K-Brunnian links and finite type invariants

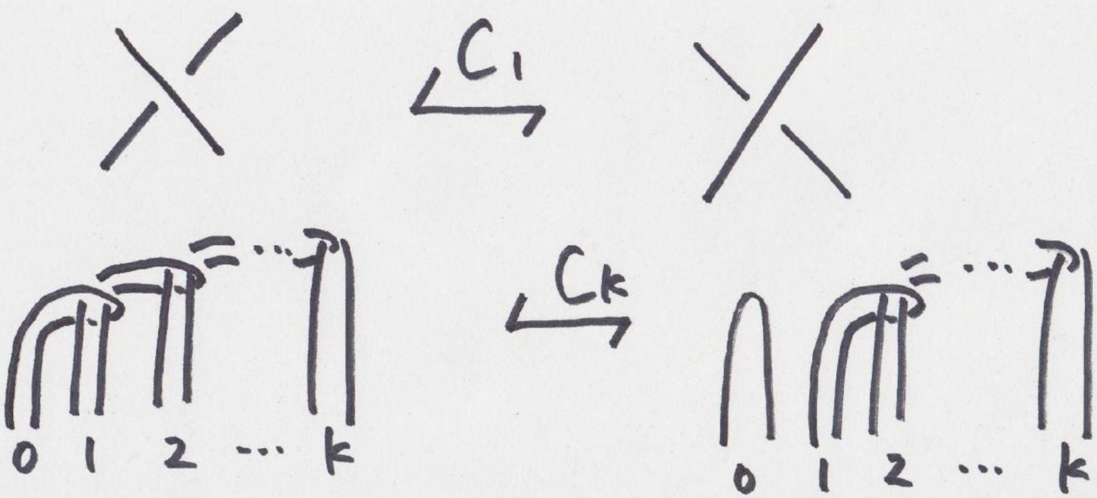
東京学芸大学大学院 教育学研究科 M2
清田 恵理

準備

L : $(n+1)$-comp link

U : $(n+1)$-comp trivial link

Def (C_k-move, C_k^d-move) [Habiro]



C_k^d-move : C_k-moveにおいて成分が全て異なるmove

Def (C_k-equivalent, C_k^d-equivalent)

L, L' : link

L と L' が C_k-equivalent (C_k^d-equivalent)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ L と L' が有限回の C_k-move (C_k^d-move)

と ambient isotopy でうつり合う

このとき $L \overset{C_k}{\sim} L'$ とあらわす

($L \overset{C_k^d}{\sim} L'$)

Def (k-component equivalent)

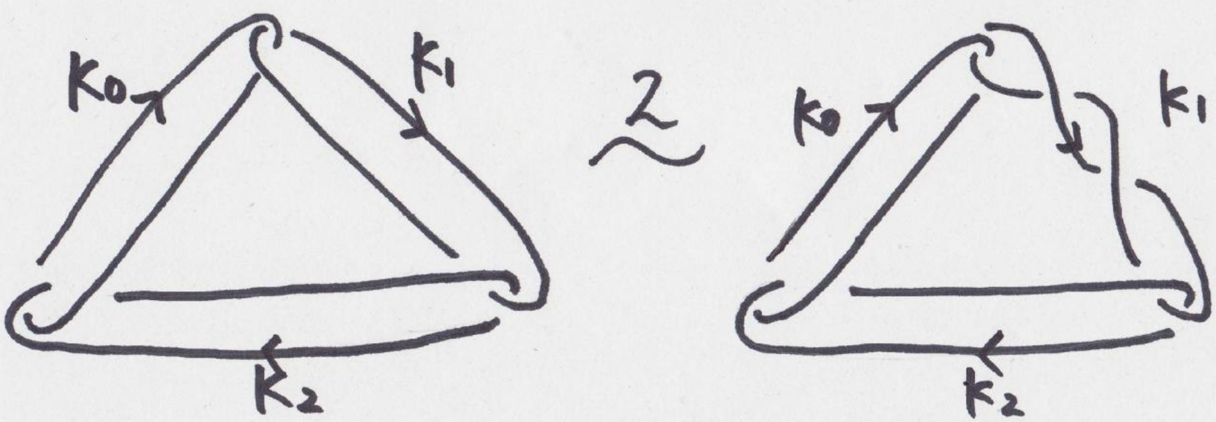
$L = K_0 \cup \cdots \cup K_n$, $L' = K_0' \cup \cdots \cup K_n'$

$L \overset{k}{\sim} L'$: L と L' が k-component equivalent

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\forall} S \subset \{0, 1, \cdots, n\}$ s.t. $|S| = k$

$$\bigcup_{i \in S} K_i \cong \bigcup_{i \in S} K_i'$$

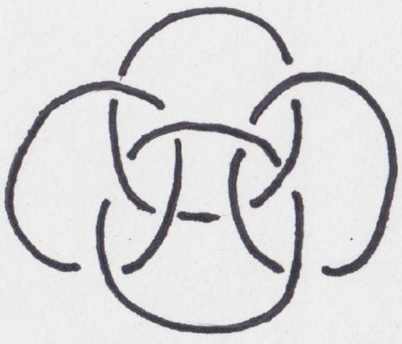
example



$L \overset{k}{\simeq} U$ のとき L : k-Brunnian link

$L \overset{n}{\simeq} U$ のとき L : Brunnian link

<u>example</u>



4-comp 2-Brunnian link

5-comp Brunnian link

今回の研究

Thm [Miyazawa-Yasuhara, Habiro]

$n \geq 1$

$$L \overset{n}{\sim} U \iff L \overset{C_n^d}{\sim} U$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} L \overset{k}{\sim} U \\ L \overset{k}{\sim} L' \end{array}\right\} \text{ではどうなるか}$$

Thm

$n \geq 1$

$$L \overset{k}{\sim} U \underset{(\Leftarrow \text{自明})}{\Longrightarrow} L \overset{C^d_k}{\sim} U$$

Problem

$n \geq 1$

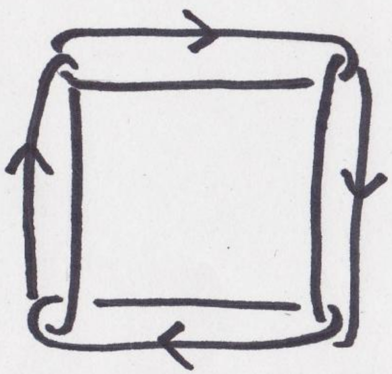
$$L \overset{k}{\sim} L' \underset{(\Leftarrow \text{自明})}{\overset{?}{\Longrightarrow}} L \overset{C^d_k}{\sim} L'$$

Problem

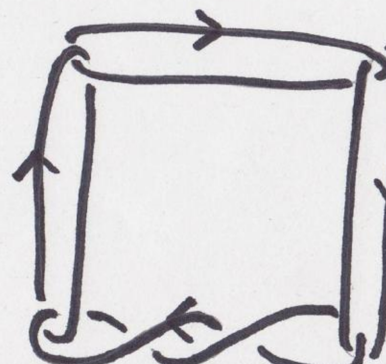
$$\left[\; L \overset{k}{\sim} L' \overset{?}{\Longrightarrow} L \overset{C_k^d}{\sim} L' \;\right]$$

$k=1$ のとき　自明

$k \geq 3$ のとき

$L =$ 

$\mathrm{Arf}(L) = 0$

$L' =$ 

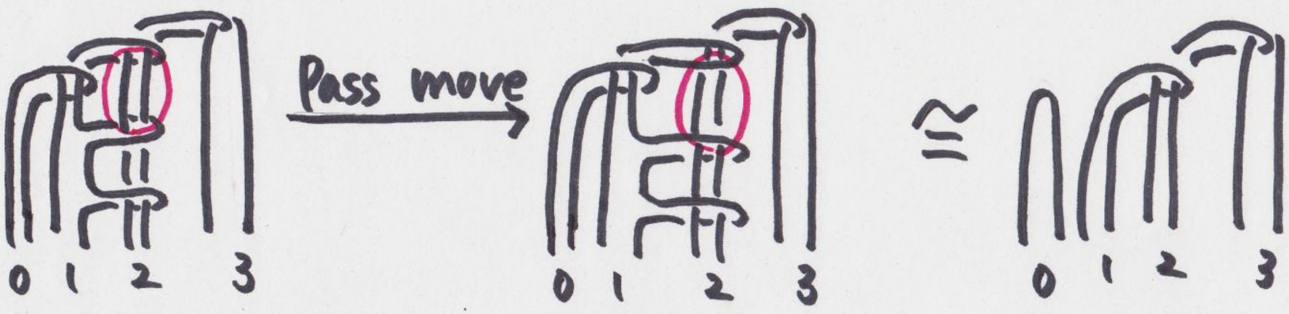
$\mathrm{Arf}(L') = 1$

$k \geq 3$ において C_k-move で Arf inv は変化しない.

㋡ lemma [Murakami - Nakanishi]

Arf inv は pass move で変化しない.

C_3-move は pass move から得られる



よって $L \overset{C_3}{\not\sim} L'$

$k \geq 4$ のときも同様に反例ができる

$k=2$ のとき

C_2-move で Arf invariant は変化する

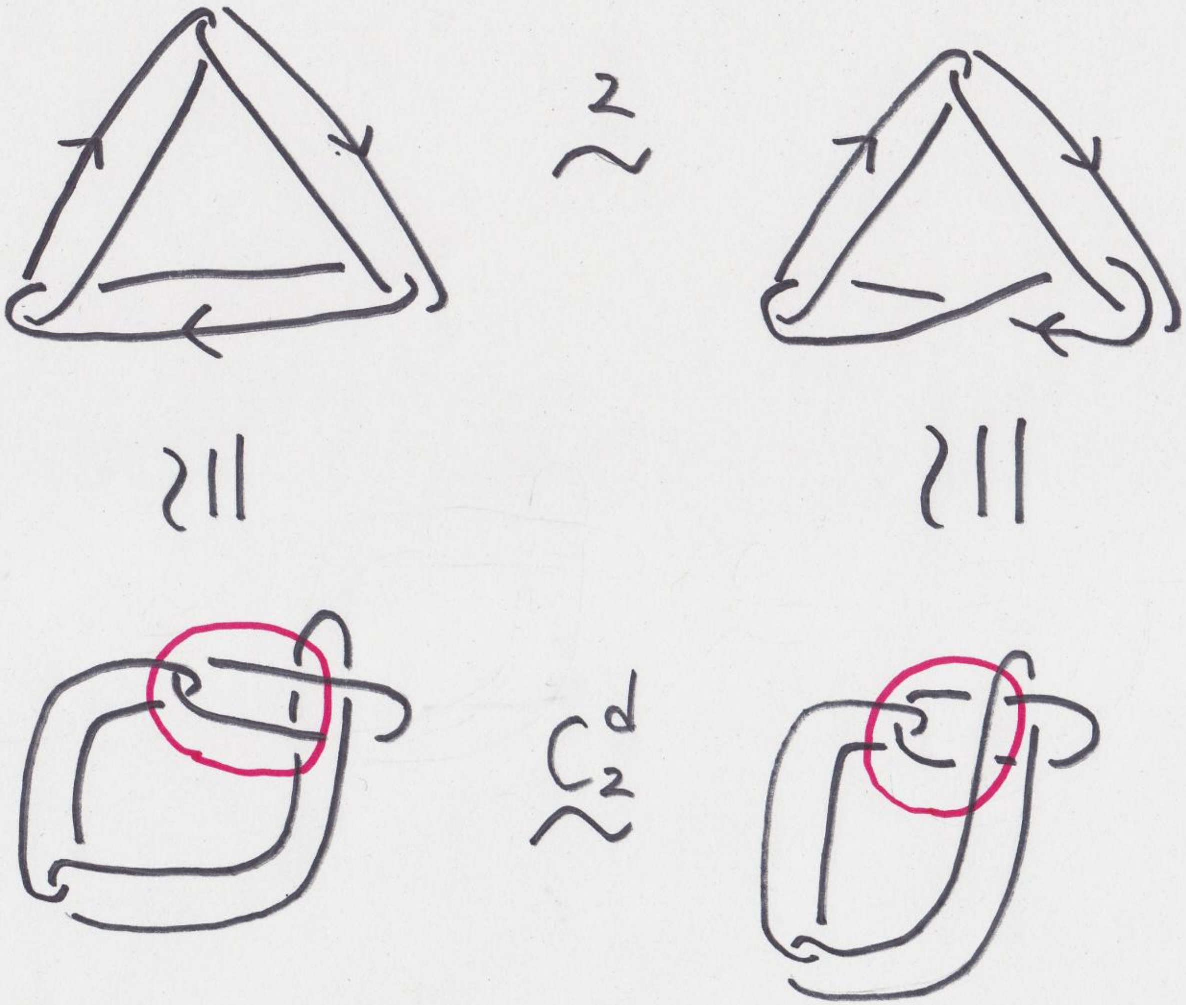
(i) L, L' : 全ての成分が trivial である link

$$L \overset{2}{\sim} L' \overset{?}{\Longrightarrow} L \overset{C_2^d}{\sim} L'$$

(ii) L, L' : (i) の条件を除いた link

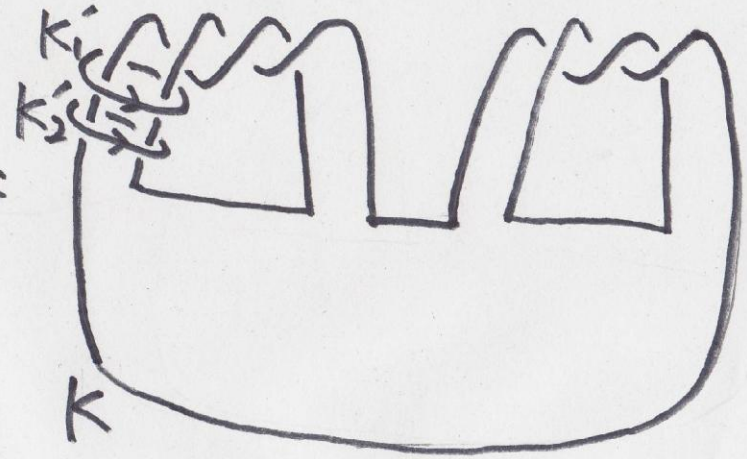
$$L \overset{2}{\sim} L' \overset{?}{\Longrightarrow} L \overset{C_2^d}{\sim} L'$$

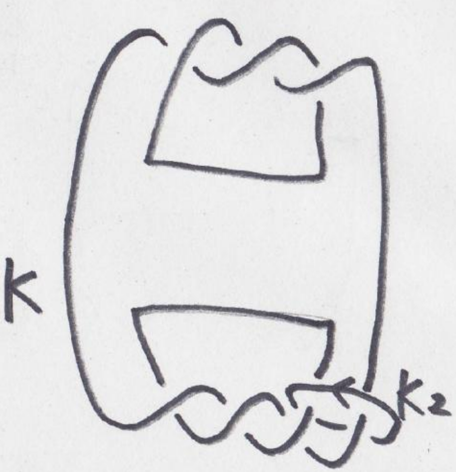
(i)のとき

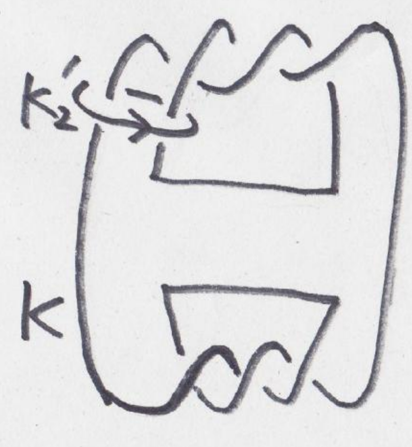


(ii) のとき

$L =$ 

$L' =$ 

$L \overset{2}{\sim} L'$ $\Big($ ∵ 

$\cong$ 

$\Big)$

X^2 : double branched cover over K

$L \overset{C_2^d}{\sim} L'$ と仮定すると

$K_1 \backsim K_1'$, $K_2 \backsim K_2'$ in $S^3 \setminus K$

よって $^\exists \tilde{K}_1\ \tilde{K}_1'$: lift s.t. $\tilde{K}_1 \backsim \tilde{K}_1'$

$^\exists \tilde{K}_2\ \tilde{K}_2'$: lift s.t. $\tilde{K}_2 \backsim \tilde{K}_2'$

$$lk_{X^2}(\tilde{K}_1\ \tilde{K}_2) \equiv lk_{X^2}(\tilde{K}_1'\ \tilde{K}_2') \pmod 1$$

今

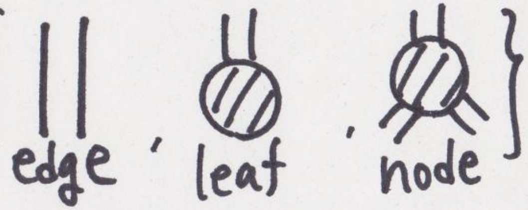
$$lk_{X^2}(\tilde{K}_1\ \tilde{K}_2) \equiv 0$$

$$lk_{X^2}(\tilde{K}_1'\ \tilde{K}_2') \equiv \pm\frac{1}{3}$$ より 矛盾

$$\therefore L \overset{C_2^d}{\not\sim} L'.$$

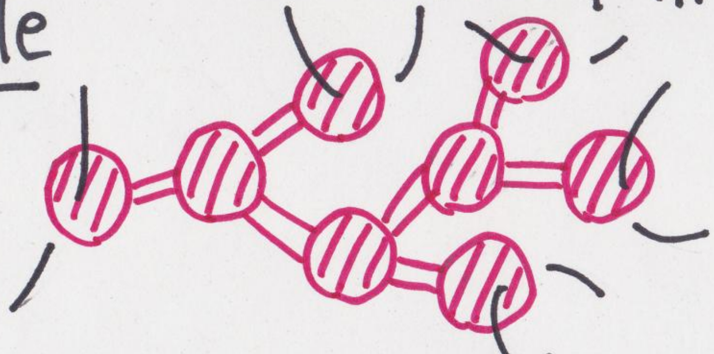
Def (clasper) [Habiro]

L : link

strict clasper T : a disk consists of $\{$  $\}$

s.t. $T \pitchfork L = \{\text{leaves}\} \pitchfork L$

example



T : tree clasper $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ T : 単連結な clasper

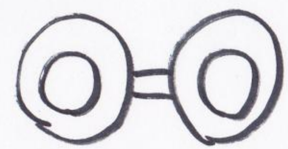
degree T : number of nodes of $T + 1$

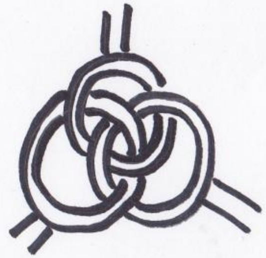
degree k の tree clasper を C_k - tree clasper とよぶ

Def (clasperにおけるsurgery)

T $\longmapsto$ union of  $\longmapsto$ L_c : framed link

 $\longmapsto$ 

 $\longmapsto$ 

 $\longmapsto$ 

Tにおけるsurgery : L_cにおけるsurgery

Def (C_k-moveの別定義)

$L \subset S^3$: link

T : strict tree clasper of degree k in S^3

S^3_T : S^3をTにおいてsurgeryすることで得られた3-mfd

$S^3_T \cong S^3$. $h : S^3_T \to S^3$: homeo

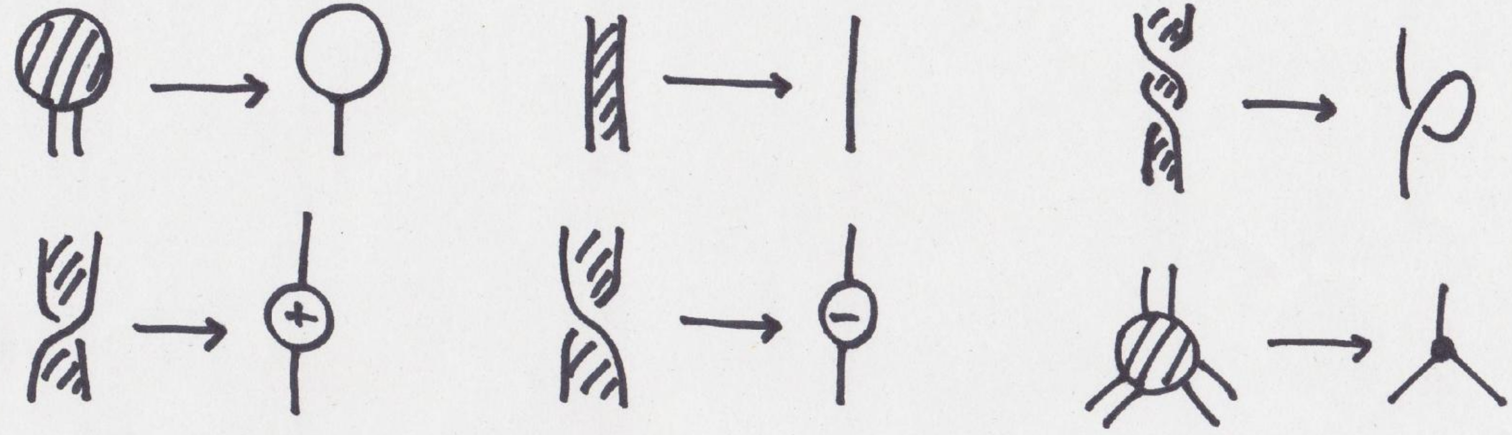
$h(L) = L_T$

LとL_Tは. C_k-moveでうつり合う

C_k^d-tree clasper : Tの各leafがLの異なる成分と交わるclasper

index $T := \{ i \mid T \cap (i\text{th component of } L) \neq \phi \}$

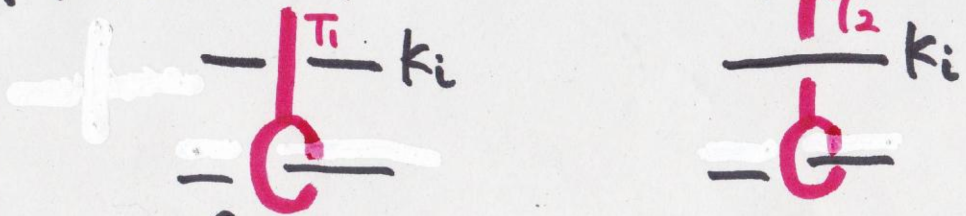
clasper の表示



Proposition [Habiro]

$L = K_0 \cup \cdots \cup K_n$ $\quad S \subset \{0, 1, \cdots, n\}$ with $|S| = k$

T_1, T_2 : C_k - tree clasper with indices S



$\Rightarrow L_{T_1} \overset{C_{k+1}}{\sim} L_{T_2}$

T : C_{k+1} - tree clasper with indices $\{S, i\}$ s.t. $(L_{T_1})_T \cong L_{T_2}$

Thm

$n \geq 1$

$$L \overset{k}{\sim} U \iff L \overset{C^d_k}{\sim} U$$

⟨proof⟩

$\Leftarrow$) 自明

$\Rightarrow$) $(n+1)-k$に関するinduction

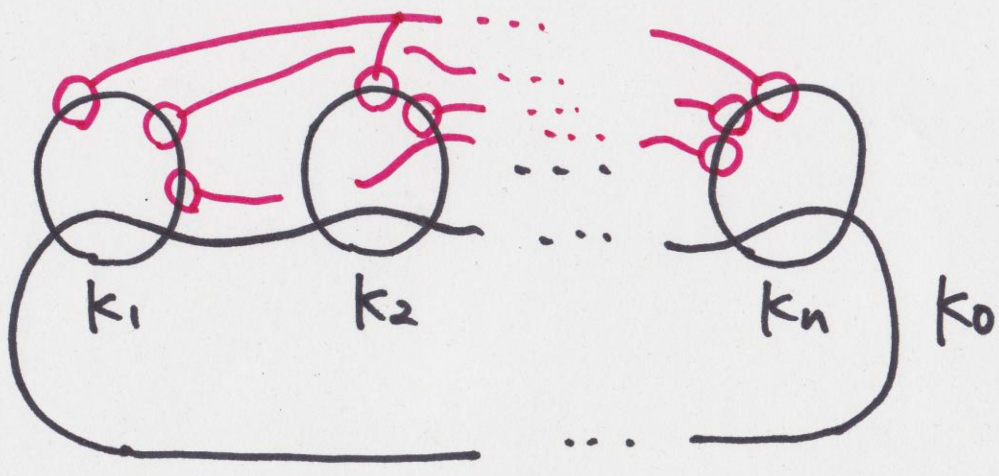
$(n+1)-k=0$ のとき．自明

$(n+1)-k \geq 1$ のとき

$L \setminus K_0 \overset{C_k^d}{\sim}$ n-comp trivial link

よって $L \setminus K_0 \cong$

$L \cong$



L から K_1 を split することを考える

L

$\downarrow$

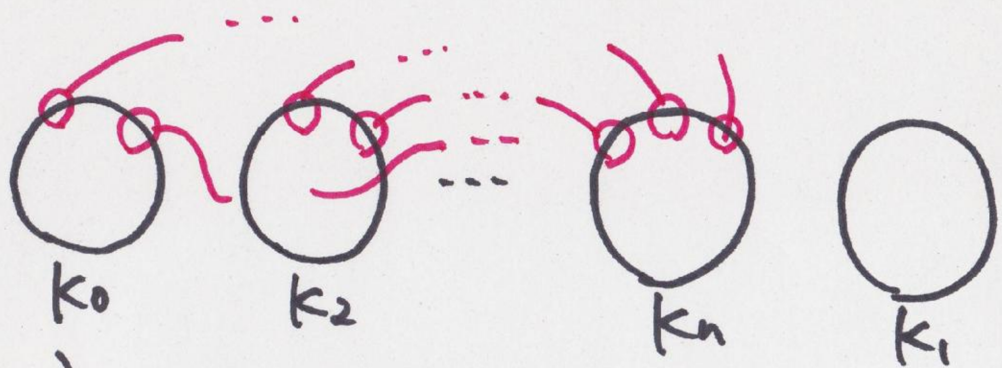
- K_1 についている clasper をはずす
- K_1 についていないが、K_1 と edge が絡んでいる clasper を交差交換
- $\boxed{K_0 \text{ と } K_1 \text{ を交差交換}}$ $= C_1^d$-move

$(L \setminus K_1) \sqcup K_1$

T' : C_1^d - tree clasper with indices $\{0.1\}$

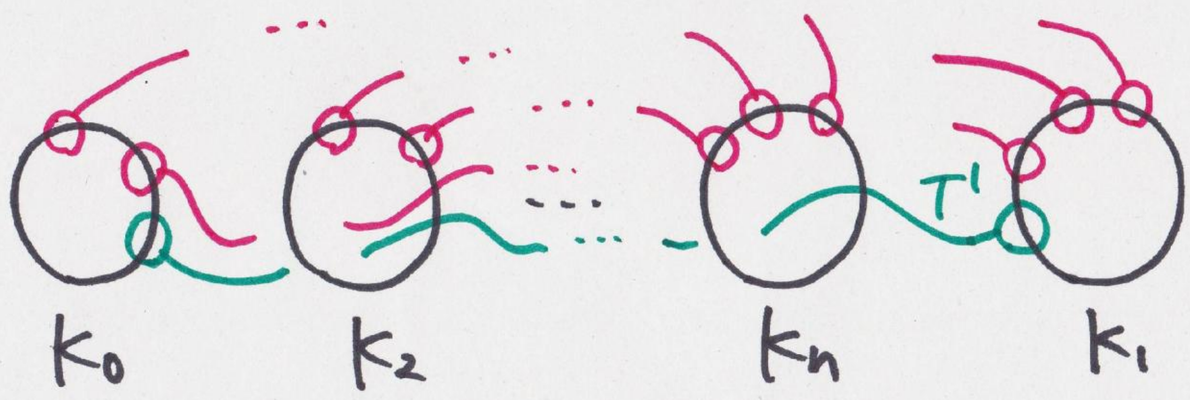
$L \setminus K_1 \overset{C_k^d}{\sim}$ n - comp trivial link

よって $(L \setminus K_1) \sqcup K_1 \cong$



$L \cong ((L \setminus K_1) \sqcup K_1)_{\cup T_i^k \cup T_i^{k+1} \cup T'}$

$L \cong$



L から K_2 を split することを考える

L

↓

- K_2 についている clasper をはずす
- K_2 についていないが K_2 と edge が絡んでいる clasper を交差交換
- $\boxed{T' \text{ と } K_2 \text{ の交差交換}}$ $= C_2^d$-move

$(L \setminus K_2) \sqcup K_2$

T^2 : C_2^d-tree clasper with indices $\{0.1.2\}$

$$L \cong ((L \setminus K_2) \sqcup K_2)_{\cup T_i^k \cup T_i^{k+1} \cup T_i^{k+2} \cup T^2}$$

同じことをくり返していく.

L から K_k を split することを考える

$$L \xrightarrow{K_k\text{についているclasperをはずす}+\boxed{T^{k-1}\text{と}K_k\text{のcrossing change}}} (L \setminus K_k) \sqcup K_k$$

$\boxed{T^{k-1}\text{と}K_k\text{のcrossing change}} = C_k^d\text{-move}$

$$L \cong ((L \setminus K_k) \sqcup K_k)_{\cup T_i^k \cup T_i^{k+1} \cdots \cup T_i^n \cup T^k}$$

よって $L \overset{C_k^d}{\sim} (L \setminus K_k) \sqcup K_k \overset{C_k^d}{\sim} U$

Notation

$\mathcal{L}$: set of oriented link type

$\mathbb{Z}\mathcal{L}$: $\mathcal{L}$で生成される自由$\mathbb{Z}$−加群

$$
\begin{array}{ccccc}
K & : & \{\text{singular links}\} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\mathcal{L} \\
 & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & & L & \longmapsto & K(L)
\end{array}
$$

J_k : $\{K(L) \mid L : k\text{−singular link}\}$で生成される$\mathbb{Z}\mathcal{L}$のsub module

Def (the universal Vassiliev invariant)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[r, "自然な単射"] \arrow[rr, bend right, "v_{k-1}"'] & \mathbb{Z}\mathcal{L} \arrow[r, "自然な射影"] & \mathbb{Z}\mathcal{L}/J_k \end{tikzcd}$$

v_{k-1} : the universal Vassiliev invariant of order $\leq k-1$ $(k \in \mathbb{N})$

定義から

$$L - L' \in J_k \Longleftrightarrow v_{k-1}(L) = v_{k-1}(L')$$

Thm [Habiro]

$n \geq 2$

$$L \overset{n}{\sim} U \Rightarrow L - U \in J_{2n}$$

即ち $v_{2n-1}(L) = v_{2n-1}(U)$

Thm

$n \geq 2$

$$L \overset{k}{\sim} U \Rightarrow L - U \in J_{2k}$$

即ち $v_{2k-1}(L) = v_{2k-1}(U)$