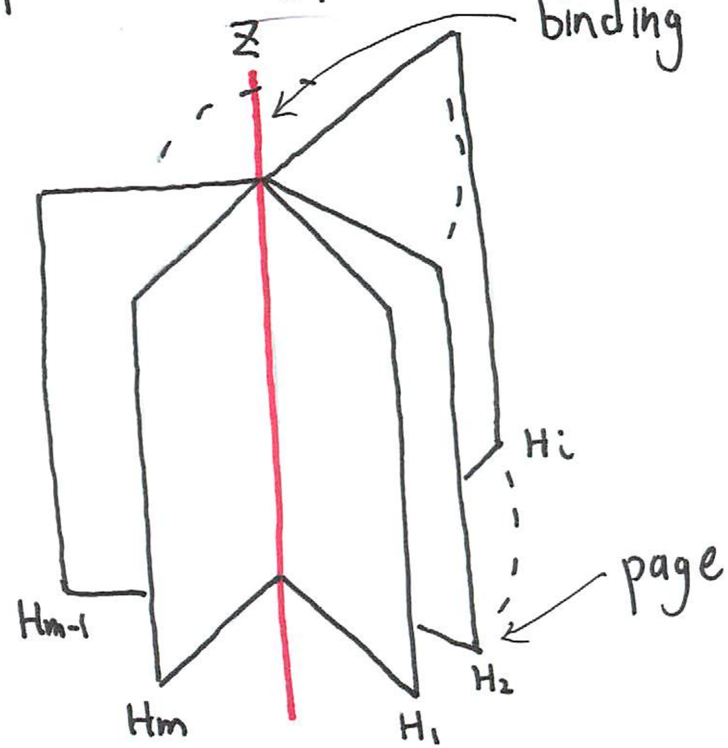
# Page moves on arc presentations

神戸大學

松尾 昌幸

Definition

$\mathbb{R}^3$上のopen book : $\bigcup_{i=1}^{m} H_i$




$H_i := \{(r\cos\theta_i, r\sin\theta_i, z) \mid r \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$ $(0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_m < 2\pi)$

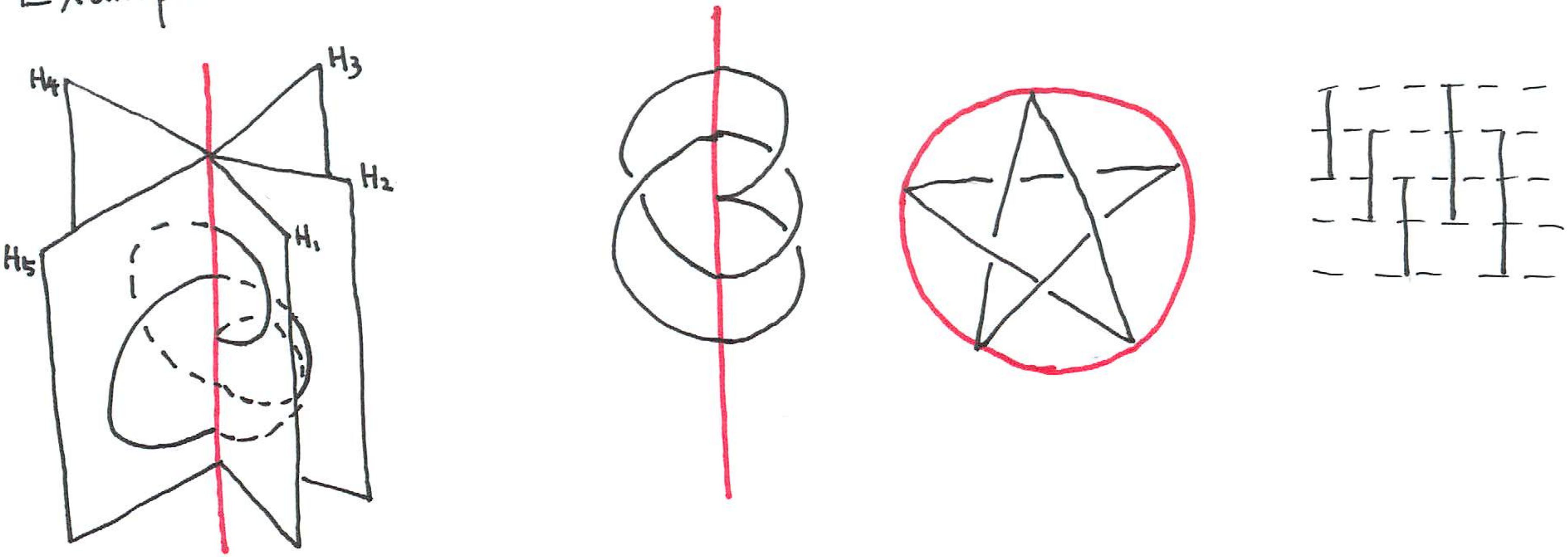
z軸をbinding　$H_i$をpage

## Definition

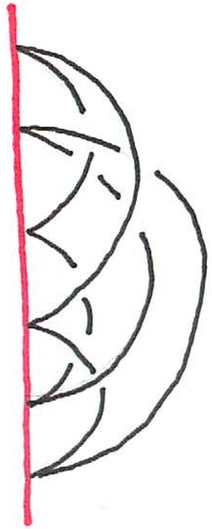
arc presentationとはknotのopen bookへの埋め込みであり

1枚のpageはknotと1つのarcのみで交わるようにしたものである

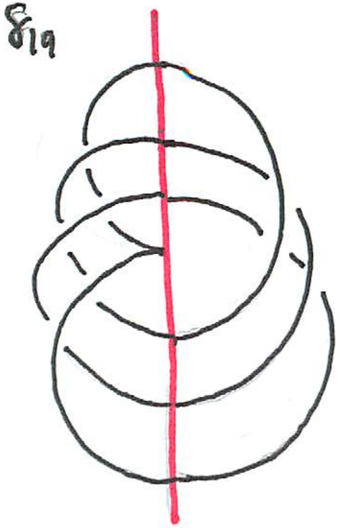
## Example

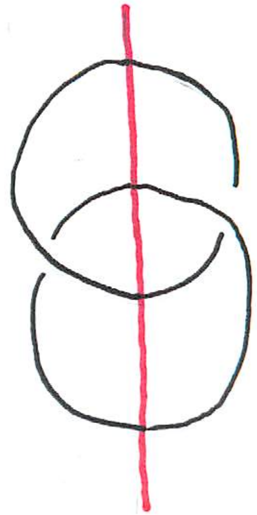


$4_1$

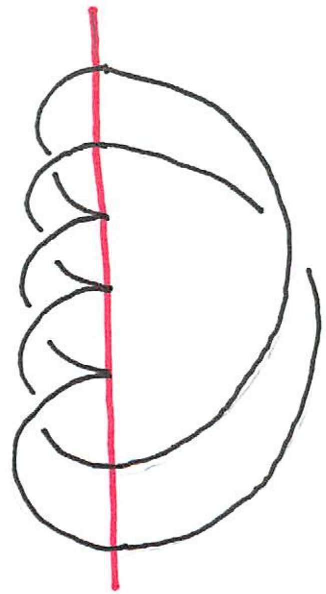


$8_{19}$

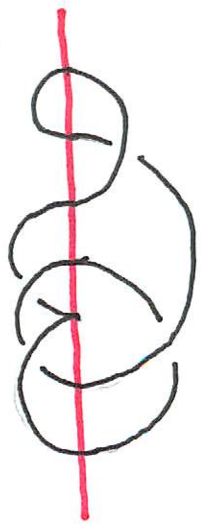




$5_1$

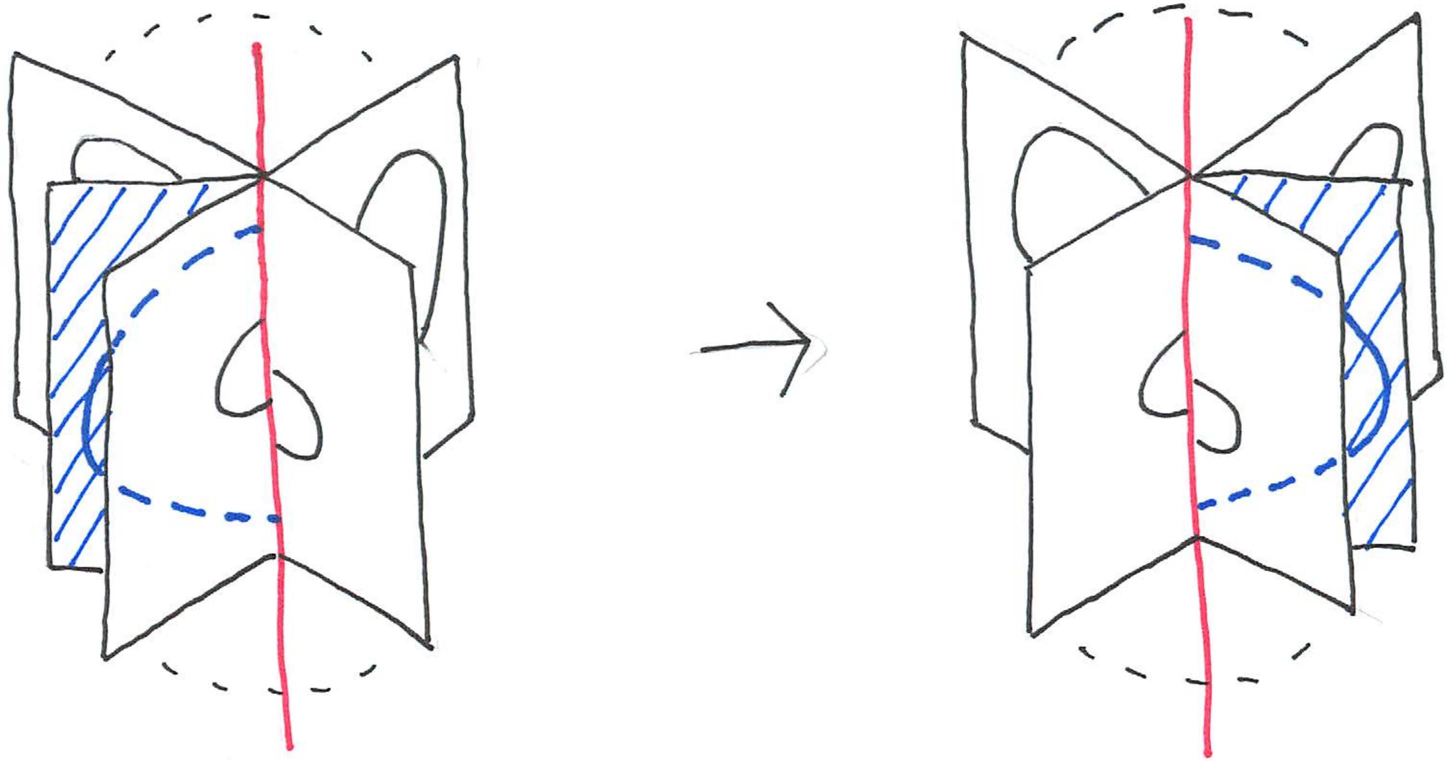


$3_1$

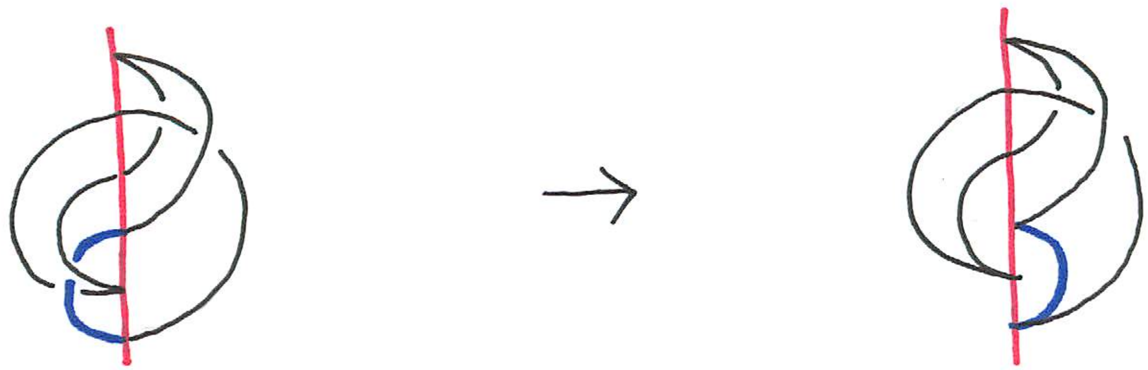


Definition

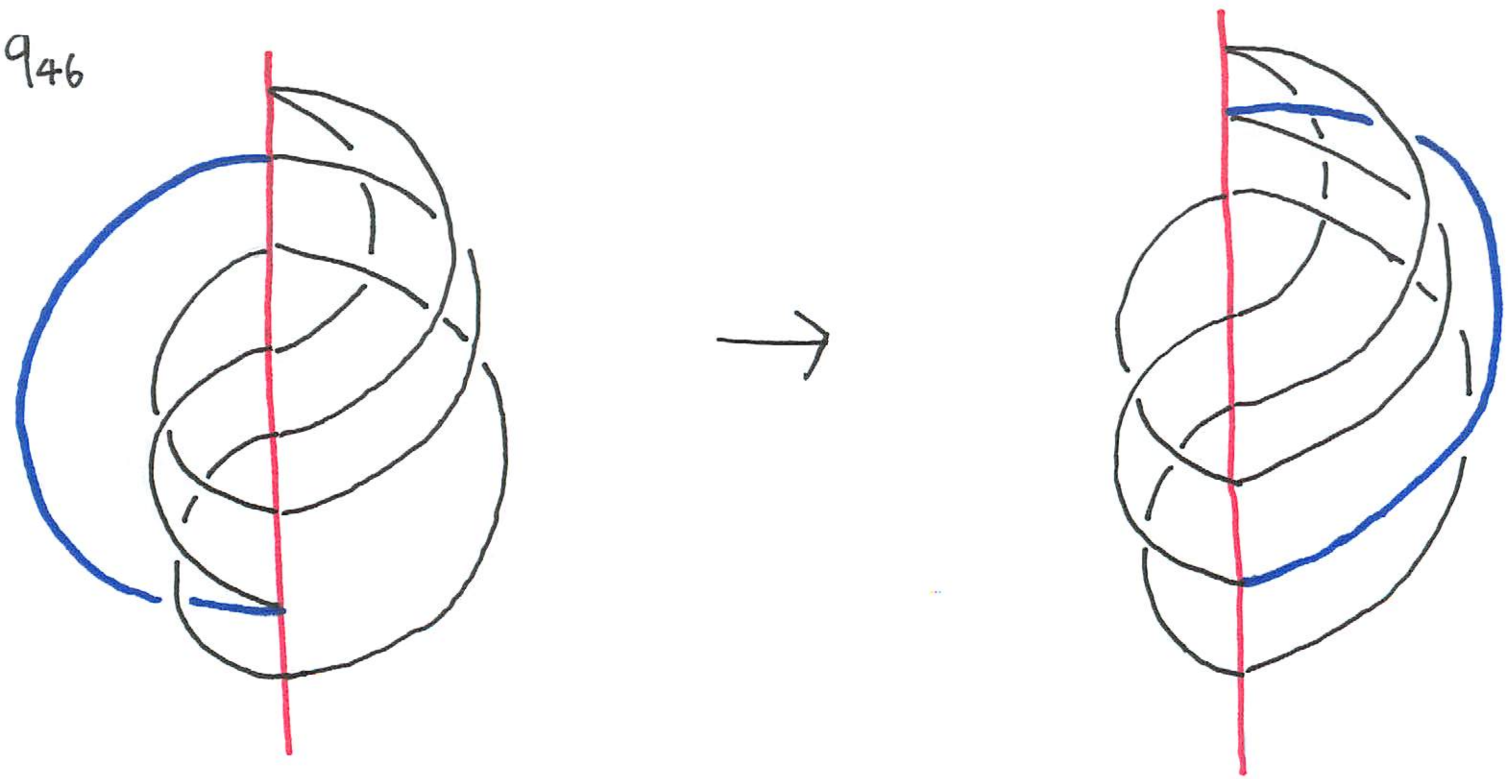
page move とは arc presentation から1枚の page と
その上の arc をとりのぞき、それらを別の場所に戻すことである



$4_1$



$9_{46}$



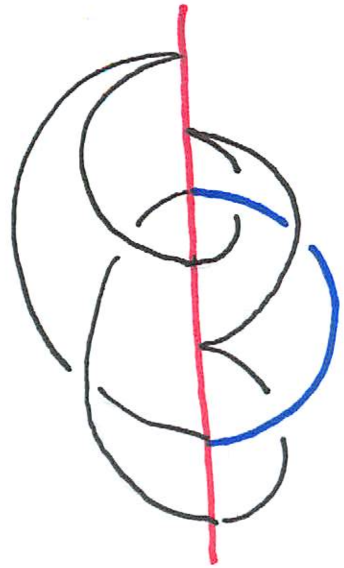
Theorem

全てのknotは1回のpage moveでtrivial knotとなるようなarc presentationを持つ

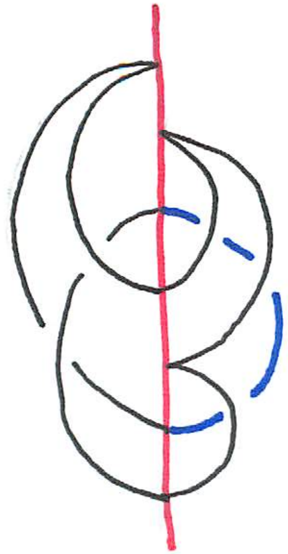
Remark

全てのarc presentationが1回のpage moveでtrivialになるわけではない

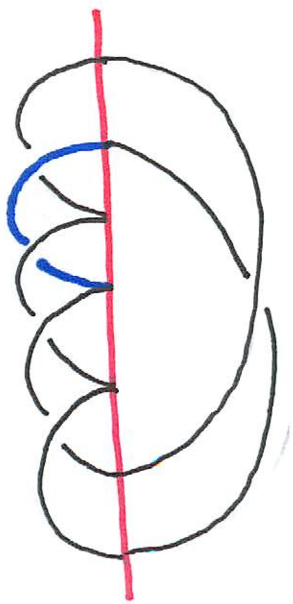
$5_1$



$\longrightarrow$

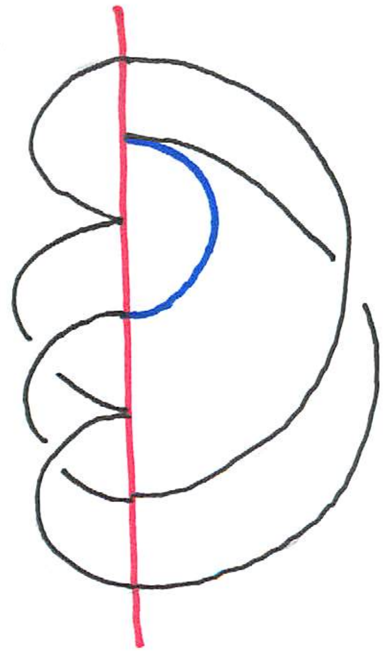


$5_1$



$\longrightarrow$

$3_1$



Lemma 1

$K \xrightarrow{n.c.c} K'$　$P$、$P'$を$K$, $K'$のarc presentation

以下を満たす$P$, $P'$が存在

(1) $K \cap$ binding $= K' \cap$ binding　これらの点を$a_1, \cdots, a_m$とする

(2) $P$、$P'$は$H_1, \cdots, H_{n+1}$で異なり　$H_{n+2}, \cdots, H_m$で等しい

(3) $P$では　$H_i$に　arc　$a_i \frown a_{2n+2-i}$　$(1 \leq i \leq n)$

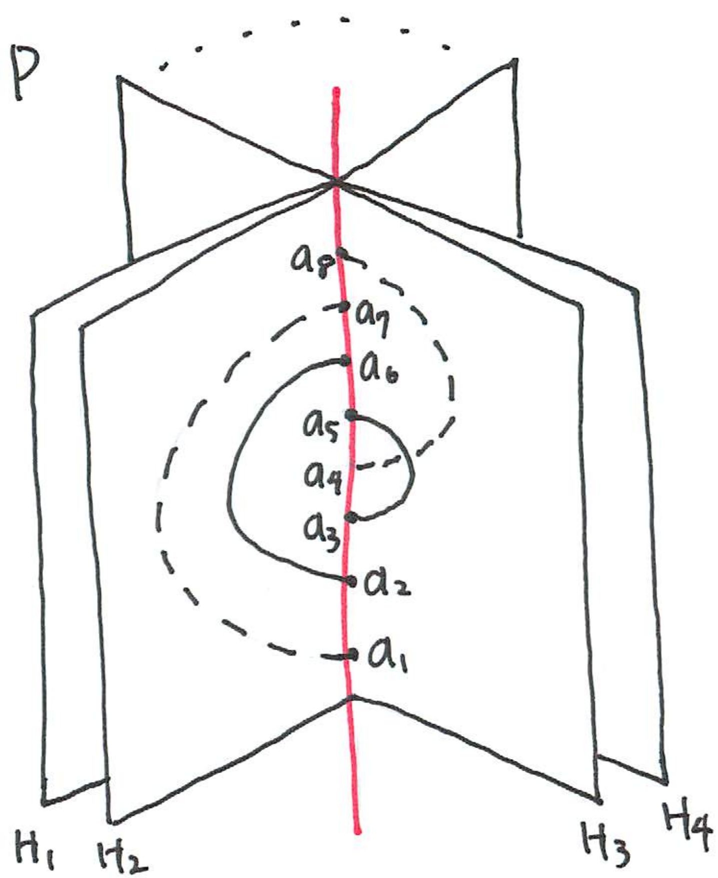
$H_{n+1}$に　arc　$a_{n+1} \frown a_{2n+2}$

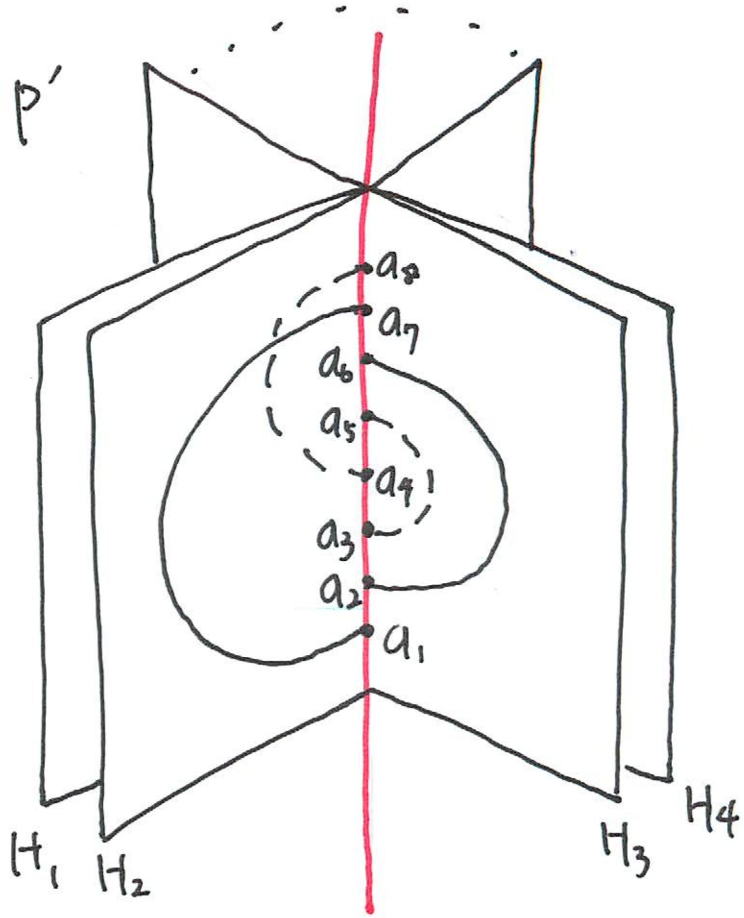
(4) $P'$では　$H_1$に　arc　$a_{n+1} \frown a_{2n+2}$

$H_i$に　arc　$a_{i-1} \frown a_{2n+3-i}$　$(2 \leq i \leq n+1)$

Example

$n=3$ の例

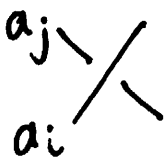


## Lemma 2

D: knot diagram　λ: simple closed circle

Dはλによって arc $a_1, \cdots, a_m$ に分けられる



の時 $a_i > a_j$ とすることで矛盾なく

arcに「高さ」をつけることができるならば

$(D, \lambda)$ を arc presentation とみなすことができる

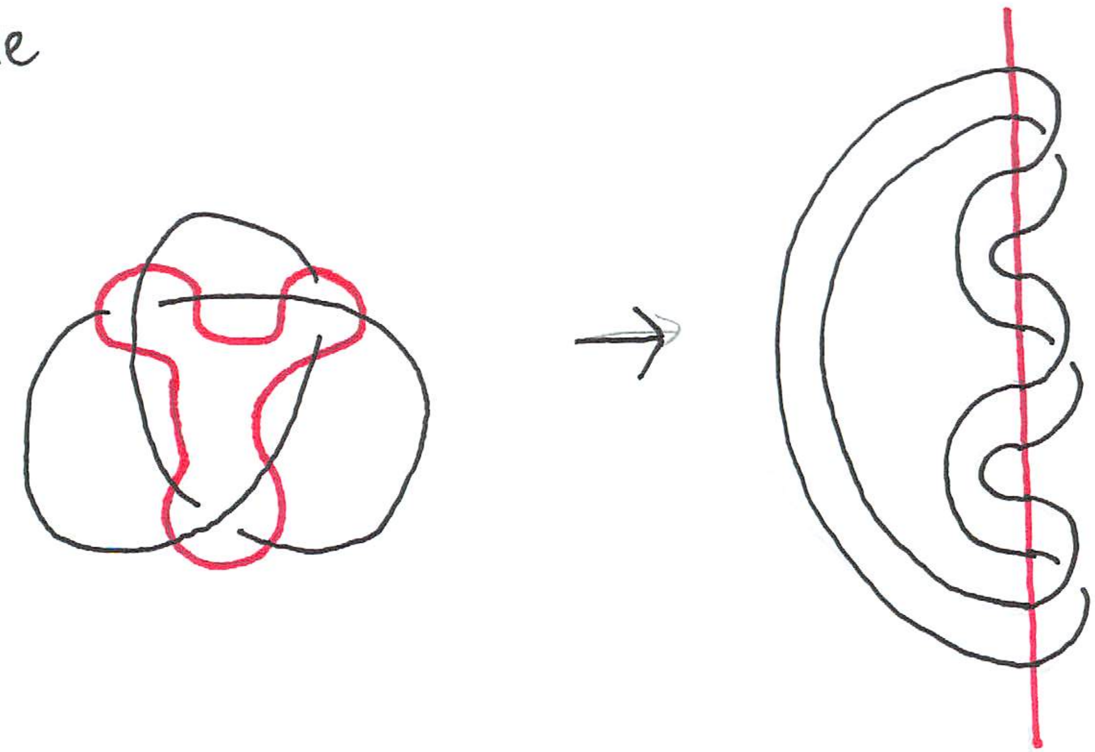
proof　λの内側にあるarcを上にあるものから順にpage $H_1, H_2, \cdots$

λの外側にあるarcを上にあるものから順にpage $H_m, H_{m+1}, \cdots$

λをz軸$\cup\{\infty\}$に対応させることでarc presentationと

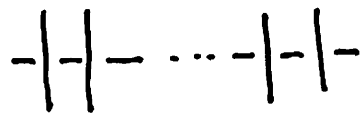
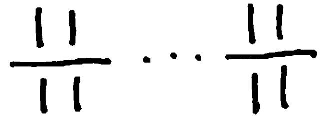
みなすことができる.

Example



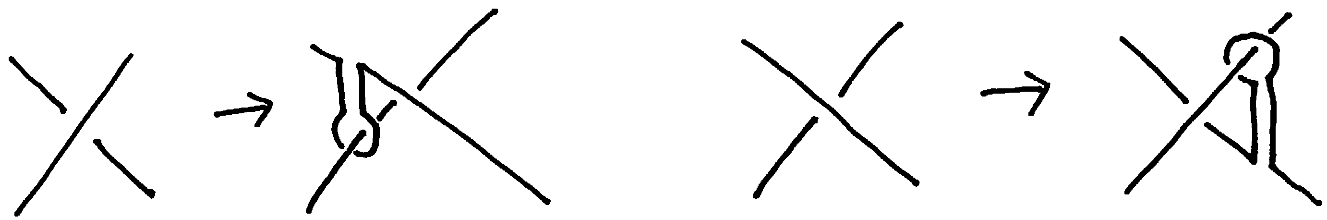
# Lemma 3

$K \xrightarrow{n\ c.c} K'$　　D、D' : K, K' の diagram で

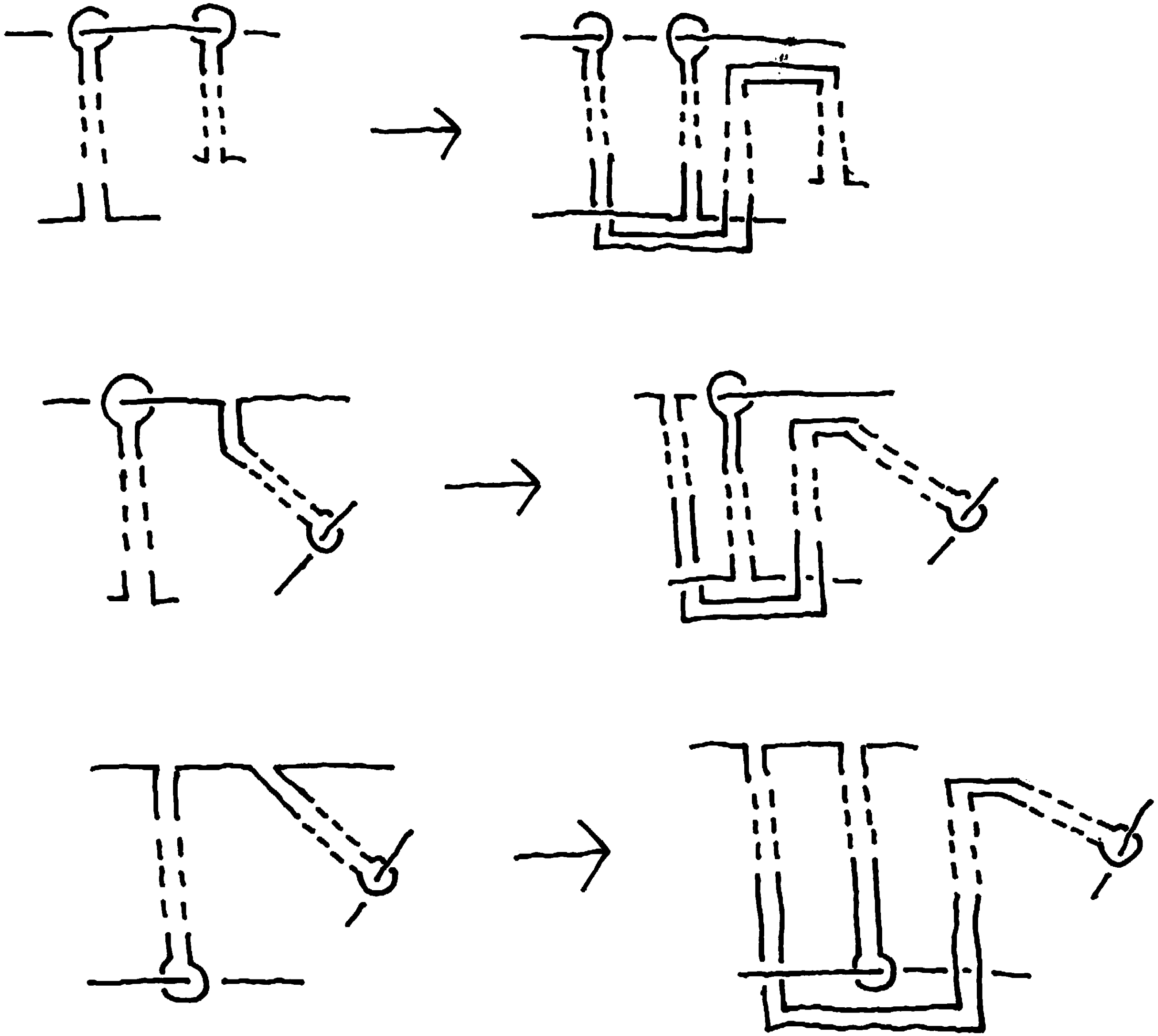
D 　D' 

が存在する

proof



これらはknotに沿ってずらしていくことが可能

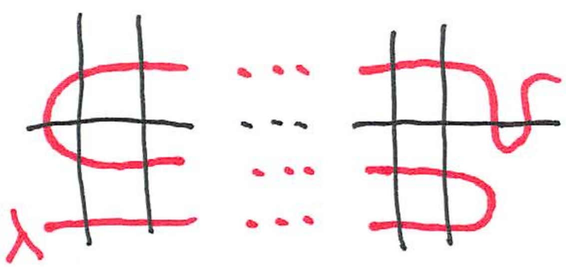


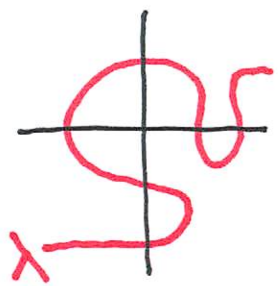
# proof of Lemma 1

Lemma 3 より

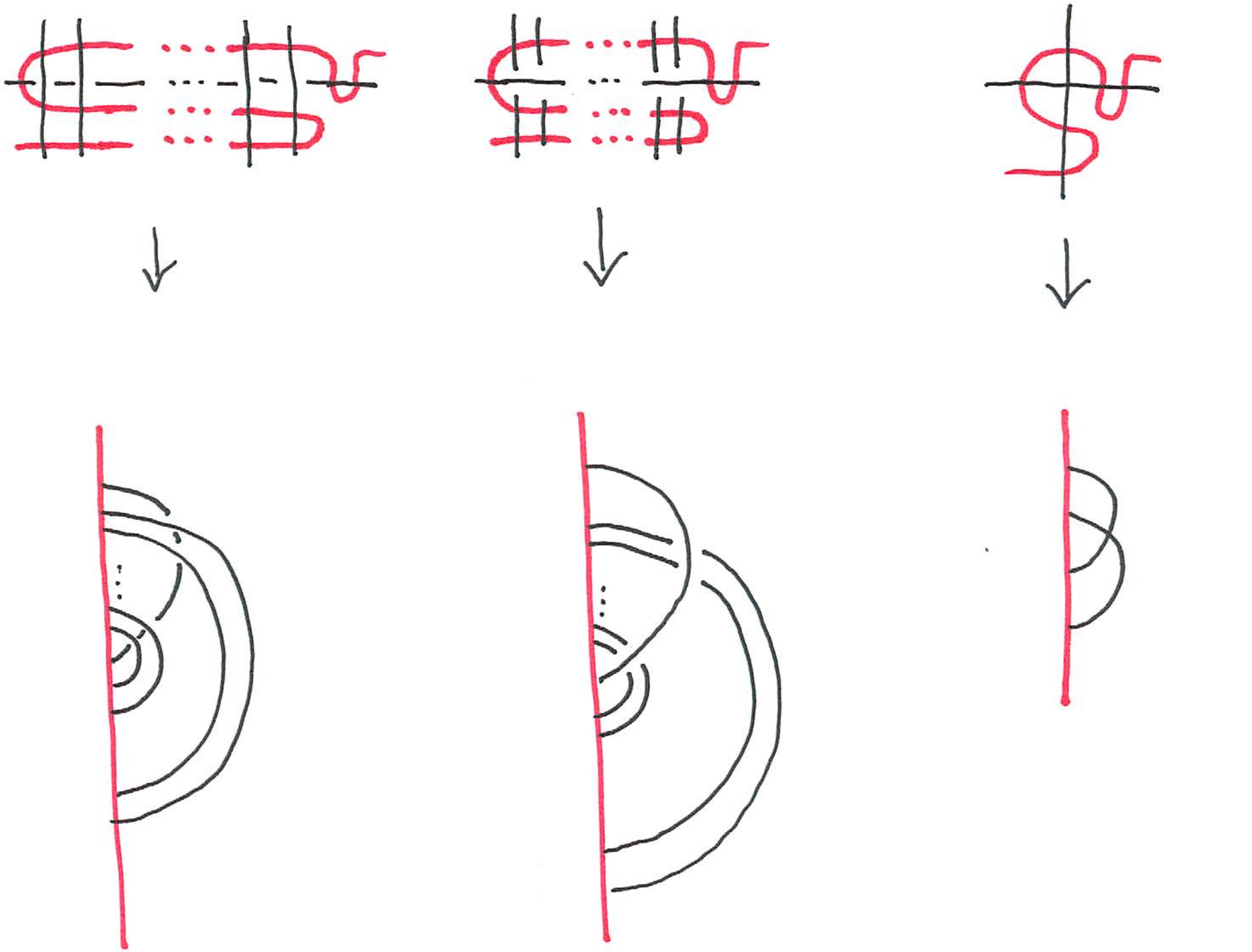
D  D′ 

λを下図のようにとる



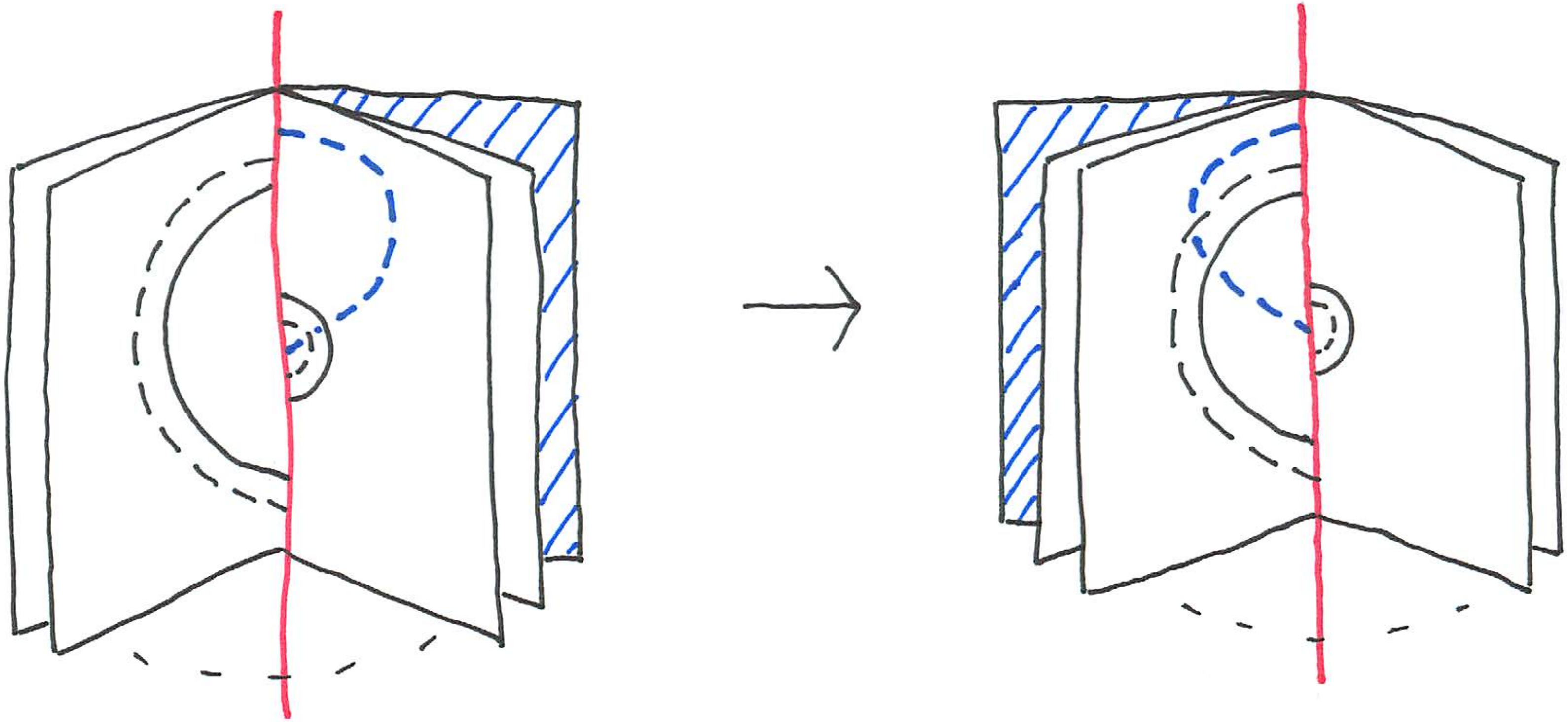



Lemma 2 より 次のように対応



proof of Theorem

Lemma 1 で $K' = \text{trivial}$



## Definition

page change とは隣り合う2枚のpageを入れ替えることである.

この時 page change は unknotting operation となる

pc(P)を arc presentation Pを trivialを表すものに変形する

までの page change の最小数とする.

## Theorem

knot $K$ に対して次が成立する

(i) $K$ の全ての arc presentation $P$ に対し

$$pc(P) \geq u(K)$$

(ii) $K$ はある arc presentation $P$ を持ち

$$pc(P) = u(K)$$

proof (i) page change は1度の crossing change が isotopy を導くため

(ii) Lemma 1の arc presentation は $n$ 回の page change で移り合うため