみると、そのスピン c 構造が、スピン構造に対応するものであることも容易に従う。

2.3　可微分構造への応用

SW 不変量を用いて可微分構造の性質を調べる手法を例を用いて紹介する。いずれも、Donaldson によって最初に示された定理である。

$K3$ 曲面を一度 blow-up してできる 4 次元可微分閉多様体 $K3\#(-\mathbb{C}P^2)$ は、単連結であり、その交叉形式はやはり単連結可微分な 4j 次元多様体 $19\mathbb{C}P^2\#4(-\mathbb{C}P^2)$ の交叉形式と同形である。Freedman の定理によると、このとき、両者は位相的に同相である。

定理 2.4. $K3\#(-\mathbb{C}P^2)$ と $19\mathbb{C}P^2\#4(-\mathbb{C}P^2)$ とは微分同相ではない。

Proof. $K3$ 曲面の SW 不変量は非自明であった。よってそれを blow-up した $K3\#(-\mathbb{C}P^2)$ の SW 不変量の非自明である。一方、$19\mathbb{C}P^2\#4(-\mathbb{C}P^2)$ の SW 不変量はゼロであった。SW 不変量は可微分構造の不変量であるから、両者は微分同相ではない。　□

定理 2.5. $K3$ 曲面の自分自身への微分同相が $H^2(K3;\mathbb{R})$ の正定値部分に誘導する写像は、その正定値部分の向きを保つ。

Proof. SW 不変量を符号も込めて定義することが可能である。そのためには、モジュライ空間の向きを指定すればよい。$H^1(X);\mathbb{R}$ と $H^2(X;\mathbb{R})$ の正定値部分との直和の符号がモジュライ空間の向きと対応することが容易にわかる。もし、この「向き」

を逆にするような自己微分同相が存在するなら、それはSW不変量が符号を逆にしても同じであることを意味する。ただし、考えているスピンc構造が自己微分同相によって異なるものにうつるなら、これは何も情報を与えていない。$K3$曲面の場合、（いずれかの）スピン構造に対応するスピンc構造は一意であり、自己微分同相によって保たれる。そのスピンc構造のSW不変量が非自明であることから、上の定理が従う。 □

定理 2.6. $K3$曲面が連結和$\bar{X}_0\#\bar{X}_1$の形と微分同相であるとき、$\bar{X}_0$または$\bar{X}_1$のいずれか一方はS^4と同じホモトピー型をもつ。

Proof. 実際、もし連結和の形をしているならば、$b^+(\bar{X}_0)>0$かつ$b^+(X_1)>0$であれば、SW不変量はゼロのはずであった。これは矛盾である。よっていずれかのb^+はゼロである。しかし、これだけの議論では上の定理を示すには足りない。定理の結論にない可能性をすべて排除するためには、次の定理[17]を見れば十分である。 □

定理 2.7. Xがスピン多様体であって$\mathbb{Z}$上の交叉形式が$2E_8\oplus aH$の形だったとする。ただしHは$S^2\times S^2$の交叉形式である。このとき$a\geq 3$が成立する[18]。

Proof. $a=2$として矛盾を示せば十分である。SW方程式の解を、スピン構造からくるスピンc構造に対して考察する。自明な平坦接続と$\phi=0$は解となる。その近傍のモデルは、$U(1)$不変な写像

$$\mathbb{H}\to\langle j,k\rangle \qquad q\mapsto\pi(qi\bar{q})$$

である。ここで、$\pi:\langle i,j,k\rangle\to\langle j,k\rangle$は直交射影である。すると、ゼロの逆像を$U(1)$で割ると、原点を端とするふたつの半直線が得られる。ところで、スピン構造からくるスピンc構造に対しては、Seiberg-Wittten方程式が余分な対称性をもつことが知られている。それはゲージ群作用による商空間にさらにinvolutionとして作用する。上のモデルにおいては、$\mathbb{H}$上に右からのjの掛け算として作用する。この作用により、ふたつの半直線は、ひとつの半直線となる。ここまでの結論は、$\mathcal{M}$が、一点の「端」をもつ１次元の（特異性をもつかもしれない）多様体であることである。$\mathcal{M}$はコンパクトであった。このとき、方程式を少し摂動すると、「一点の端をもつ、コンパクトな１次元多様体」が解空間となる。そのような１次元多様体は存在しない。よって矛盾である[19]。 □

3 最後に — 4次元と3次元

ゲージ理論のこれまでの研究にはいくつかの角度がある。Donldson不変量、Floerホモロジーが出現したころの研究の動向とはまた別の諸側面が、これらの錯綜の中に見られる。

- ゲージ理論的枠組みからトポロジカルな情報を十分抽出する機構の開発[20]

[17]およびRokhlinの定理

[18]以下の証明を、倉西モデルの大域化を用いて拡張すると、一般の$2kE_8\oplus aH$ $(k>0)$の場合に不等式$2k+1\leq a$を得る。

[19]この議論はKronheimerによる。

[20]例：Manolescuによる三角形分割予想の否定的解決に用いられたPin(2)対称性の活用

- 方程式の解と解のモジュライについての解析的な研究 [21]
- ゲージ理論的不変量そのものの性質、ゲージ理論的枠組みの相互比較 [22]
- ゲージ理論の内外の複数の枠組み相互間の関係 [23]
- 無限次元幾何学としての現象の把握 [24]
- 低次元幾何学理論そのものに沿った理論構成の展開 [25]

最後に、上の錯綜について、ゲージ理論における 3 次元トポロジーへと 4 次元トポロジーへの応用の強さの対比を軸とし、現時点における印象を述べる。

4 次元トポロジーにおいては第一に、無限個の微分構造をもつ位相多様体であって、トポロジーの簡単なものを構成する一連の仕事がある [26]。それは、「うまい構成のテクニックを開発する」という性格の研究である。また、第二に、ある種の位相多様体には可微分構造がはいらないという一連の仕事がある [27]　しかし、4 次元における第一と第二のアプローチは異なる角度からのものであり、その隔たりは大きい。

一方、3 次元トポロジーにおいては、近年 exact かつ強力な結果が知られている。典型は Kronheimer-Mrowka による Thruston ノルムのモノポール類による特徴づけである。ここでモノポール類とは、いかなる Riemann 計量に対してもモノポール方程式が解をもつようなスピン c 構造（の特性類）をさす。

このような exact な結論が可能となったポイントは Gabai による sutured manifold の理論と、ゲージ理論との組み合わせにある。組み合わせの接点には、taut foliation および tight conact structure がある。すなわち Gabai は（技術的な仮定のもとで）Thruston ノルムの、taut foliation による特徴付けを与えた。一方、Kronheimer-Mrowka は、（技術的な仮定のもとで）taut foliation の Euler 類が monopole class であることを示した。そこでは４次元のシンプレクティック多様体の Seiberg-Witten 方程式の解についての Taubes の結果を本質的に用いる。Tight contact structure や taut foliation が３次元多様体論の中である種の分類・構成のレベルにおいて使われている。

翻って 4 次元においては、シンプレクティック構造がはいるための位相的な特徴づけが知られている (Donaldson-Auroux)。シンプレクティック構造をもつ 4 次元多様体と一般の 4 次元多様体とのギャップの大きさは、定かではない [28]　4 次元のシンプレクティック多様体はある場合には分類が可能であり、そこでは概複素曲線の族

[21]例：Feehan-Leness による非アーベル的モノポールのモジュライの端の研究

[22]例：Donaldson 理論では Chern-Simons 不変量の値が一定の役割をはたし、これは Riemann 計量によらず定義される。SW 理論での対応物は直ちに見えてはいない。

[23]例：Khovanov ホモロジーとの関係

[24]例：Floer ホモロジーの親玉であるべき Floer ホモトピー型を定義のための無限次元特有の障害

[25]例：sutured maniofold の理論とそれに対応する Floer ホモロジー

[26]Jongil Park によって口火が切られた。単連結で第二 Betti 数が小さなエキゾチック微分構造の構成。もし第二 Betti 数がゼロの場合に構成できれば４次元可微分ポアンカレ予想の否定的解決である。しかし、4 次元エキゾチック球面の非自明な微分構造を自明なものと区別するための不変量が現在のところ構成されていない。

[27]最近では Froyshov, 中村信裕による非単連結な 4 次元多様体に対する新しい議論がある。

[28]一般の 4 次元多様体は、ある種の特異性をもつシンプレクティック構造を許すと知られており、この事実を用いてアプローチするアイディアが Taubes によって提出されている。

を用いて座標を作ってしまうことがポイントである。そして、そのような概複素曲線の族の存在のために、Taubesの結果を解して、Seiberg-Witten方程式のもつ性質が有効に働く場合もある。しかし、その有効性は限定的なものであり、ましてや一般の4次元多様体の分類には程遠い[29]

2次元の多様体は、それをリボングラフとみなす見方などを通じて、（カテゴリカルともいえる）代数的な構造と近い位置にある。ゲージ理論においても、Heegaard分解を用いるOzsvath-Szabo理論によって、3次元多様体の境界として現れる2次元多様体を直接理論の表舞台に現れた[30][31]。3次元のsutured manifoldあるいはfoliationなどの幾何学的構造を用いた議論は、3次元多様体そのものを、やはり（カテゴリカルともいえる）代数的な構造に近い扱いを行っているように伺われる。

一方、近年、5次元で非コンパクト群を構造群とするゲージ理論のWittenによる提案があり、その周辺にTaubesの最近の研究がある。Wittenの動機は3次元空間内の結び目・絡み目に対する不変量であるKhovanovホモロジーのゲージ理論による表示にあるという。Khovanovホモロジーも、（カテゴリカルともいえる）代数的な構成物である。

3次元と4次元の世界は性格が異なるが、それらの自然な裾野として、2次元、5次元の世界までもが現状でのゲージ理論のひとつの断面として見え、動きつつように思う。

参考文献

次の3点を挙げておく。

[1] 深谷賢治 「ゲージ理論とトポロジー 」
シュプリンガー現代数学シリーズ 1995

[2] S.K. Donaldson, ”Floer Homology Groups in Yang-Mills Theory”
Cambridge Tracts in Mathematics, 2002.

[3] P.B. Kronheimer and T. Mrowka, ”Monopoles and Three-Manifolds”
Cambridge University Press, 2007

[29]基本群の取り得る可能性だけをみても、3次元の世界と4次元の世界が大きく相違することは古典的によく知られている

[30]「Atiyah-Floer予想」においても2次元は現れていた。

[31]Heegaard-Floer理論の展開をモデルとしてSeiberg-Witten理論のFloerホモロジーの理論（モノポールFloerホモロジー）がKronheimer-Mrowkaによって展開されている。