

ケーブル絡み目のコバノフホモロジーについて

田神 慶士

東京工業大学

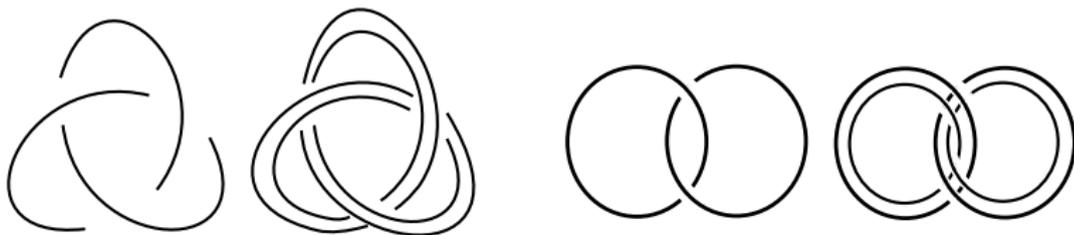
2011年10月14日

目次

- 基本的な定義
- トーラス絡み目とコバノフホモロジー
- 結び目のケーブリングへの拡張
- 応用例 1 ~ 3
- 今後の課題

結び目・絡み目

- 結び目 … S^3 に埋め込まれた S^1
- 絡み目 … S^3 に埋め込まれたいくつかの S^1



Khovanov homology

L : 向き付けられた絡み目

D : L の図式

D

Khovanov homology

L : 向き付けられた絡み目

D : L の図式

$$D \longmapsto (C^i(D), d^i)$$

graded \mathbf{Q} -vector space

Khovanov homology

L : 向き付けられた絡み目

D : L の図式

$$D \longmapsto (C^i(D), d^i)$$

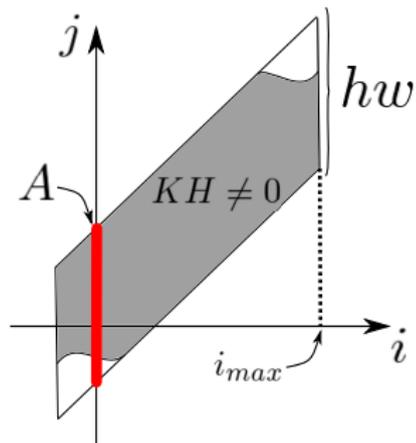
graded \mathbf{Q} -vector space

$$\longmapsto KH^i(D) = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} KH^{i,j}(D)$$

Maximal degree, H-thickness

L : 向き付けられた絡み目

$$A := \{j - 2i \in \mathbf{Z} \mid KH^{i,j}(L) \neq 0\}$$

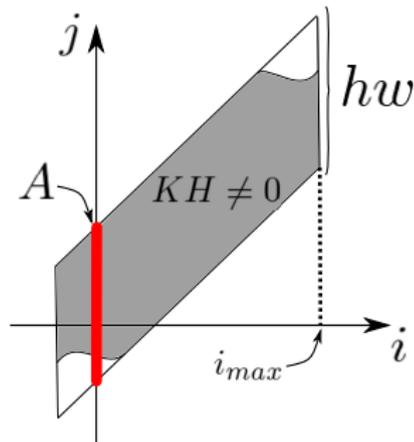


Maximal degree, H-thickness

L : 向き付けられた絡み目

$$A := \{j - 2i \in \mathbf{Z} \mid KH^{i,j}(L) \neq 0\}$$

- $i_{\max}(L) := \max\{i \in \mathbf{Z} \mid KH^i(L) \neq 0\}$
- $hw(L) := \frac{\max A - \min A}{2} + 1$

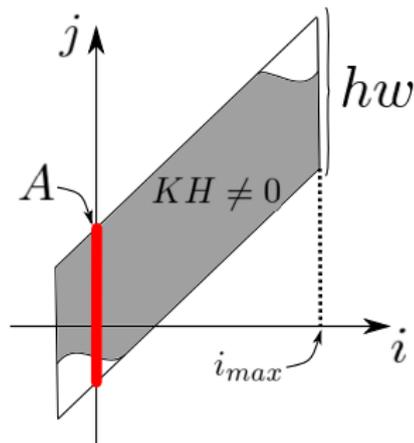


Maximal degree, H-thickness

L : 向き付けられた絡み目

$$A := \{j - 2i \in \mathbf{Z} \mid KH^{i,j}(L) \neq 0\}$$

- $i_{\max}(L) := \max\{i \in \mathbf{Z} \mid KH^i(L) \neq 0\}$
- $hw(L) := \frac{\max A - \min A}{2} + 1$



系 (Khovanov homology の定義の系)

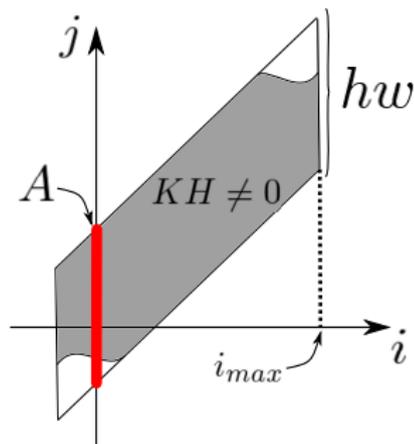
$$i_{\max}(L) \leq c_+(L) := \min\{c_+(D) \mid D \text{ は } L \text{ の図式}\}$$

Maximal degree, H-thickness

L : 向き付けられた絡み目

$$A := \{j - 2i \in \mathbf{Z} \mid KH^{i,j}(L) \neq 0\}$$

- $i_{\max}(L) := \max\{i \in \mathbf{Z} \mid KH^i(L) \neq 0\}$
- $hw(L) := \frac{\max A - \min A}{2} + 1$



系 (Khovanov homology の定義の系)

$$i_{\max}(L) \leq c_+(L) := \min\{c_+(D) \mid D \text{ は } L \text{ の図式}\}$$

定理 (Lee)

$$L: \text{non-split alternating link} \Rightarrow hw(L) = 2$$

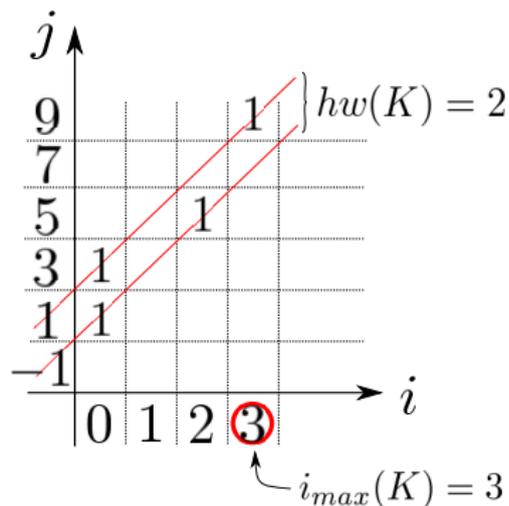
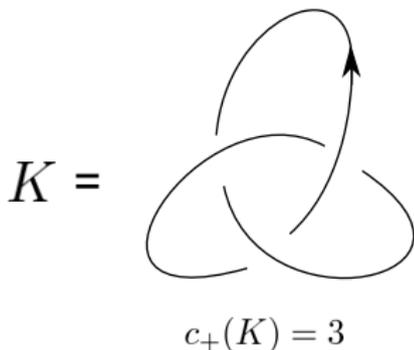
三葉結び目の Khovanov homology

K : (右手系) 三葉結び目

$$KH^{i,j}(K) = \begin{cases} \mathbf{Q} & (i,j) = (0,1), (0,3), (2,5), (3,9), \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

$$i_{\max}(K) = 3 = c_+(K),$$

$$hw(K) = 2$$



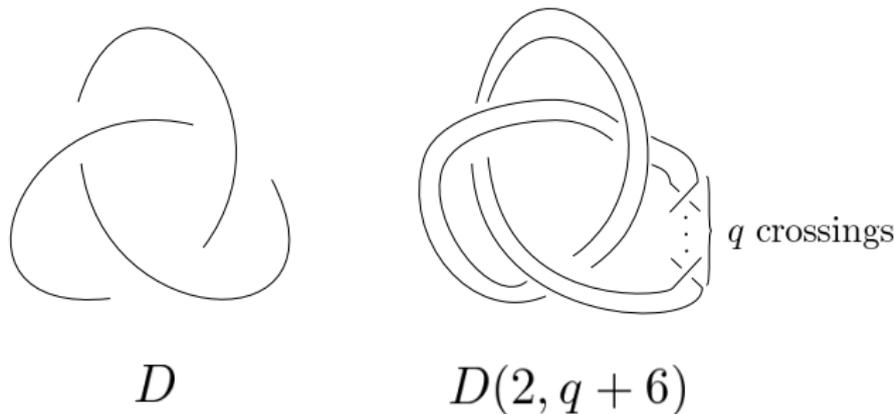
ケーブリング

K : 結び目

D : K の図式

$D(p, q)$: D を p 本平行化して q/p だけねじってできる図式

$K(p, q)$: $D(p, q)$ により表される絡み目



$K(p, q)$ を K の (p, q) -ケーブリングという.

トーラス絡み目に対する結果 1

定理 (Stošić)

$$k \geq 1, n \geq 1$$

$T_{2k,2kn}$: $(2k, 2kn)$ -トーラス絡み目

(=自明な結び目の $(2k, 2kn)$ -ケーブリング)

- $i_{\max}(T_{2k,2kn}) = 2k^2n$
- $KH^{2k^2n, 6k^2n-2i}(T_{2k,2kn}) \neq 0$ ($i = 0, \dots, k$)
- $hw(T_{2k,2kn}) \geq k(k-1)n + 2$.

トラス絡み目に対する結果 2

定理 (T)

$$k \geq 1, n \geq 1$$

$T_{2k+1, (2k+1)n}$: $(2k+1, (2k+1)n)$ -トラス絡み目
(=自明な結び目の $(2k+1, (2k+1)n)$ -ケーブルリング)

- $i_{\max}(T_{2k+1, (2k+1)n}) = 2k(k+1)n$
- $KH^{2k(k+1)n, 6k(k+1)n+1-2i}(T_{2k+1, (2k+1)n}) \neq 0 \quad (i = 0, \dots, k+1)$
- $hw(T_{2k+1, (2k+1)n}) \geq k^2n + 2.$

トーラス絡み目に対する結果 2

定理 (T)

$k \geq 1, n \geq 1, T_{2k+1, (2k+1)n}$: $(2k+1, (2k+1)n)$ -トーラス絡み目

- $hw(T_{2k+1, (2k+1)n}) \geq k^2 n + 2$.

トーラス絡み目に対する結果 2

定理 (T)

$k \geq 1, n \geq 1, T_{2k+1, (2k+1)n}$: $(2k+1, (2k+1)n)$ -トーラス絡み目

- $hw(T_{2k+1, (2k+1)n}) \geq k^2 n + 2$.

定理 (Turner, Stošić)

$$hw(T_{3, 3n}) = |n| + 2$$

トーラス絡み目に対する結果 2

定理 (T)

$k \geq 1, n \geq 1, T_{2k+1, (2k+1)n}$: $(2k+1, (2k+1)n)$ -トーラス絡み目

- $hw(T_{2k+1, (2k+1)n}) \geq k^2 n + 2$.

定理 (Turner, Stošić)

$$hw(T_{3, 3n}) = |n| + 2$$

定理 (Asaeda-Przytycki)

D : m 回の交差交換で *alternating* となる図式

$$m \geq hw(D) - 2$$

トーラス絡み目に対する結果 2

定理 (T)

$k \geq 1, n \geq 1, T_{2k+1, (2k+1)n}$: $(2k+1, (2k+1)n)$ -トーラス絡み目

- $hw(T_{2k+1, (2k+1)n}) \geq k^2 n + 2$.

定理 (Turner, Stošić)

$$hw(T_{3, 3n}) = |n| + 2$$

定理 (Asaeda-Przytycki)

D : m 回の交差交換で *alternating* となる図式

$$m \geq hw(D) - 2$$

定理 (Abe-Kishimoto)

$T_{3, 3n}$ は $|n|$ 回の交差入れ替えで *alternating* となる図式を持つ。

トーラス絡み目に対する結果 2

定理 (T)

$k \geq 1, n \geq 1, T_{2k+1, (2k+1)n}$: $(2k+1, (2k+1)n)$ -トーラス絡み目

- $hw(T_{2k+1, (2k+1)n}) \geq k^2 n + 2$.

定理 (Turner, Stošić)

$$hw(T_{3, 3n}) = |n| + 2$$

定理 (Asaeda-Przytycki)

D : m 回の交差交換で *alternating* となる図式

$$m \geq hw(D) - 2$$

定理 (Abe-Kishimoto)

$T_{3, 3n}$ は $|n|$ 回の交差入れ替えで *alternating* となる図式を持つ。
従って, $T_{3, 3n}$ の図式を *alternating* にするために必要な交差の入れ替えの最小回数は $|n|$ 回である。

トラス絡み目に対する結果 2

定理 (T)

$$k \geq 1, n \geq 1$$

$T_{2k+1, (2k+1)n}$: $(2k+1, (2k+1)n)$ -トラス絡み目
(=自明な結び目の $(2k+1, (2k+1)n)$ -ケーブルリング)

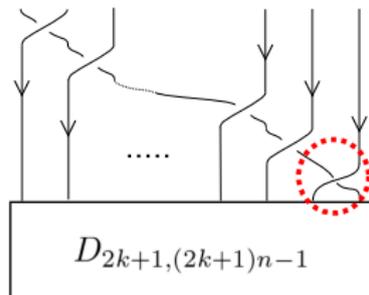
- $i_{\max}(T_{2k+1, (2k+1)n}) = 2k(k+1)n$
- $KH^{2k(k+1)n, 6k(k+1)n+1-2i}(T_{2k+1, (2k+1)n}) \neq 0$ ($i = 0, \dots, k+1$)
- $hw(T_{2k+1, (2k+1)n}) \geq k^2n + 2.$

証明の概要

$$D_{p,q} = (\sigma_1 \cdots \sigma_{p-1})^q$$

($D_{p,q}$ の閉包は $T_{p,q}$ の図式)

$$D_{2k+1, (2k+1)n} =$$

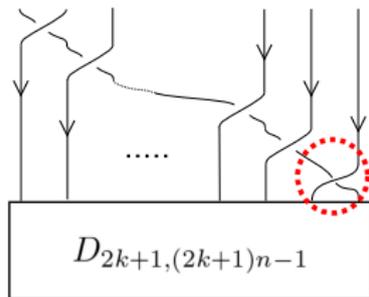


証明の概要

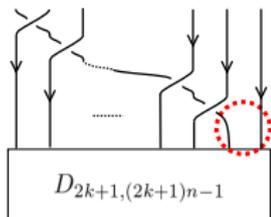
$$D_{p,q} = (\sigma_1 \cdots \sigma_{p-1})^q$$

($D_{p,q}$ の閉包は $T_{p,q}$ の図式)

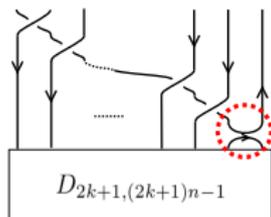
$$D_{2k+1, (2k+1)n} =$$



$$D_{2k+1, (2k+1)n}^1 =$$



$$E_{2k+1, (2k+1)n}^1 =$$



証明の概要

Khovanov homology に対する長完全系列 (Viro, Khovanov) :

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow KH^{i-1-n-}(E_{2k+1,(2k+1)n}^1) &\rightarrow KH^i(D_{2k+1,(2k+1)n}) \rightarrow \\ &\rightarrow KH^i(D_{2k+1,(2k+1)n}^1) \rightarrow KH^{i-n-}(E_{2k+1,(2k+1)n}^1) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

証明の概要

Khovanov homology に対する長完全系列 (Viro, Khovanov) :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow KH^{i-1-n-}(E_{2k+1,(2k+1)n}^1) \rightarrow KH^i(D_{2k+1,(2k+1)n}) \rightarrow \\ \rightarrow KH^i(D_{2k+1,(2k+1)n}^1) \rightarrow KH^{i-n-}(E_{2k+1,(2k+1)n}^1) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

$$E_{2k+1,(2k+1)n}^1 \approx \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ D_{2k+1,(2k+1)n-1} \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ D_{2k-1,(2k-1)n} \end{array} \right] \approx D_{2k-1,(2k-1)n} \sqcup \bigcirc$$

証明の概要

Khovanov homology に対する長完全系列 (Viro, Khovanov) :

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow KH^{i-1-n-}(E_{2k+1,(2k+1)n}^1) \rightarrow KH^i(D_{2k+1,(2k+1)n}) \rightarrow \\ \rightarrow KH^i(D_{2k+1,(2k+1)n}^1) \rightarrow KH^{i-n-}(E_{2k+1,(2k+1)n}^1) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

$$E_{2k+1,(2k+1)n}^1 \approx \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \boxed{D_{2k+1,(2k+1)n-1}} \end{array} \approx \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \boxed{D_{2k-1,(2k-1)n}} \end{array} \approx D_{2k-1,(2k-1)n} \sqcup \bigcirc$$

$KH(D_{2k-1,(2k-1)n})$ と $KH(D_{2k+1,(2k+1)n}^1)$ から $KH(D_{2k+1,(2k+1)n})$ がでる。
 → k に関する帰納法により証明できる

結び目のケーブリングへの拡張

定理 (T)

K : 結び目, D : K の図式

c_+ : D の *positive crossings* の数

c_- : D の *negative crossings* の数

結び目のケーブリングへの拡張

定理 (T)

K : 結び目, D : K の図式

c_+ : D の *positive crossings* の数

c_- : D の *negative crossings* の数

$K(p, q)$: K の (p, q) -ケーブリング

$f := c_+ - c_-$, $k \geq 1$

結び目のケーブリングへの拡張

定理 (T)

K : 結び目, D : K の図式

c_+ : D の *positive crossings* の数

c_- : D の *negative crossings* の数

$K(p, q)$: K の (p, q) -ケーブリング

$f := c_+ - c_-$, $k \geq 1$

$n \geq c_+ + c_-$

- $i_{\max}(K(2k, 2k(n+f))) = 2k^2(n+f)$
- $2k(k+1)(n+f) \leq i_{\max}(K(2k+1, (2k+1)(n+f)))$
 $\leq 2k(k+1)(n+f) + c_+$.

結び目のケーブリングへの拡張

定理 (T)

K : 結び目, D : K の図式

c_+ : D の *positive crossings* の数

c_- : D の *negative crossings* の数

$K(p, q)$: K の (p, q) -ケーブリング

$f := c_+ - c_-$, $k \geq 1$

$n \geq c_+ + c_-$

- $i_{\max}(K(2k, 2k(n+f))) = 2k^2(n+f)$
- $2k(k+1)(n+f) \leq i_{\max}(K(2k+1, (2k+1)(n+f)))$
 $\leq 2k(k+1)(n+f) + c_+$

$n > c_+ + c_-$

- $KH^{2k^2(n+f), 6k^2(n+f)-2i}(K(2k, 2k(n+f))) \neq 0$ ($i = 0, \dots, k$).

主定理からわかること

定理 (T)

$n \geq c_+ + c_-$, $f := c_+ - c_-$, $k \geq 1$

- $i_{\max}(K(2k, 2k(n+f))) = 2k^2(n+f)$
- $2k(k+1)(n+f)$
 $\leq i_{\max}(K(2k+1, (2k+1)(n+f))) \leq 2k(k+1)(n+f) + c_+.$

主定理からわかること

定理 (T)

$$n \geq c_+ + c_-, f := c_+ - c_-, k \geq 1$$

- $i_{\max}(K(2k, 2k(n+f))) = 2k^2(n+f)$
- $2k(k+1)(n+f)$
 $\leq i_{\max}(K(2k+1, (2k+1)(n+f))) \leq 2k(k+1)(n+f) + c_+.$
- $c_+ = c_- = 0 \Rightarrow K(p, q)$ はトラス絡み目 $T_{p,q}$ と一致, $f = 0$.

主定理からわかること

定理 (T)

$$n \geq c_+ + c_-, f := c_+ - c_-, k \geq 1$$

- $i_{\max}(K(2k, 2k(n+f))) = 2k^2(n+f)$
- $2k(k+1)(n+f) \leq i_{\max}(K(2k+1, (2k+1)(n+f))) \leq 2k(k+1)(n+f) + c_+$
- $c_+ = c_- = 0 \Rightarrow K(p, q)$ はトラス絡み目 $T_{p,q}$ と一致, $f = 0$.
 $\Rightarrow i_{\max}(T_{2k, 2kn}) = 2k^2n$
 $i_{\max}(T_{2k+1, (2k+1)n}) = 2k(k+1)n$
前定理の i_{\max} に関する結果を与えている.

主定理からわかること

定理 (T)

$$n \geq c_+ + c_-, f := c_+ - c_-, k \geq 1$$

- $i_{\max}(K(2k, 2k(n+f))) = 2k^2(n+f)$
- $2k(k+1)(n+f) \leq i_{\max}(K(2k+1, (2k+1)(n+f))) \leq 2k(k+1)(n+f) + c_+$.
- $c_+ = c_- = 0 \Rightarrow K(p, q)$ はトラス絡み目 $T_{p,q}$ と一致, $f = 0$.
 $\Rightarrow i_{\max}(T_{2k, 2kn}) = 2k^2n$
 $i_{\max}(T_{2k+1, (2k+1)n}) = 2k(k+1)n$
前定理の i_{\max} に関する結果を与えている.
- $i_{\max}(K(2k, 2k(n+f)))$ は n が十分大きいとき一定の割合で増える.
増え方はひねる本数 $2k$ で決まり, 初めに選ぶ結び目 K に依らない.

応用例 1

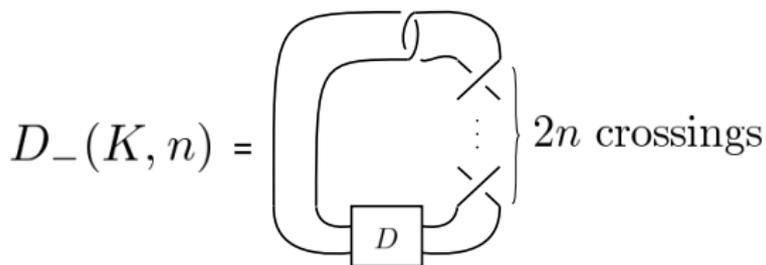
二重化結び目の Khovanov ホモロジー

応用例 1 : 二重化結び目の Khovanov ホモロジー

応用例

K : 結び目, D : K の図式 (c_+ positive crossing), $n > 2c_+$

$$KH^{0,j}(D_-(K, n)) = \begin{cases} \mathbf{Q} & j = -2 \pm 1, \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

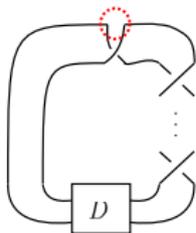


応用例 1 : 二重化結び目の Khovanov ホモロジー

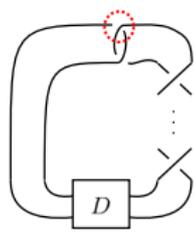
応用例

K : 結び目, D : K の図式 (c_+ positive crossing), $n > 2c_+$

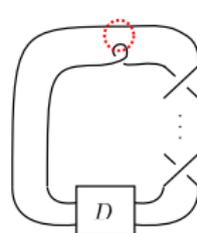
$$KH^{0j}(D_-(K, n)) = \begin{cases} \mathbf{Q} & j = -2 \pm 1, \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$



L_1



$D_-(K, n)$



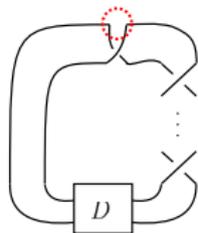
L_0

応用例 1 : 二重化結び目の Khovanov ホモロジー

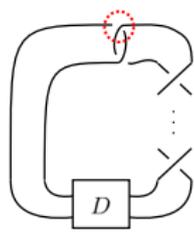
応用例

K : 結び目, D : K の図式 (c_+ positive crossing), $n > 2c_+$

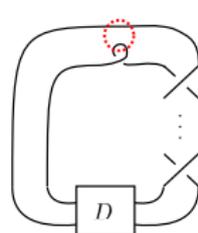
$$KH^{0j}(D_-(K, n)) = \begin{cases} \mathbf{Q} & j = -2 \pm 1, \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$



L_1



$D_-(K, n)$



L_0

n が十分大きいとき, 結び目 K に依らず $KH^{0j}(D_-(K, n))$ が決まる.

定義 (Rasmussen)

K : 結び目

$Lee(K)$: 結び目 K の Lee ホモロジー

(KH からはじまる, あるスペクトル系列の収束値)

定義 (Rasmussen)

K : 結び目

$Lee(K)$: 結び目 K の Lee ホモロジー

(KH からはじまる, あるスペクトル系列の収束値)

s_1, s_2 : $Lee(K)$ の生成元 (事実として $\dim(Lee(K)) = 2$ である)

$j(s_i)$: s_i の q -grading ($j(s_1) > j(s_2)$ とする)

$$s(K) := \frac{j(s_1) + j(s_2)}{2}$$

を結び目 K の Rasmussen 不変量という.

定義 (Rasmussen)

K : 結び目

$Lee(K)$: 結び目 K の Lee ホモロジー

(KH からはじまる, あるスペクトル系列の収束値)

s_1, s_2 : $Lee(K)$ の生成元 (事実として $\dim(Lee(K)) = 2$ である)

$j(s_i)$: s_i の q -grading ($j(s_1) > j(s_2)$ とする)

$$s(K) := \frac{j(s_1) + j(s_2)}{2}$$

を結び目 K の Rasmussen 不変量という.

注意 (Lee, Rasmussen)

事実として $Lee^0(K) = \mathbf{Q}[s_1] \oplus \mathbf{Q}[s_2]$, $j(s_1) = s(K) + 1$, $j(s_2) = s(K) - 1$ ということが知られているので, $KH^{0, s(K) \pm 1}(K) \neq 0$ となる.

応用例 1 : 二重化結び目の Khovanov ホモロジー

$n > 2c_+(D)$ に対して

$$KH^{0,j}(D_-(K, n)) = \begin{cases} \mathbf{Q} & j = -2 \pm 1 \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

となるので, $KH^{0,s(D_-(K,n))\pm 1}(D_-(K, n)) \neq 0$ より,

応用例 1 : 二重化結び目の Khovanov ホモロジー

$n > 2c_+(D)$ に対して

$$KH^{0,j}(D_-(K, n)) = \begin{cases} \mathbf{Q} & j = -2 \pm 1 \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

となるので, $KH^{0,s(D_-(K,n))\pm 1}(D_-(K, n)) \neq 0$ より,

系

$$c_+(K) = \min\{c_+(D) \mid D \text{ は } K \text{ の diagram}\}$$

$$n > 2c_+(K)$$

$$s(D_-(K, n)) = -2$$

$|s(D_-(K, n))| \leq 2g_4(D_-(K, n)) \leq 2$ ということが知られているので, $s(D_-(K, n))$ が $\pm 2, 0$ のいずれかであることはすぐわかる.

応用例 2

positive knot のケーブリング

応用例 2 : positive knot のケーブリング

応用例

K : positive knot

D : K の positive diagram

$c = c_+$: D の交点数

$s(K)$: K の Rasmussen 不変量

応用例 2 : positive knot のケーブリング

応用例

K : positive knot

D : K の positive diagram

$c = c_+$: D の交点数

$s(K)$: K の Rasmussen 不変量

$n > c, k \geq 1$

- $hw(K(2k, 2k(n+c))) \geq k(k-1)(n+c) + 2 + ks(K).$

応用例 2 : positive knot のケーブリング

応用例

K : positive knot

D : K の positive diagram

$c = c_+$: D の交点数

$s(K)$: K の Rasmussen 不変量

$n > c, k \geq 1$

- $hw(K(2k, 2k(n+c))) \geq k(k-1)(n+c) + 2 + ks(K).$

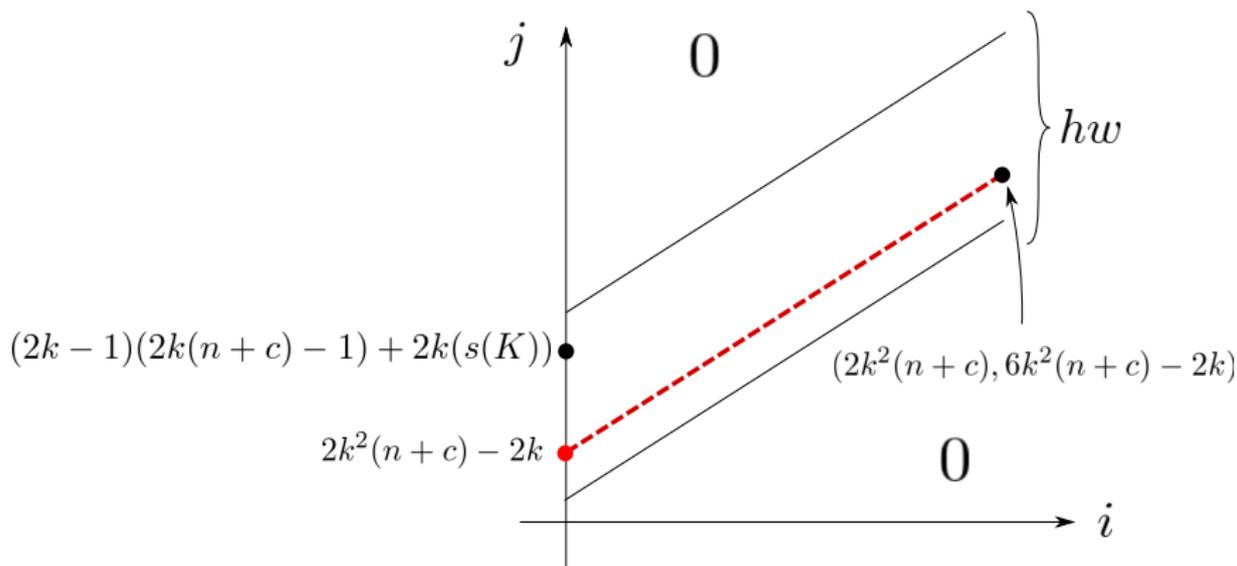
定理 (Asaeda-Przytycki)

D : m 回の交差交換で alternating となる図式

$$m \geq hw(D) - 2$$

$k > 1$ のとき, 幾何的にも positive knot の $(2k, 2kn)$ -ケーブリングはねじるほど (n が大きいほど) alternating から遠ざかる.

応用例 2 : positive knot のケーブリング

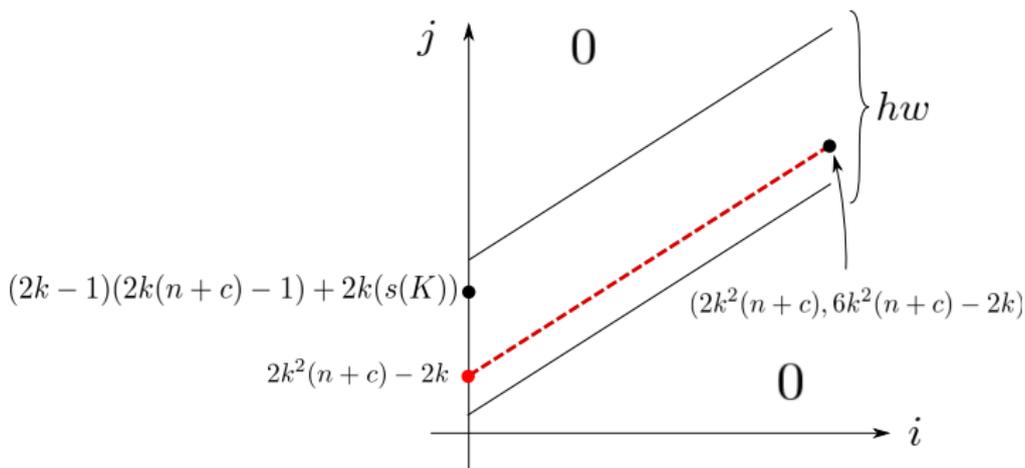


応用例 2 : positive knot のケーブリング

$$hw(K(2k, 2k(n+c)))$$

$$\geq \frac{1}{2}((2k-1)(2k(n+c)-1) + 2k(s(K)) + 1 - 2k^2(n+c) + 2k) + 1$$

$$= k(k-1)(n+c) + 2 + ks(K).$$



応用例 3

結び目の positivity との関連

応用例 3 : 結び目の positivity との関係

K : 結び目

$$c_+(K) := \min\{c_+(D) \mid D \text{ は } K \text{ の図式}\}$$

応用例 3 : 結び目の positivity との関係

K : 結び目

$$c_+(K) := \min\{c_+(D) \mid D \text{ は } K \text{ の図式}\}$$

注意

$c_+(K) = 0 \Leftrightarrow K$ は *negative knot*.

応用例 3 : 結び目の positivity との関係

K : 結び目

$$c_+(K) := \min\{c_+(D) \mid D \text{ は } K \text{ の図式}\}$$

注意

$c_+(K) = 0 \Leftrightarrow K$ は *negative knot*.

系

$$i_{\max}(K) \leq c_+(K)$$

応用例 3 : 結び目の positivity との関係

定理 (T)

K : 結び目, D : 結び目 K の図式

$$n \geq c_+(D) + c_-(D), f := c_+(D) - c_-(D), k \geq 1$$

- $i_{\max}(K(2k, 2k(n+f))) = 2k^2(n+f)$
- $2k(k+1)(n+f) \leq i_{\max}(K(2k+1, (2k+1)(n+f))) \leq 2k(k+1)(n+f) + c_+(D).$

応用例 3 : 結び目の positivity との関係

定理 (T)

K : 結び目, D : 結び目 K の図式

$n \geq 2c_+(D), k \geq 1$

- $i_{\max}(K(2k, 2kn)) = 2k^2n$
- $2k(k+1)n \leq i_{\max}(K(2k+1, (2k+1)n)) \leq 2k(k+1)n + c_+(D).$

応用例 3 : 結び目の positivity との関係

定理 (T)

K : 結び目, D : 結び目 K の図式

$n \geq 2c_+(D), k \geq 1$

- $i_{\max}(K(2k, 2kn)) = 2k^2n$
- $2k(k+1)n \leq i_{\max}(K(2k+1, (2k+1)n)) \leq 2k(k+1)n + c_+(D).$

応用例 3 : 結び目の positivity との関係

定理 (T)

K : 結び目, D : 結び目 K の図式

$n \geq 2c_+(D)$, $k \geq 1$

- $i_{\max}(K(2k, 2kn)) = 2k^2n$
- $2k(k+1)n \leq i_{\max}(K(2k+1, (2k+1)n)) \leq 2k(k+1)n + c_+(D)$.

系 (T)

K : 結び目, $n \geq 2c_+(K)$, $k \geq 1$

$$0 \leq i_{\max}(K(2k+1, (2k+1)n)) - 2k(k+1)n \leq c_+(K)$$

応用例 3 : 結び目の positivity との関係

定理 (T)

K : 結び目, D : 結び目 K の図式

$n \geq 2c_+(D), k \geq 1$

- $i_{\max}(K(2k, 2kn)) = 2k^2n$
- $2k(k+1)n \leq i_{\max}(K(2k+1, (2k+1)n)) \leq 2k(k+1)n + c_+(D).$

応用例 3 : 結び目の positivity との関係

定理 (T)

K : 結び目, D : 結び目 K の図式

$n \geq 2c_+(D)$, $k \geq 1$

- $i_{\max}(K(2k, 2kn)) = 2k^2n$
- $2k(k+1)n \leq i_{\max}(K(2k+1, (2k+1)n)) \leq 2k(k+1)n + c_+(D)$.

図式 D は任意でよいので, $n \geq 2c_+(K)$ としてよい.

特に, $n = 2c_+(K)$ のとき $i_{\max}(K(2k, 2kn)) = 4k^2c_+(K)$.

応用例 3 : 結び目の positivity との関係

定理 (T)

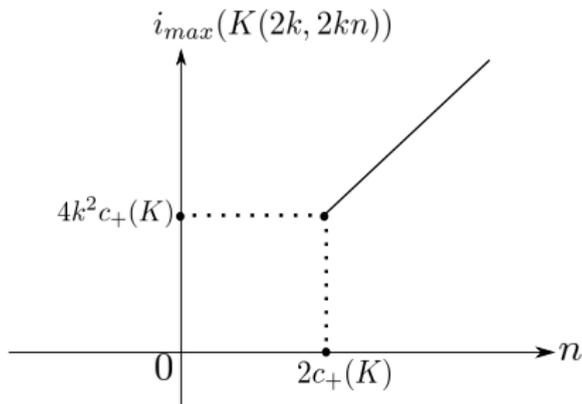
K : 結び目, D : 結び目 K の図式

$$n \geq 2c_+(D), k \geq 1$$

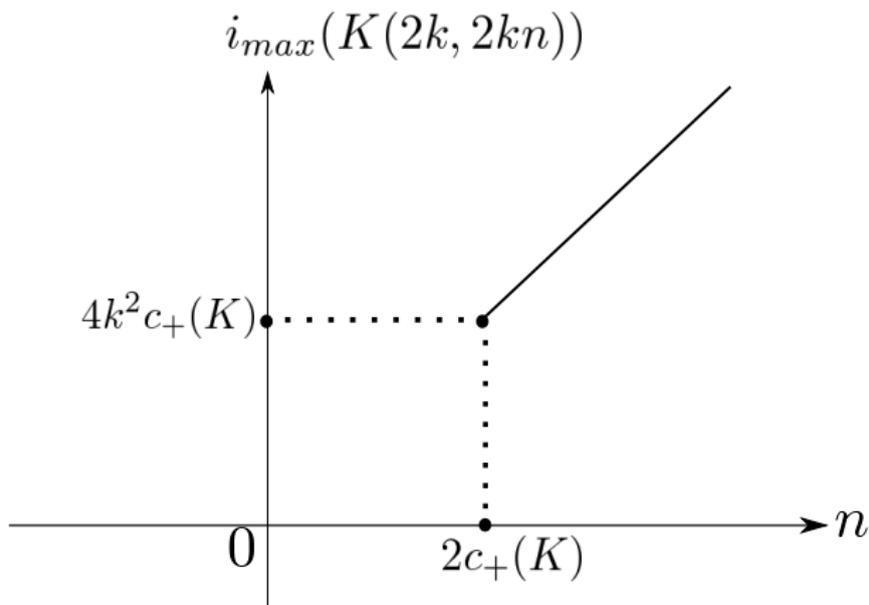
- $i_{\max}(K(2k, 2kn)) = 2k^2n$
- $2k(k+1)n \leq i_{\max}(K(2k+1, (2k+1)n)) \leq 2k(k+1)n + c_+(D).$

図式 D は任意でよいので, $n \geq 2c_+(K)$ としてよい.

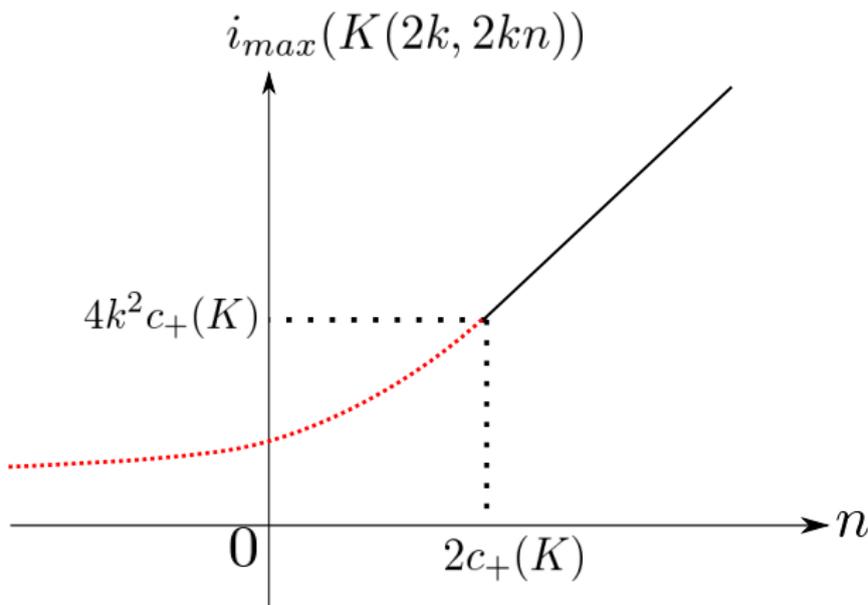
特に, $n = 2c_+(K)$ のとき $i_{\max}(K(2k, 2kn)) = 4k^2c_+(K).$



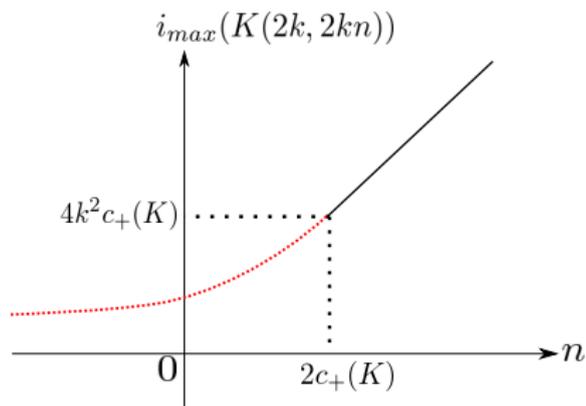
応用例 3 : 結び目の positivity との関係



応用例 3 : 結び目の positivity との関係



応用例 3 : 結び目の positivity との関係



系

$$n \leq 2c_+(K), k \geq 1$$

$$0 \leq i_{max}(K(2k, 2kn)) \leq 4k^2c_+(K)$$

特に,

$$0 \leq i_{max}(K(2k, 0)) \leq 4k^2c_+(K)$$

今後の課題

- ひねる回数 n が小さいときの $i_{\max}(K(p, pn))$ やそこでのコバノフホモロジーのふるまいはどうなっているのか？
- 二成分以上の絡み目のケーブリングに対して，結び目のケーブリングの結果の類似が得られるか？
- 結び目の positivity とコバノフホモロジーの関係について