ハンドル体結び目の量子不変量

早稲田大学大学院基幹理工学研究科
水澤篤彦

村上順教授（早稲田大学）との共同研究

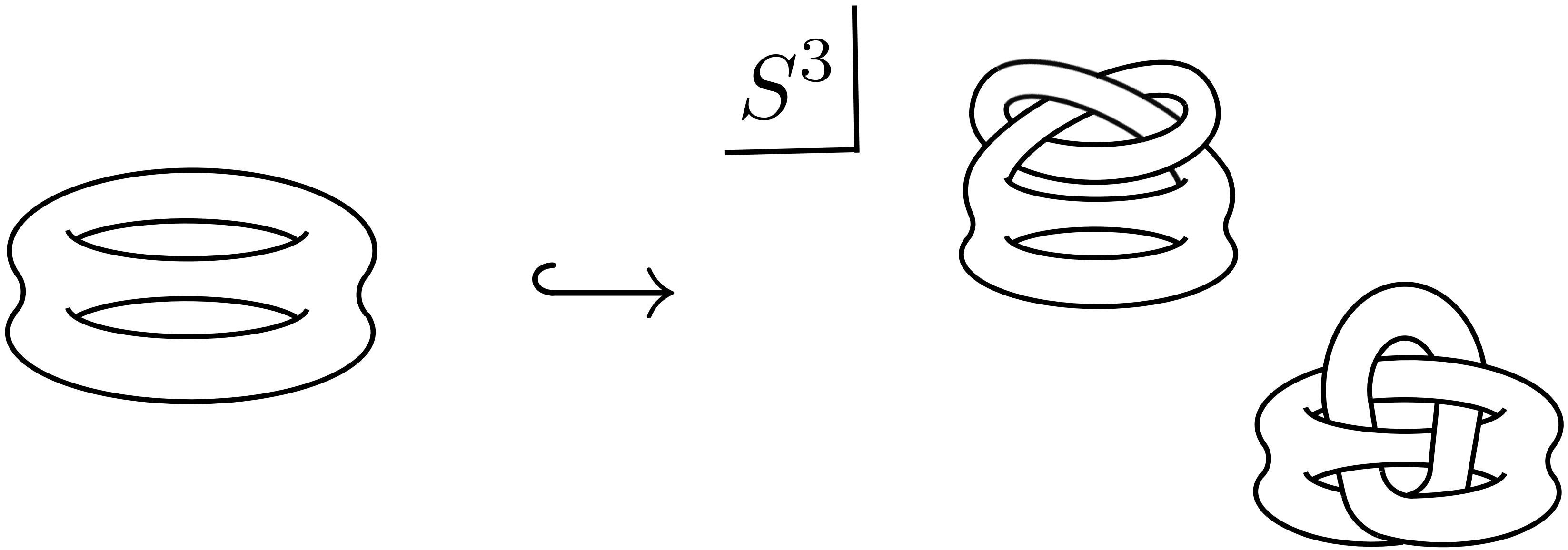
本日の内容

- ハンドル体結び目
- 量子不変量の構成
- 計算例

ハンドル体結び目

ハンドル体結び目

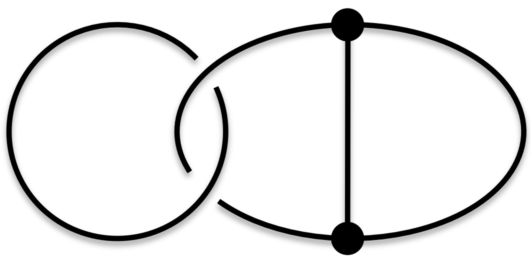
・ハンドル体の３次元球面への埋め込み



・2つのハンドル体結び目は等しいとは、S^3 のisotopyにより互いに移り合うときをいう

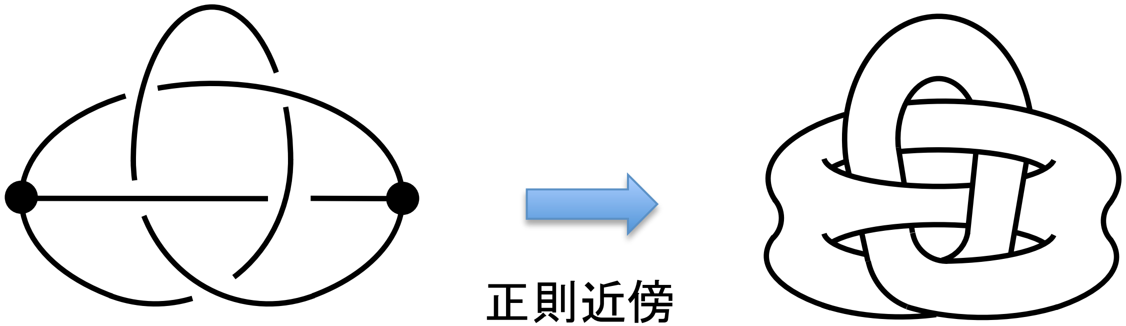
空間3価グラフ

- 3価の空間グラフを、有限3価グラフとループの3次元球面への埋め込みとする。ループには、頂点、辺は無いものとする。

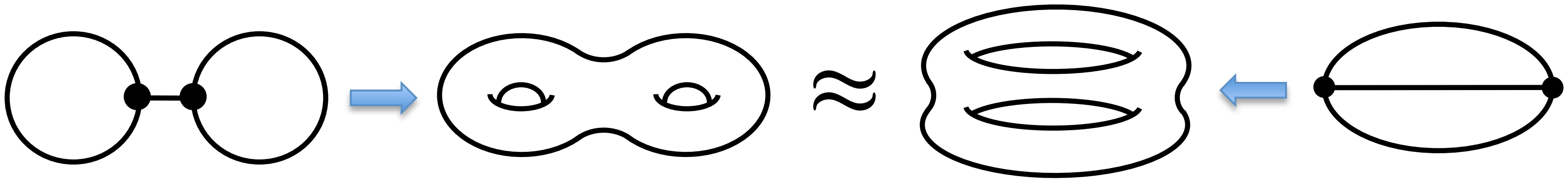


ハンドル体結び目との対応

・空間3価グラフからハンドル体結び目への対応

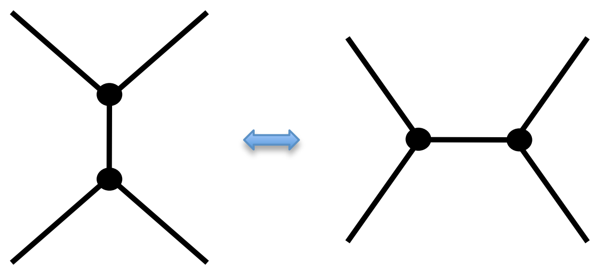


・複数のグラフが同一のハンドル体結び目に対応



ハンドル体結び目との対応

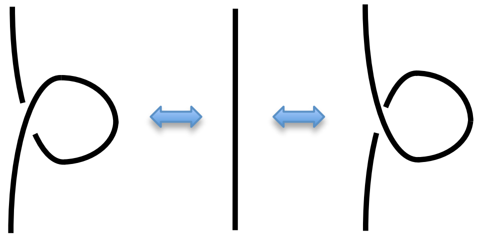
・空間3価グラフを IH moveで割ることで
1対1の対応が出来る [Ishii]



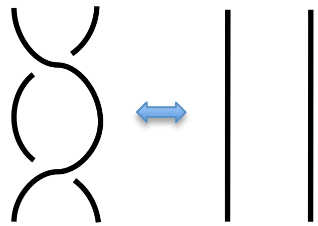
・空間3価グラフの射影図をライデマイスター
変形で割ることで1対1の対応が出来る [Ishii]

$$\{\text{Handlebody Knot}\}$$
$$= \{\text{Diagram of Spatial Trivalent Graph}\}/\{\text{R1-R6}\}$$

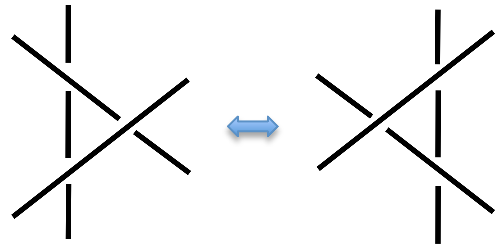
ライデマイスター変形（３価）



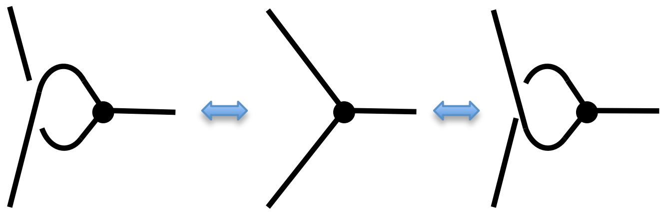
$R1$



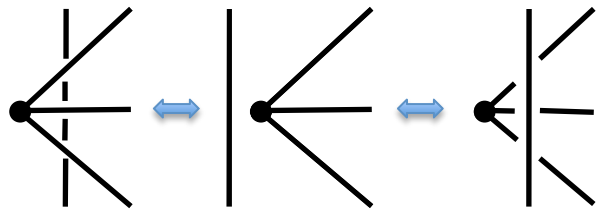
$R2$



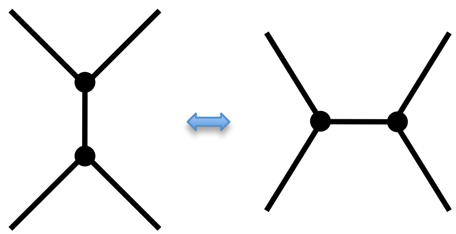
$R3$



$R4$



$R5$



$R6$

ハンドル体結び目の不変量

ハンドル体結び目の不変量

・空間グラフの射影図から得られる情報で RI-RVIで不変なものはハンドル体結びの不変量となる。

- Alexander Ideals
- Quandle cocycle invariants
- Quantum invariants by [Ishii and Masuoka]
- etc

量子不変量

・量子群の作用を通して定義される不変量の総称

- 結び目
  - Jones polynomial, HOMFLY polynomial, …
- 空間グラフ
  - Yokota’s invariants, Relativistic invariants, …
- ハンドル体結び目
  - Quantum invariants by [Ishii and Masuoka]
  - Quantum invariants via Yokota’s invariants

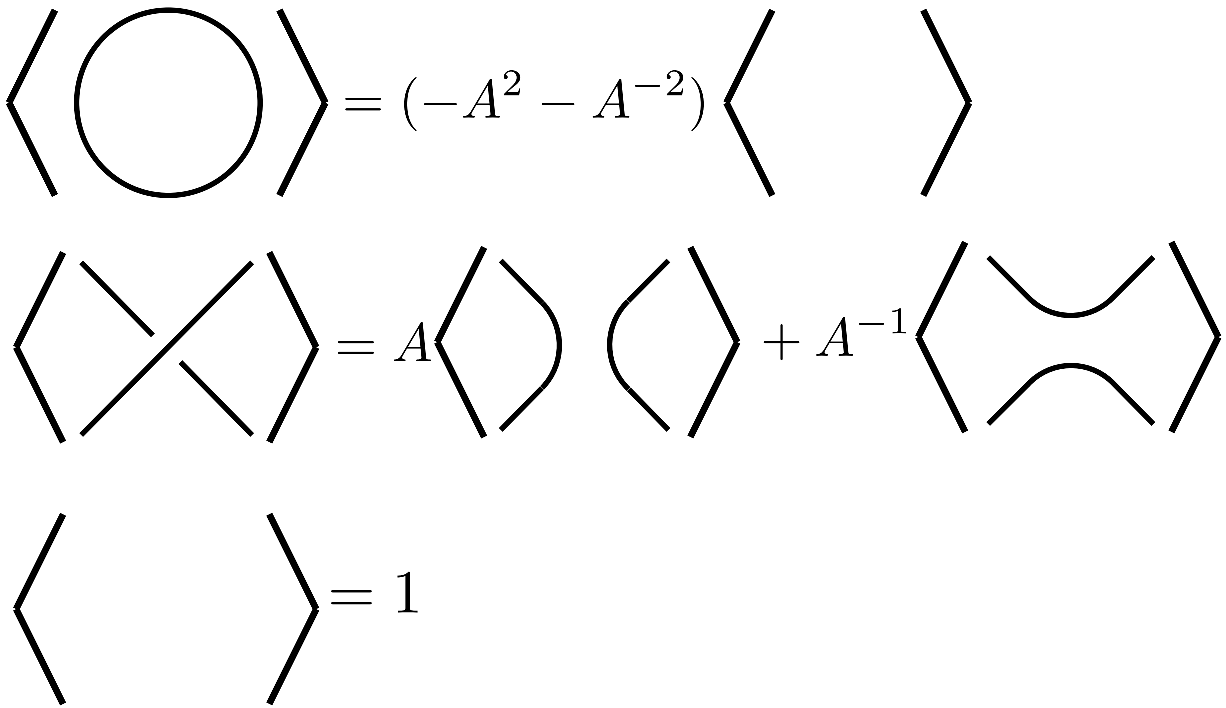
構成

- カウフマン・ブラケット$\langle \cdot \rangle$（RII, RIII）
- 空間グラフの横田の不変量$\langle \cdot \rangle_Y$（RI - RV）
- ハンドル体結び目の量子不変量$\langle \cdot \rangle_H$（RI - RVI）

カウフマン・ブラケット

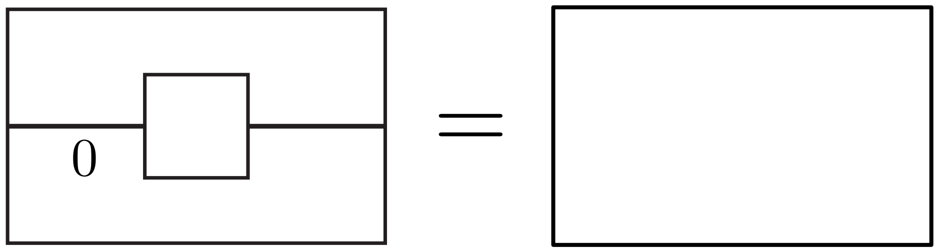
・S^2上の閉曲線で、交点がすべて2重点であり上下の情報を持つものに対して、次のように複素数値を対応させる。$\langle \cdot \rangle$の値は、R2、R3変形で不変である。

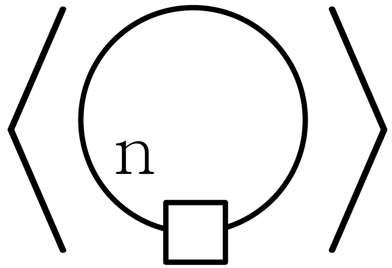
$$\mathrm{Fix}\ 3 \leq \mathrm{r} \in \mathbb{Z}\ ,\ A = \mathrm{e}^{\frac{\pi i}{2r}}$$

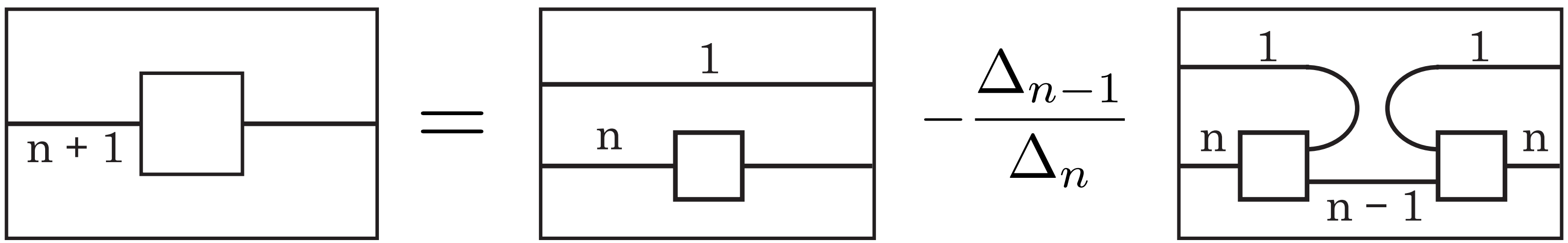


ジョーンズ・ウェンツル冪等元

・次のように帰納的に定められる、両端にn個の端点を持つ図式（の線形和）を考える。

・ 

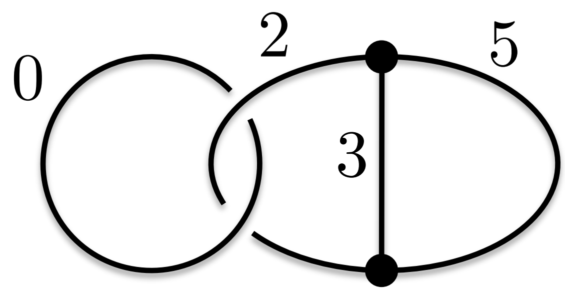
・ $\Delta_n :=$ 

・ 

$\Delta_{r-1} = 0$ より、$0 \leq n \leq r-1$ で定義される。

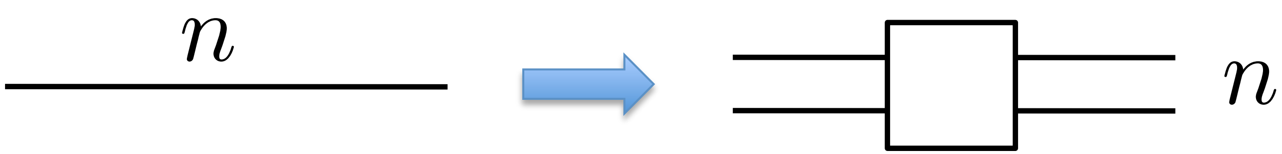
Colored Graph

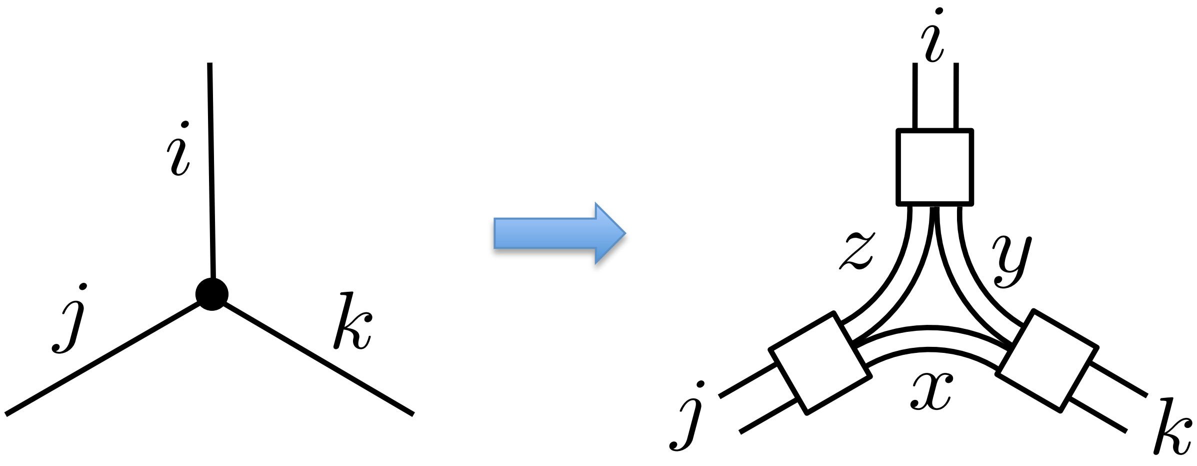
・0以上の整数をcolorと呼ぶ。グラフの辺、ループにcolorを1つ対応させたグラフをcolored graph と呼ぶ。



Colored Graph

・3価のcolored graphの射影図を次のように
閉曲線の線形和と見なす。

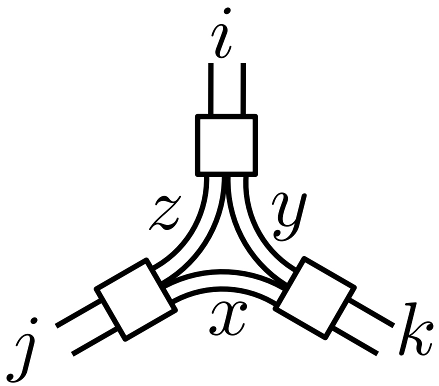




$$\begin{cases} x = \dfrac{j+k-i}{2} \\ y = \dfrac{i+k-j}{2} \\ z = \dfrac{i+j-k}{2} \end{cases}$$

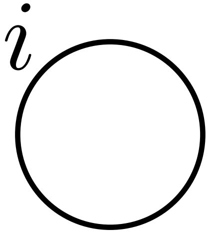
Colored Graph

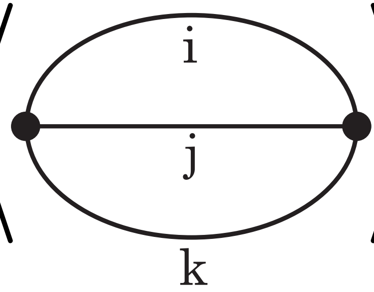
- Admissible 条件



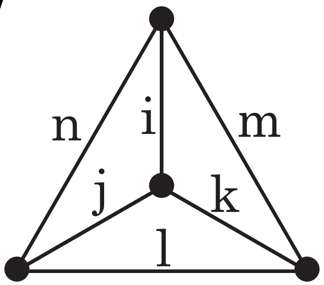
$$
\begin{cases}
0 \leq i, j, k \leq r - 2 \\
0 \leq i + j + k \leq 2(r-2) \\
i + j + k \in 2\mathbb{Z} \\
i \leq j + k, \;\; j \leq i + k, \;\; k \leq i + j
\end{cases}
$$

基本的な値

- $\Delta_i := \Big\langle$  $\Big\rangle$

- $\theta(i, j, k) := \Big\langle$  $\Big\rangle$

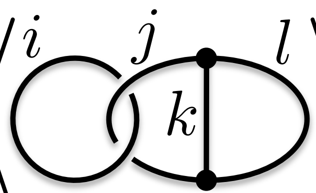
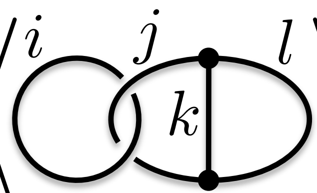
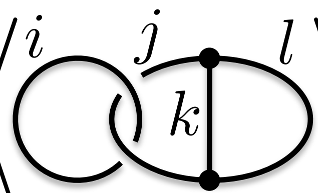
  If (i, j, k) is admissible, $\theta(i, j, k)$ is not zero.

- $\begin{bmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{bmatrix} := \Big\langle$  $\Big\rangle$

横田の不変量

- Γ を空間3価グラフ、D をその射影図とする。Γ に各頂点でadmissibleになるようにcolorを入れる。このとき、次で与えられる $\langle\cdot\rangle_Y$ の値は、D のR1～R5の変形で不変である。ここで $\overline{D}$ は D の鏡像を表す。

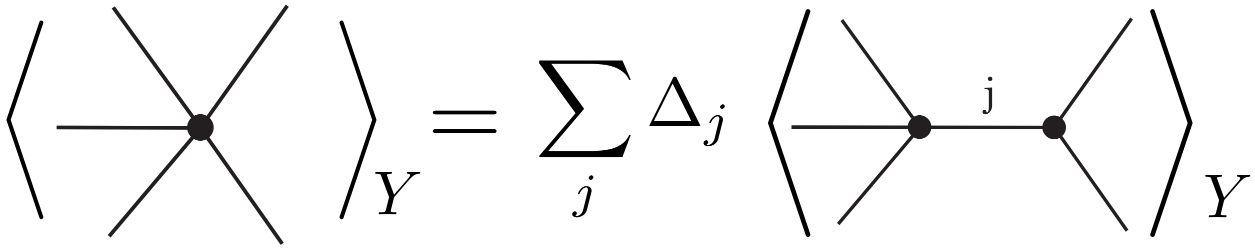
$$\langle D(i_1, i_2, \dots)\rangle_Y := \frac{\langle D(i_1, i_2, \dots)\rangle \langle \overline{D}(i_1, i_2, \dots)\rangle}{\prod_{\substack{\text{3 colors of} \\ \text{vertices}}} \theta(i_a, i_b, i_c)}$$

- $\Big\langle$  $\Big\rangle_Y = \Big\langle$  $\Big\rangle \Big\langle$  $\Big\rangle \Big/ \theta(j,k,l)^2$

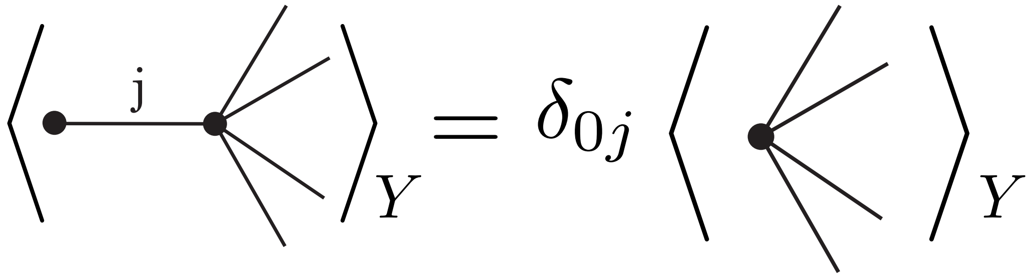
横田の不変量

・横田の不変量は、任意のグラフへ次の式で一般化される。

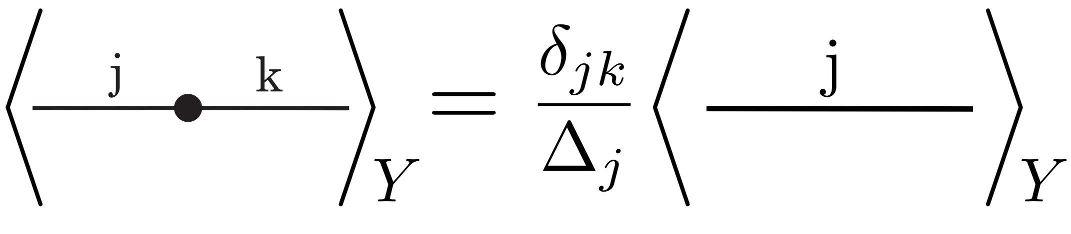
[n価の頂点(n>3)]



[1価の頂点]



[2価の頂点]

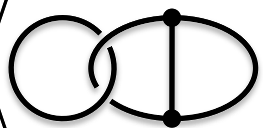
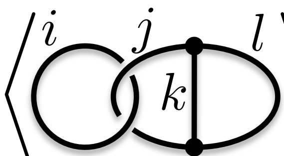


ハンドル体結び目の量子不変量

- Γ を空間3価グラフ、D をその射影図とする。Γ の各頂点で admissible になるようなcoloring全てについて、次のように重み付けした横田の不変量の和を取る。このとき、この値 $\langle \cdot \rangle_H$ は、D のR1～R6変形で不変である。

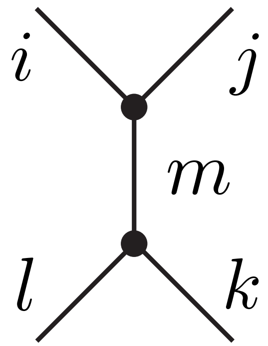
$$\langle D \rangle_H := \sum_{i_1, i_2, \ldots} \Bigl(\prod_{\substack{\text{colors} \\ \text{of edges}}} \Delta_{i_s} \Bigr) \langle D(i_1, i_2, \ldots) \rangle_Y$$

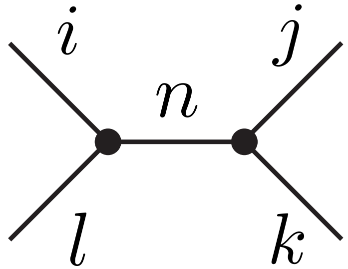
$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots} \Bigl(\prod_{\substack{\text{colors} \\ \text{of edges}}} \Delta_{i_s} \Bigr) \frac{\langle D(i_1, i_2, \ldots) \rangle \langle \overline{D}(i_1, i_2, \ldots) \rangle}{\prod_{\substack{\text{3 colors of} \\ \text{vertices}}} \theta(i_a, i_b, i_c)}$$

- $\Bigl\langle$  $\Bigr\rangle_H = \sum_{i,j,k,l} \Delta_j \Delta_k \Delta_l \Bigl\langle$ 

$\Bigr\rangle_Y$

局所変形の関係式

- $\Bigg\langle$


$\Bigg\rangle = \sum_n \begin{Bmatrix} i & j & m \\ k & l & n \end{Bmatrix} \Bigg\langle$


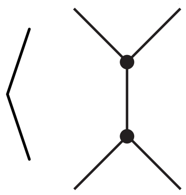
$\Bigg\rangle$

where $\quad \begin{Bmatrix} i & j & m \\ k & l & n \end{Bmatrix} = \dfrac{\begin{bmatrix} i & j & m \\ k & l & n \end{bmatrix} \Delta_n}{\theta(i,l,m)\theta(j,k,n)}$

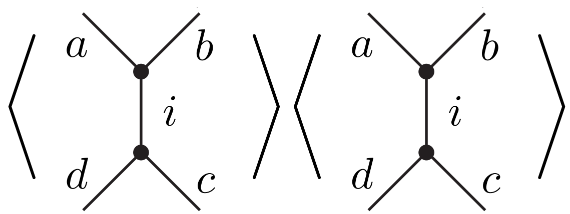
- $\displaystyle \sum_s \begin{Bmatrix} i & j & m \\ k & l & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l & i & s \\ j & k & n \end{Bmatrix} = \delta_{mn}$

ハンドル体結び目の量子不変量

- $\langle \cdot \rangle_H$ は、R6変形で不変である。

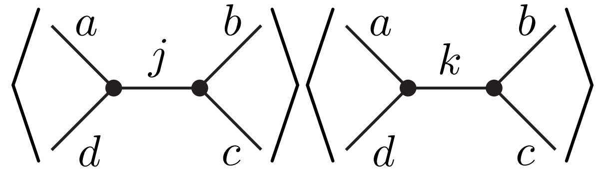


$$\Big\rangle_H = \sum_{i,\cdots} \frac{\Delta_i \cdots}{\theta(a,b,i)\theta(c,d,i)\cdots}$$



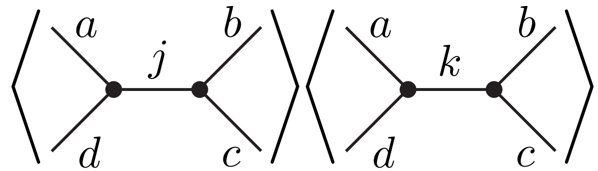
$$= \sum_{i,j,k,\cdots} \frac{\Delta_i \cdots}{\theta(a,b,i)\theta(c,d,i)\cdots} \begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & k \end{Bmatrix}$$

$$\times$$



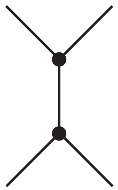
$$= \sum_{i,j,k,\cdots} \frac{\Delta_i \cdots}{\theta(a,b,i)\theta(c,d,i)\cdots} \frac{\Delta_j}{\Delta_i} \frac{\theta(a,b,i)\theta(c,d,i)}{\theta(a,d,j)\theta(b,c,j)} \begin{Bmatrix} b & c & j \\ d & a & i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & k \end{Bmatrix}$$

$$\times$$

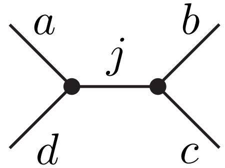


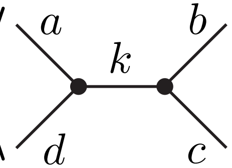
ハンドル体結び目の量子不変量

- $\langle \cdot \rangle_H$ は、R6変形で不変である。(続き)

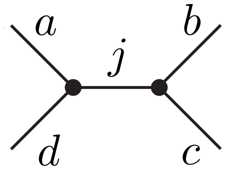
$\Big\langle$  $\Big\rangle_H$

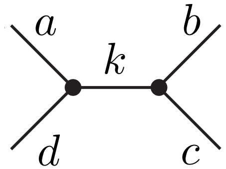
$$= \sum_{i,j,k,\cdots} \frac{\Delta_j \cdots}{\theta(a,d,j)\theta(b,c,j)\cdots} \left\{ \begin{matrix} b & c & j \\ d & a & i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a & b & i \\ c & d & k \end{matrix} \right\}$$

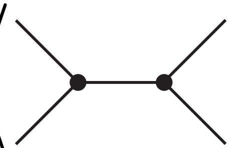
$\times \Big\langle$ 

$\Big\rangle \Big\langle$ 

$\Big\rangle$

$= \sum_{j,k,\cdots} \frac{\Delta_j \cdots}{\theta(a,d,j)\theta(b,c,j)\cdots} \delta_{jk} \Big\langle$ 

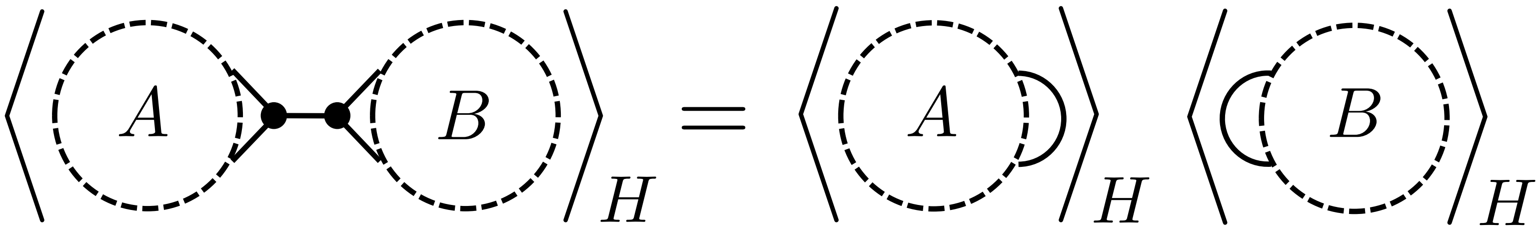
$\Big\rangle \Big\langle$ 

$\Big\rangle = \Big\langle$  $\Big\rangle_H$

不変量の性質

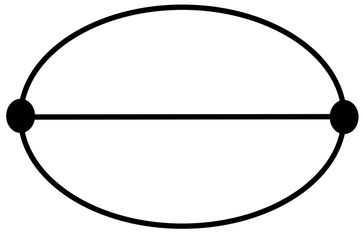
- 鏡像を区別しない。

- 射影図にbridgeがあるとき、

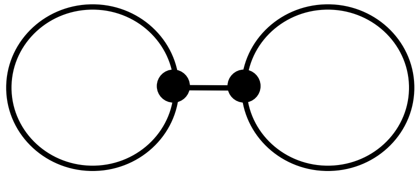


計算例

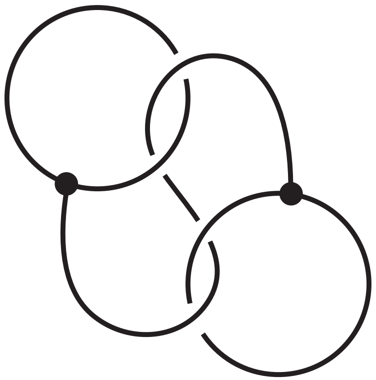
計算例



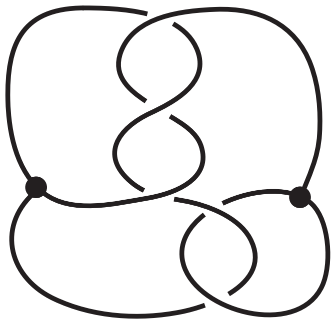
TC



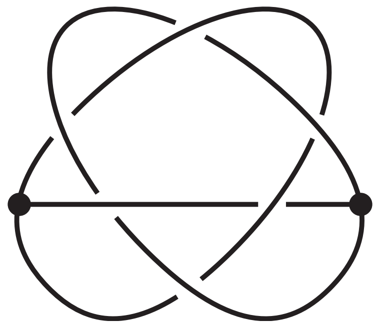
HC



4_1



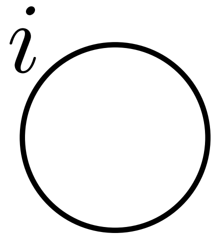
5_1

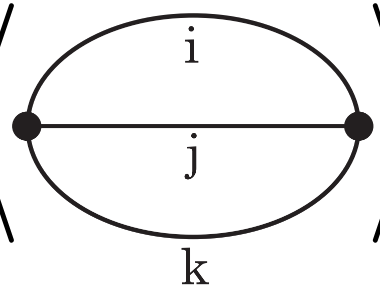
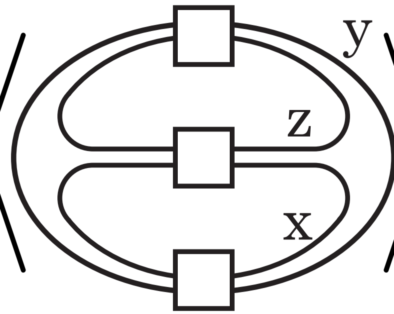


6_4

From [Ishii, Kishimoto, Moriuchi, Suzuki]

基本的な値

$\Delta_i :=$ $\langle$  $\rangle$ $= (-1)^i \dfrac{\sin \frac{\pi}{r}(i+1)}{\sin \frac{\pi}{r}}$

$\theta(i,j,k) :=$ $\langle$  $\rangle$ $=$ $\langle$  $\rangle$

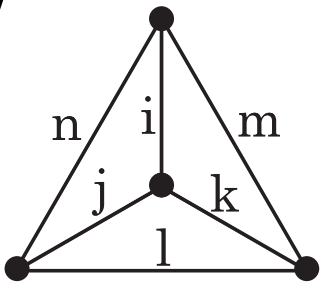
$$= \frac{\Delta_{x+y+z}!\Delta_{x-1}!\Delta_{y-1}!\Delta_{z-1}!}{\Delta_{y+z-1}!\Delta_{x+z-1}!\Delta_{x+y-1}!}$$

where $\Delta_n! = \Delta_n \Delta_{n-1} \cdots \Delta_0$ and $\Delta_{-1}! = 1$.

If (i,j,k) is admissible, $\theta(i,j,k)$ is not zero.

基本的な値

$$\left[\begin{matrix} i & j & k \\ l & m & n \end{matrix} \right] := \Bigg\langle$$



$$\Bigg\rangle = \frac{\mathcal{F}!}{\mathcal{E}!} \sum_{c \le z \le C} \frac{(-1)^z [z+1]!}{\prod_s [z-a_s]! \prod_t [b_t - z]!}$$

where

$$[n] = \frac{A^{2n} - A^{-2n}}{A^2 - A^{-2}} \left(= (-1)^{n-1} \Delta_{n-1}\right), \qquad [n]! = [n][n-1]\cdots[1], \quad [0]! = 1$$

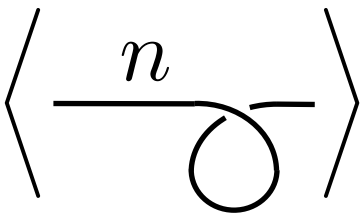
$$\mathcal{F}! = \prod_{s,t} [b_t - a_s]! \;, \qquad \mathcal{E}! = [i]![j]![k]![l]![m]![n]!$$

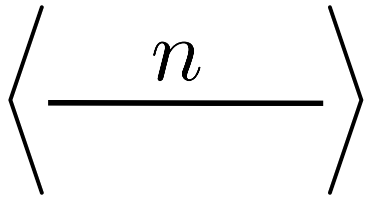
$$a_1 = \frac{1}{2}(i+j+k),\; a_2 = \frac{1}{2}(i+m+n),\; a_3 = \frac{1}{2}(j+l+n),\; a_4 = \frac{1}{2}(k+l+m)$$

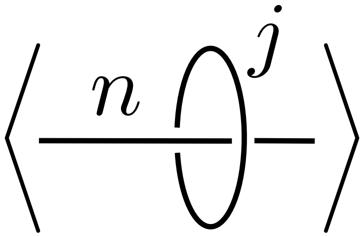
$$b_1 = \frac{1}{2}(i+j+l+m),\; b_2 = \frac{1}{2}(i+k+l+n),\; b_3 = \frac{1}{2}(j+k+m+n)$$

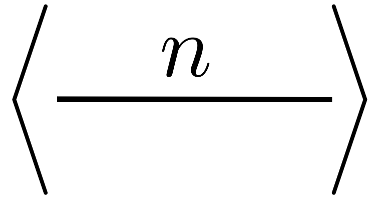
$$c = \max\{a_s\},\; C = \min\{b_t\}$$

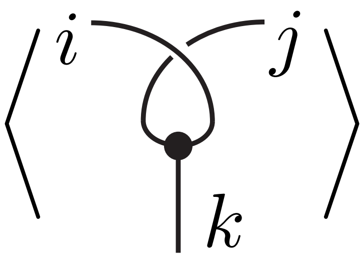
局所変形の関係式

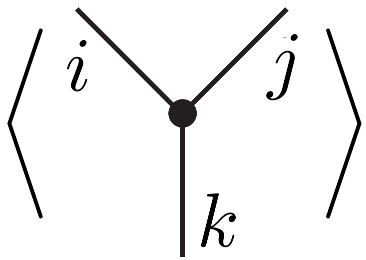
- 

$= (-1)^n A^{n^2+2n}$


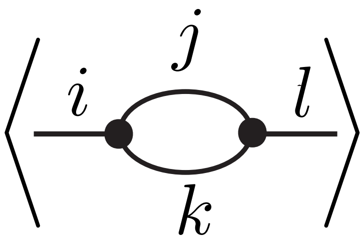
- 

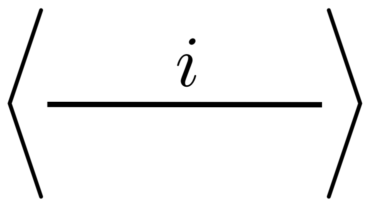
$= (-1)^j \dfrac{A^{2(n+1)(j+1)} - A^{-2(n+1)(j+1)}}{A^{2(n+1)} - A^{-2(n+1)}}$


- 

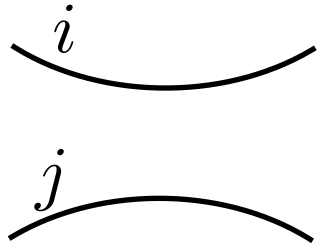
$= \lambda_k^{ij}$


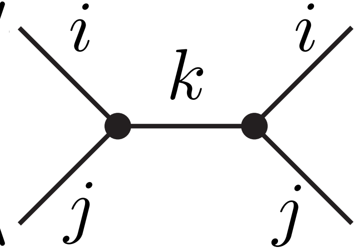
  where $\lambda_k^{ij} = (-1)^{(i+j-k)/2} A^{i+j-k+(i^2+j^2-k^2)/2}$

- 

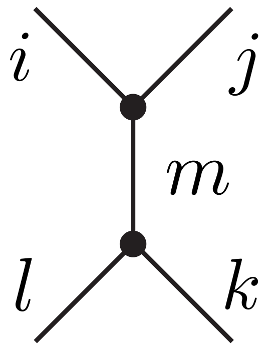
$= \dfrac{\theta(i,j,k)}{\Delta_i}\delta_{il}$


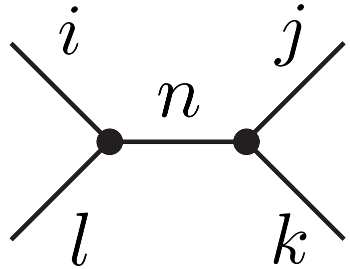
局所変形の関係式

- $\left\langle \right.$ 

$\left. \right\rangle = \sum_k \frac{\Delta_k}{\theta(i,j,k)} \left\langle \right.$ 

$\left. \right\rangle$

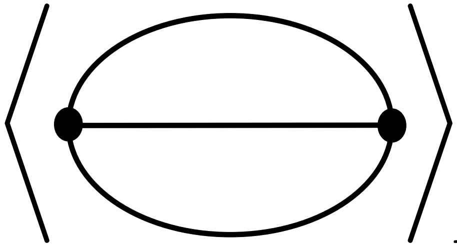
- $\left\langle \right.$ 

$\left. \right\rangle = \sum_n \left\{ \begin{array}{ccc} i & j & m \\ k & l & n \end{array} \right\} \left\langle \right.$ 

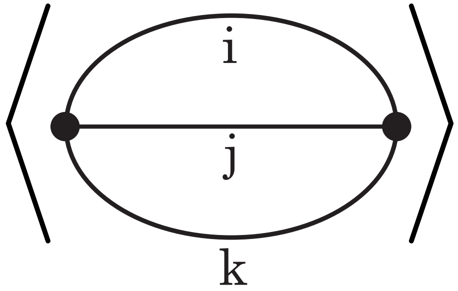
$\left. \right\rangle$

$$\text{where} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} i & j & m \\ k & l & n \end{array} \right\} = \frac{\left[\begin{array}{ccc} i & j & m \\ k & l & n \end{array} \right] \Delta_n}{\theta(i,l,m)\theta(j,k,n)}$$

計算例：TC

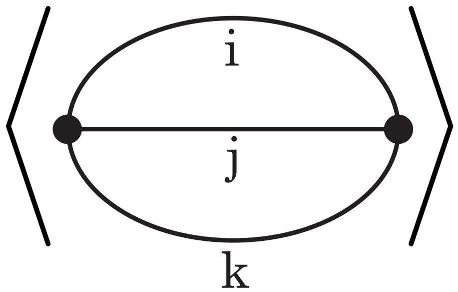


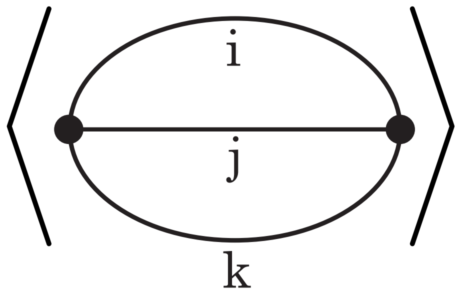
$$_H = \sum_{(i,j,k)} \Delta_i \Delta_j \Delta_k$$



$$_Y$$

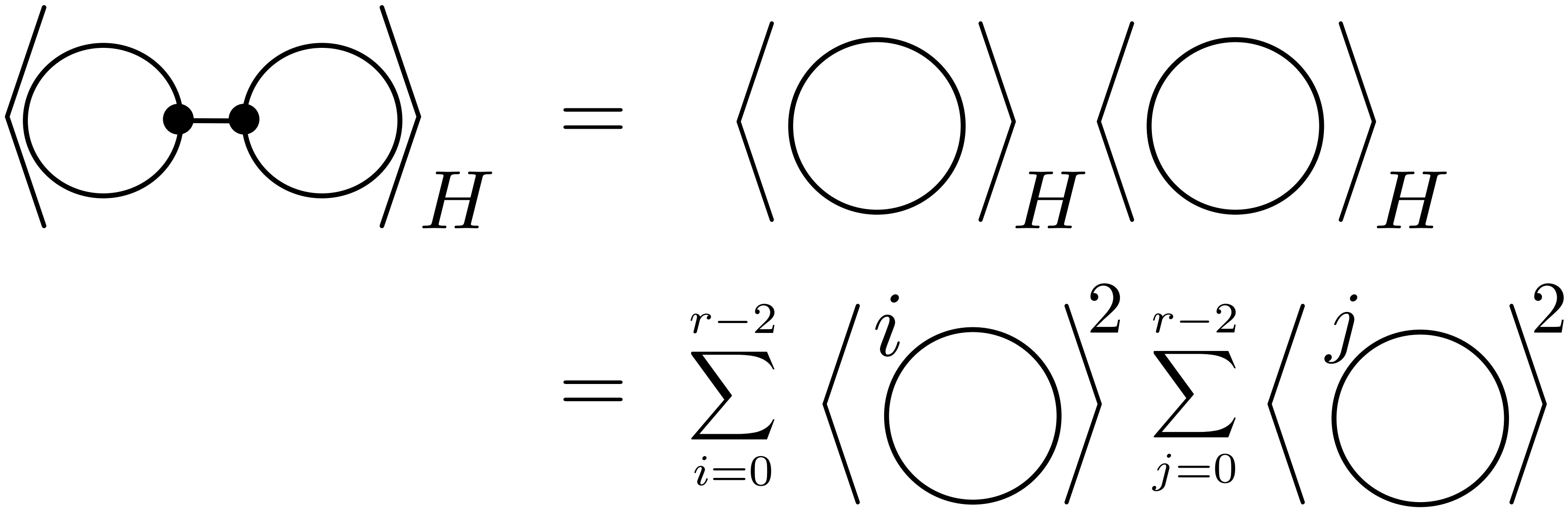
$$= \sum_{(i,j,k)} \frac{\Delta_i \Delta_j \Delta_k}{\theta(i,j,k)^2}$$





$$= \sum_{(i,j,k)} \Delta_i \Delta_j \Delta_k$$

計算例：HC

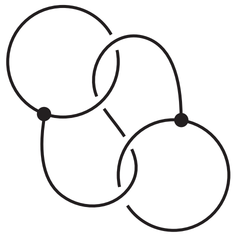


$$= \sum_{i=0}^{r-2} \Delta_i^2 \sum_{j=0}^{r-2} \Delta_j^2$$

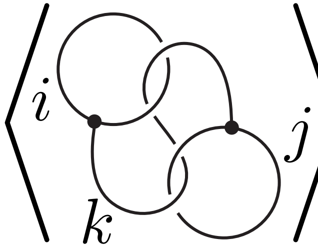
計算例 TC と HC の比較

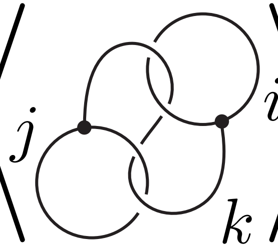
$$\sum_{(i,j,k)} \Delta_i \Delta_j \Delta_k \quad = \sum_{i=0}^{r-2} \Delta_i^2 \sum_{j=0}^{r-2} \Delta_j^2$$

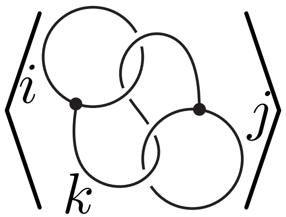
計算例：4$_1$



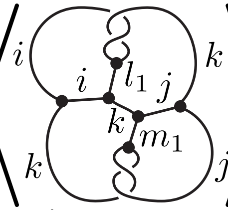
$$\Big\langle \quad \Big\rangle_H = \sum_{\substack{(i,i,k)\\(j,j,k)}} \frac{\Delta_i\Delta_j\Delta_k}{\theta(i,i,k)\theta(j,j,k)}$$



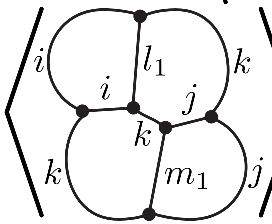




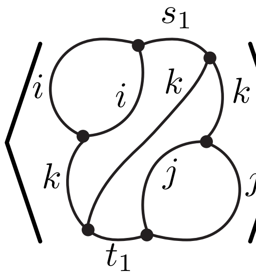
$$= \sum_{l_1,m_1} \frac{\Delta_{l_1}\Delta_{m_1}}{\theta(i,k,l_1)\theta(j,k,m_1)}$$



$$= \sum_{l_1,m_1} \frac{\Delta_{l_1}\Delta_{m_1}(\lambda^{ik}_{l_1})^{-2}(\lambda^{jk}_{m_1})^{-2}}{\theta(i,k,l_1)\theta(j,k,m_1)}$$

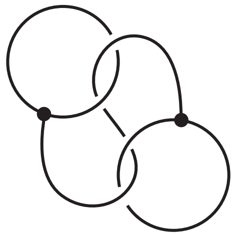
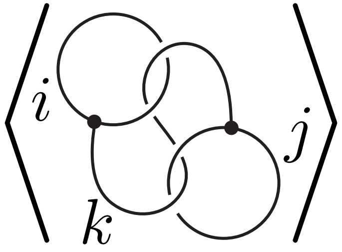


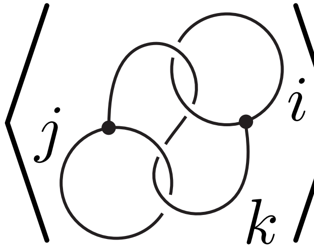
$$= \sum_{\substack{l_1,m_1\\s_1,t_1}} \frac{\Delta_{l_1}\Delta_{m_1}(\lambda^{ik}_{l_1})^{-2}(\lambda^{jk}_{m_1})^{-2}}{\theta(i,k,l_1)\theta(j,k,m_1)} \left\{\begin{matrix} i & k & l_1 \\ k & i & s_1 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} j & k & m_1 \\ k & j & t_1 \end{matrix}\right\}$$



$$= \sum_{l_1,m_1} \frac{\Delta_{l_1}\Delta_{m_1}(\lambda^{ik}_{l_1})^{-2}(\lambda^{jk}_{m_1})^{-2}}{\theta(i,k,l_1)\theta(j,k,m_1)\theta(k,k,k)} \left[\begin{matrix} i & k & l_1 \\ k & i & k \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} j & k & m_1 \\ k & j & k \end{matrix}\right]$$

計算例：4_1

$\Big\langle$  $\Big\rangle_H = \displaystyle\sum_{\substack{(i,i,k)\\(j,j,k)}} \frac{\Delta_i \Delta_j \Delta_k}{\theta(i,i,k)\theta(j,j,k)} \Big\langle$ 

$\Big\rangle \Big\langle$ 

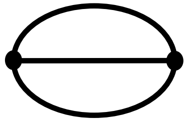
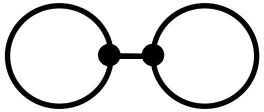
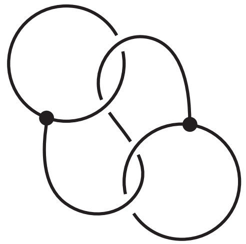
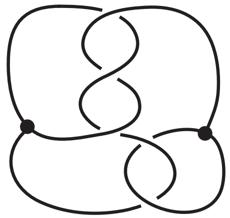
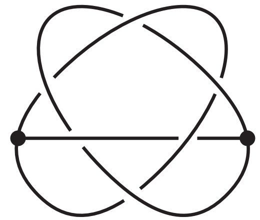
$\Big\rangle$

$$= \sum_{\substack{(i,i,k)\\(j,j,k)\\ \cdots}} \frac{\Delta_i \Delta_j \Delta_k \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \Delta_{m_1} \Delta_{m_2} (\lambda^{ik}_{l_1})^{-2} (\lambda^{ik}_{l_2})^{2} (\lambda^{jk}_{m_1})^{-2} (\lambda^{jk}_{m_2})^{2}}{\theta(i,i,k)\theta(j,j,k)\theta(i,k,l_1)\theta(i,k,l_2)\theta(j,k,m_1)\theta(j,k,m_2)\theta(k,k,k)^2}$$

$$\times \begin{bmatrix} i & k & l_1 \\ k & i & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & k & l_2 \\ k & i & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & k & m_1 \\ k & i & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & k & m_2 \\ k & i & k \end{bmatrix}$$

計算結果表

$3 \leq r \in \mathbb{Z}\,,\ A = \mathrm{e}^{\frac{\pi i}{2r}}$

r	 TC	 HC	 4_1	 5_1	 6_4
3	4	4	4	4	4
4	16	16	16	16	16
5	52.3606797	52.3606797	84.7213595	32.3606797	32.3606797
6	144	144	216	144	144
7	345.654799	345.654799	499.485657	376.122887	376.122887