

結び目図式の種数を減らすある変形について

信州大学大学院 修士課程 2年

大黒顕司

(境圭一 (信州大学), 高瀬将道 (成蹊大学) との共同研究)

2011.10.15

はじめに

研究動機

結び目 K の genus $g(K)$ とは, $\partial\Sigma \approx K$ となる Seifert surface Σ の genus の最小値として定義されている.

K の図式 D があれば, Seifert algorithm によって Seifert surface が張れるので $g(K)$ の上からの評価を与える.

[Turaev 2010] では, D ではなく D から得られる knotoid diagram D° というものを使うと $g(K)$ の良い評価が得られる例があった.

はじめに

今回お話しする内容は

- ① knotoid diagram D° を使うと、もとの図式 D よりも $g(K)$ について常に悪くない評価を与える.
- ② その評価を実現する新しい図式 \tilde{D} を D から作る方法.
- ③ いつ「悪くない評価」が真に良い評価になるのか.

です.

Knots

Definition 1

knot K とは embedding $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ である.

Definition 2

K の knot diagram D とは K をある平面上に, 以下のように射影したものである.

- ・交差は2重点のみとする.
- ・接点は作らないようにする.
- ・交点の上下の情報を記す.

Definition 3

The canonical Seifert surface Σ_D とは, K の図式 D に Seifert algorithm を施すことによって得られる, 連結で向き付きな $\partial\Sigma_D \approx K$ であるような \mathbb{R}^3 内の曲面のことである.

Lemma 4

Σ_D の genus $g(\Sigma_D)$ は, D の交点の個数を n , Seifert circle の個数を s_D とすると

$$g(\Sigma_D) = \frac{n - s_D + 1}{2}$$

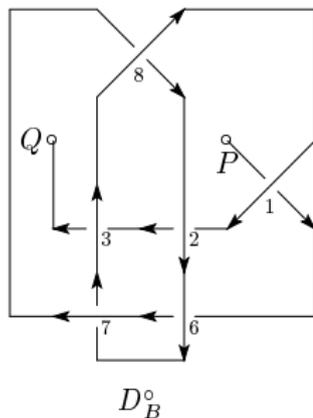
Turaev's Knotoids

Definition 5 (Turaev 2010)

knotoid diagram とは、以下のような immersion $f : [0, 1] \looparrowright \mathbb{R}^2$ である。

- 接点はない。
- 交差は横断的な 2 重点のみ。
- 交差には上下の情報を記す。

また、 $f(0)$ を leg, $f(1)$ を head と呼ぶ。



Remark 6

今回のお話では、 D の over-bridge (または under-bridge) を取り除いた knotoid diagram について考えていく。

この D_B° はそのようにして 8_{20} から得た knotoid diagram。

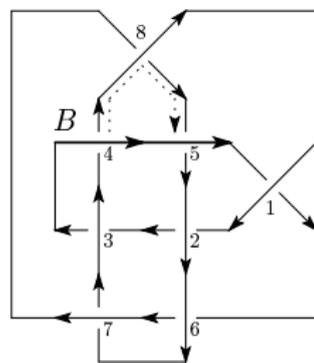
Turaev's Knotoids

Definition 7

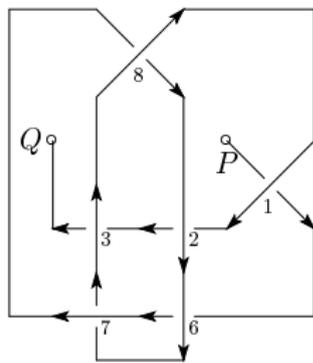
D° に対して, 以下の様に“ **Seifert algorithm** のようなこと ”をして得られる曲面を Σ_{D° とする. ただし D° は $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ にあるものとする.

- ① 全ての交点に **smoothing** を行う.
- ② **Seifert circle** には **disks** を貼り, さらに **interval** に沿って **band** を貼る
- ③ 各交点に対応する部分に **half-twisted band** を貼り付ける.

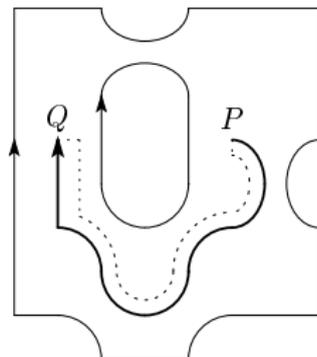
Turaev's Knotoids



D



D_B°



Remark 8

この方法は $\partial\Sigma_{D^\circ} \approx K$ となるような作り方になっているので、 D° からでも K の Seifert surface が得られる。

Turaev's Knotoids

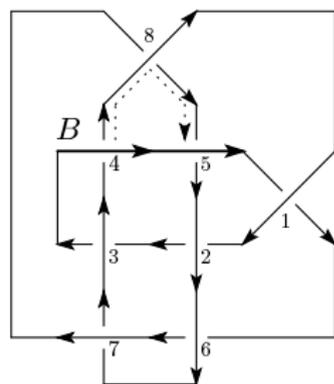
Lemma 9

n 交点を持つ knotoid diagram D° の genus を $g(D^\circ) \stackrel{\text{def}}{=} g(\Sigma_{D^\circ})$ と定義すると,

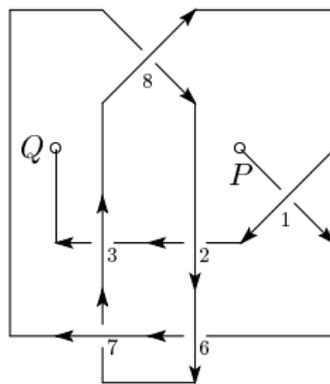
$$g(D^\circ) = \frac{n - s_{D^\circ} + 1}{2}$$

ただし, $s_{D^\circ} = (\text{Seifert circle の数}) + 1$

やりたいこと



D



D_B°

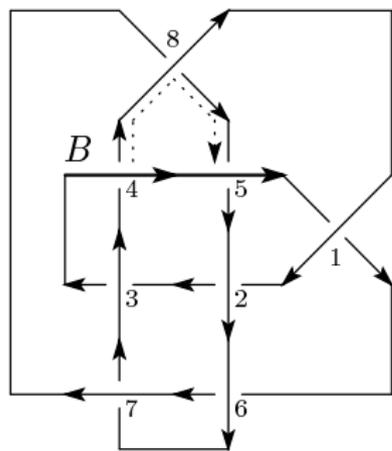
Example

$$n = 8, s_D = 3, g(D) = 3$$

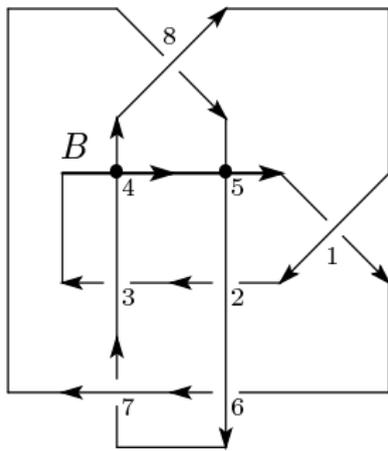
$$n = 6, s_{D_B^\circ} = 3, g(D_B^\circ) = 2$$

$g(D) \geq g(D^\circ)$ が常に成り立っているか? \longrightarrow YES

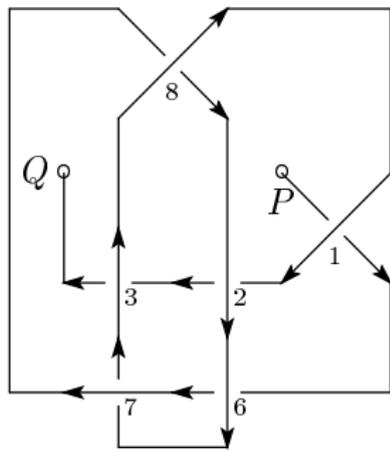
～ 証明の流れ～



D



D_B^\bullet



D_B°

Preliminaries

Definition 10

n 個の交点を持つ D に対して D の Gauss diagram G_D とは以下の様な条件を持つ, 向き付きの円周 (D の逆像) である.

- chords によって D の各交点の逆像をつなぐ.
- chords には上の交点から下の交点に向かって向きを付ける.
- chords には $+$ か $-$ の符号を, D の交点の符号によって付ける.

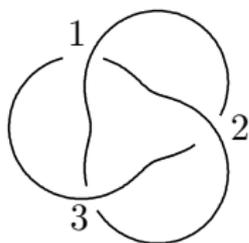


Figure: D

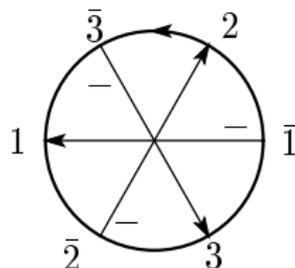


Figure: G_D

Preliminaries

Definition 11 (Stoimenow, Tchernov and Vdovina 2002)

D の Gauss diagram G_D の canonical surface Σ_{G_D} とは以下の様に構成した曲面とする.

- annulus に G_D の chords の様に band を貼る. この曲面を Σ'_{G_D} とする.
- この Σ'_{G_D} の外側以外の全ての境界に disks を貼る.

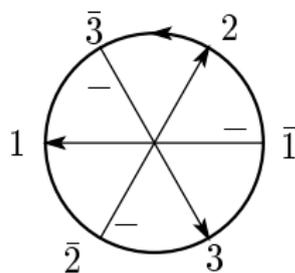


Figure: G_D

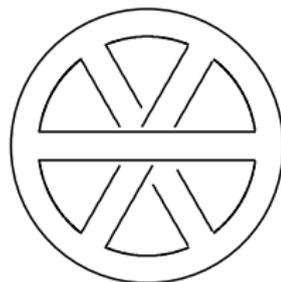


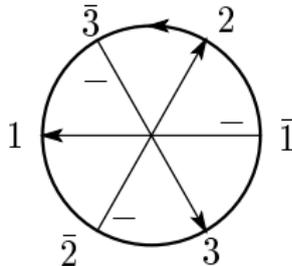
Figure: Σ'_{G_D}

Preliminaries

Definition 12

Gauss diagram G_D の cycle とは以下のようにして得られる列とする.

- ① ある chord の一方の端点から、もう一方へ渡る.
- ② 円周の向きに沿って進み次の chord の端点へ行く.
- ③ その操作をもとの端点に来るまで繰り返す.



cycle の数は貼る disks の数になっている.

各 chord は全 cycle 中に合計 2 回ずつ現れる (「 $\bar{a}a$ 」と「 $a\bar{a}$ 」が一回ずつ).

Example

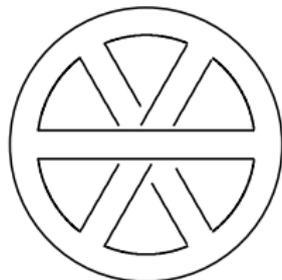
この図の cycle は $[\bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2}\bar{3}\bar{3}]$ と $[1\bar{1}2\bar{2}3\bar{3}]$.

Preliminaries

Lemma 13 (Stoimenow, Tchernov and Vdovina 2002)

G_D を n 本の chords を持つ Gauss diagram,
 s_{G_D} を G_D の cycle の数とすると,

$$g(\Sigma_{G_D}) = \frac{n - s_{G_D} + 1}{2}$$



Proof.

$$\begin{aligned} 1 - 2g(\Sigma_{G_D}) &= \chi(\Sigma_{G_D}) = (\text{annulus}) + (\text{bands}) + (\text{disks}) \\ &= 0 + (n - 2n) + s_{G_D} \\ &= -n + s_{G_D} \end{aligned}$$

Preliminaries

Lemma 14 (Stoimenow, Tchernov and Vdovina 2002)

Knot diagram D に対して $\Sigma_D \approx \Sigma_{G_D}$ である。

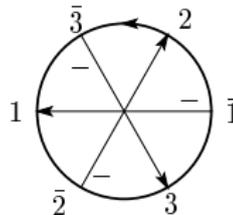
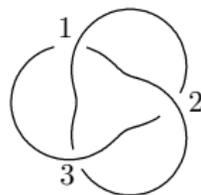
Proof.

D の交点の数を n とする。

$$g(\Sigma_D) = \frac{n - s_D + 1}{2}$$

$$g(\Sigma_{G_D}) = \frac{n - s_{G_D} + 1}{2}$$

$s_D = s_{G_D}$ より $g(\Sigma_D) = g(\Sigma_{G_D})$



Virtual knots and the Gauss diagrams.

Definition 15

virtual knot diagram とは以下のような immersion $S^1 \looparrowright \mathbb{R}^2$ である.

- 接点はない.
- 交差は2重点のみ.
- すべての交点は上下の情報を記した **real crossings** と, 記されていない **virtual crossings** で描かれる.

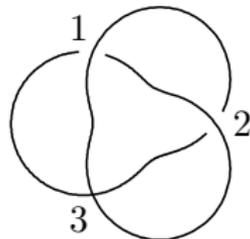


Figure: virtual knot diagram

Virtual knots and the Gauss diagrams.

Virtual knot diagram D^\bullet の Gauss diagram は virtual crossing を無視して構成する.

Definition 16 (Stoimenow, Tchernov and Vdovina 2002)

D^\bullet の canonical surface を $\Sigma_{G_{D^\bullet}}$ と定義する.

また D^\bullet の genus $g(D^\bullet) \stackrel{\text{def}}{=} g(\Sigma_{G_{D^\bullet}})$ とする.

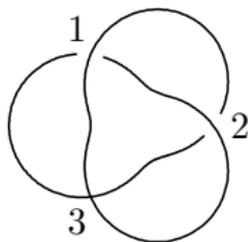


Figure: D^\bullet

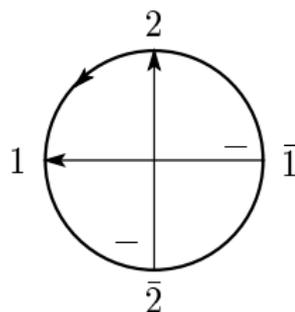
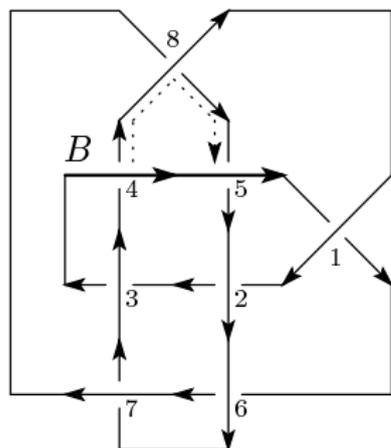
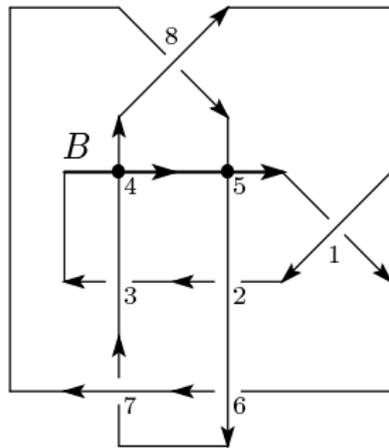


Figure: G_{D^\bullet}



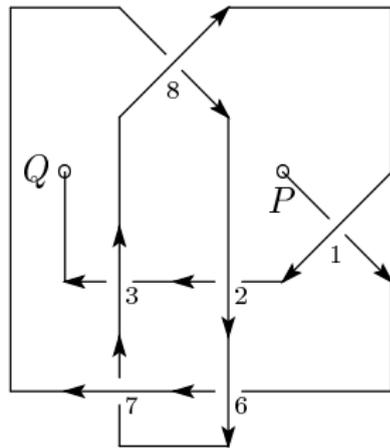
D

$$n = 8, s_D = 3, \\ g(D) = 3$$



D_B^\bullet

$$n = 6, s_{D_B^\bullet} = 3, \\ g(D_B^\bullet) = 2$$



D_B°

$$n = 6, s_{D_B^\circ} = 3, \\ g(D_B^\circ) = 2$$

$$g(D) \geq g(D_B^\bullet) = g(D_B^\circ)$$

証明の準備 1

Proposition 17

$$g(D_B^\bullet) = g(D_B^\circ)$$

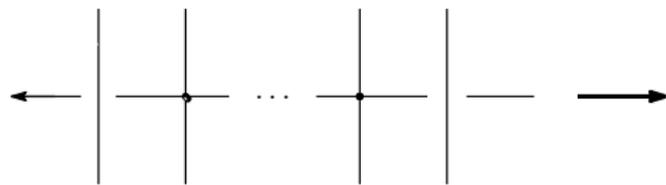
Proof.

$G_{D_B^\bullet}$ の chords の数と D_B° の交点の数は同じ。
また $s_{G_{D_B^\bullet}} = s_{D_B^\circ}$ より,

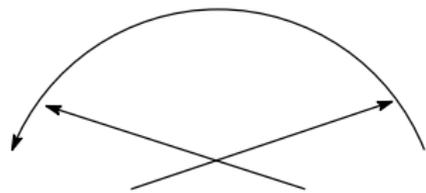
$$g(D_B^\bullet) = g(D_B^\circ)$$



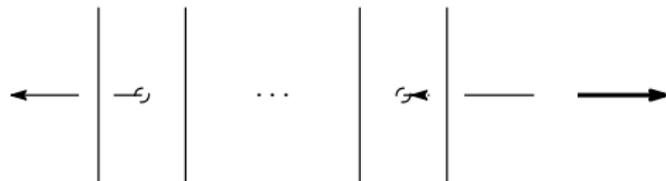
証明の準備 1



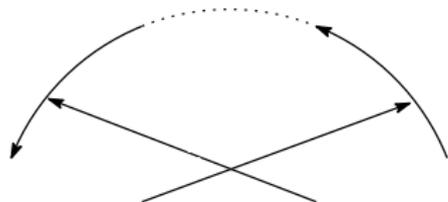
D_B^\bullet



$G_{D_B^\bullet}$



D_B°



証明の準備 2

Lemma 18

G_D を n 本の chords を持つ Gauss diagram とする.

G'_D を G_D からある一本の chord を抜いた $n - 1$ 本の chords を持つ Gauss diagram とする. このとき

$$g(G_D) \geq g(G'_D)$$

Proof 各 chord は全 cycle 中に合計二回ずつ現れるので, 以下のように場合分けを行えばよい.

(イ) 抜く chord が一つの cycle に二回現れるとき ($[\dots \bar{a}a \dots a\bar{a} \dots]$)

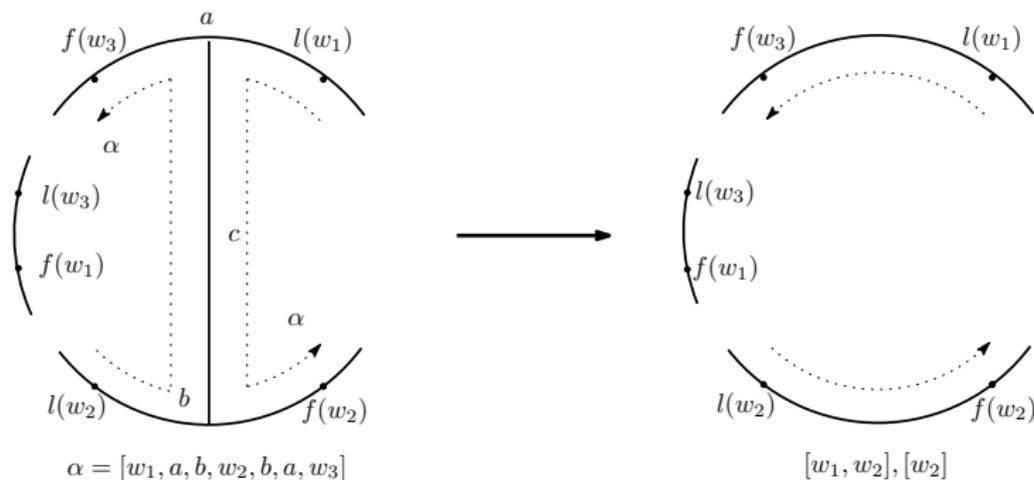
$$\implies g(G_D) > g(G'_D)$$

(ロ) 抜く chord が二つの cycle に現れるとき ($[\dots \bar{a}a \dots], [\dots a\bar{a} \dots]$)

$$\implies g(G_D) = g(G'_D)$$

証明の準備 2

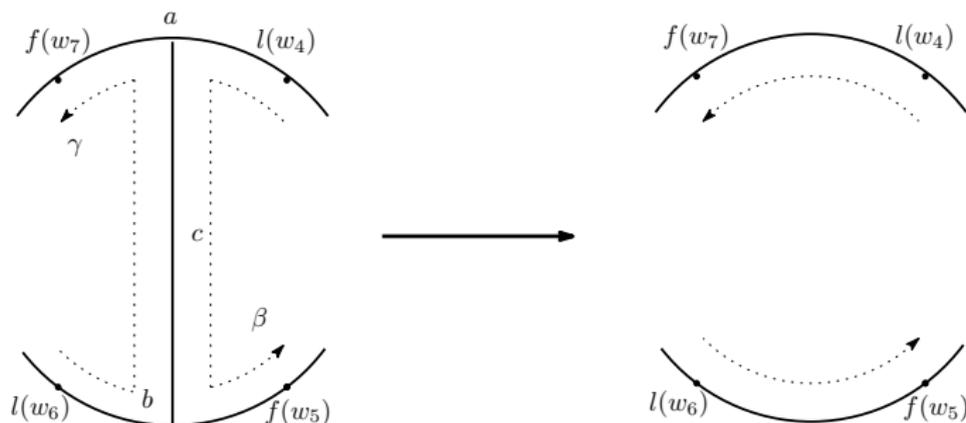
(イ) 抜く chord が一つののに二回現れるとき.



$$g(G') = \frac{(n-1) - (s_D + 1) + 1}{2} = \frac{n - s_D + 1}{2} - 1 = g(G) - 1$$

証明の準備 2

(口) 抜く chord が異なる二つの cycle に現れるとき。



$$\beta = [w_4, a, b, w_5], \gamma = [w_6, b, a, w_7]$$

$$\delta = [w_4, w_7, w_6, w_5]$$

$$g(G') = \frac{(n-1) - (s_D - 1) + 1}{2} = \frac{n - s_D + 1}{2} = g(G)$$

Turaev の例の証明

Proposition 19

$$g(D) \geq g(D_B^\circ)$$

Proof.

$$g(D_B^\circ) = g(D_B^\bullet) = g(G_{D_B^\bullet}) \leq g(G_D) = g(D)$$



◇では $g(D_B^\circ) = g(\tilde{D})$ となるような knot diagram \tilde{D} が作れるか？

→ YES

THE BRIDGE-REPLACING MOVE

Definition 20

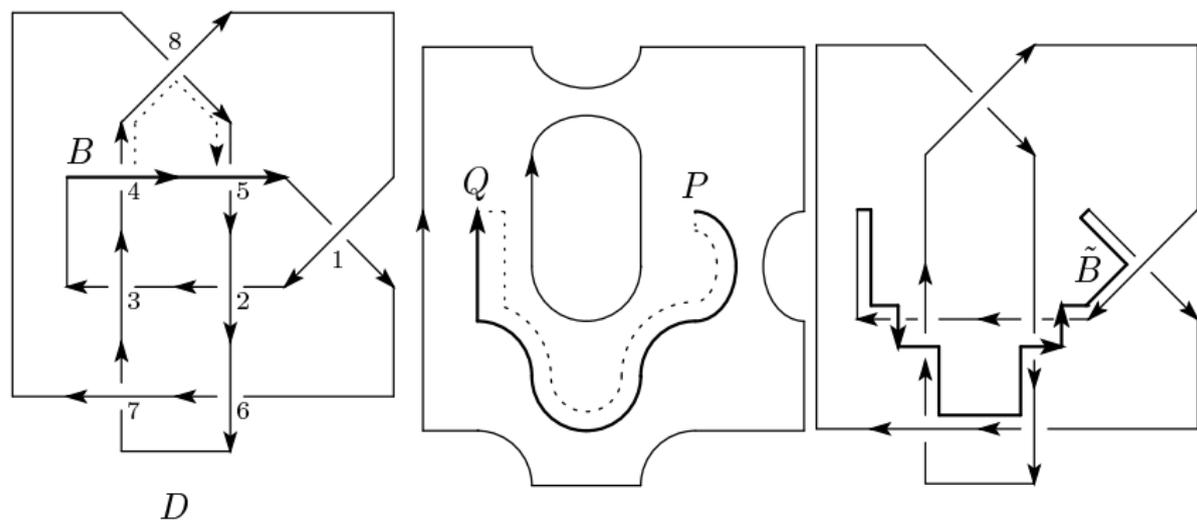
D を over-bridge (または under-bridge) B をもつ knot K の diagram とする.

この (D, B) に対して, the bridge-replacing move を以下の様に定める.

- 1 knotoid diagram D_B° を考える.
- 2 D_B° の smoothing によって得られる leg P から head Q への Seifert interval を J とする.
- 3 D_B° に新たな over-bridge (または under-bridge) \tilde{B} を Q から P へ付け加える. ただし, \tilde{B} は
 - 1 J を含む arc とのみ交差するものとする.
 - 2 可能な限り, J の右側 (または左側) に沿うようにする.

この新たな K の diagram $D_B^\circ \amalg \tilde{B}$ を \tilde{D}_B とする.

THE BRIDGE-REPLACING MOVE



THE BRIDGE-REPLACING MOVE

Lemma 21

D を over-bridge (または under-bridge) B をもつ knot diagram とする。

$$g(\tilde{D}_B) = g(D_B^\circ)$$

Proof.

\tilde{B} が k 回交差しているとする。Seifert interval J と \tilde{B} の向きから、 \tilde{D}_B の Seifert circle は J のかわりに $(k + 1)$ 個できる。

$$g(D_B^\circ) := \frac{n - s_{D^\circ} + 1}{2}$$

$$g(\tilde{D}_B) = \frac{(n + k) - (s_{D^\circ} + k) + 1}{2}$$



THE BRIDGE-REPLACING MOVE

Theorem 22

$$g(D) \geq g(\tilde{D}_B)$$

Proof.

$$g(D) \geq g(D_B^\circ) = g(\tilde{D}_B)$$

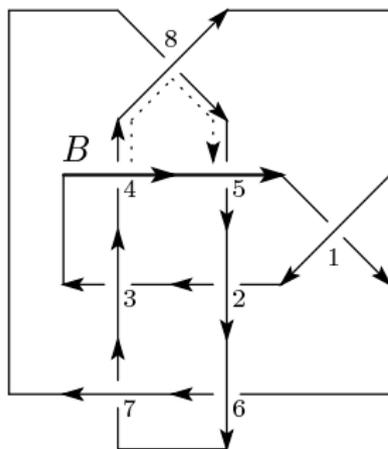


◇ではいつ真の不等号「 $>$ 」が成り立つのか？

Knot diagram 上での必要十分条件

Proposition 23

$g(D) > g(\tilde{D}_B) \iff$ knot diagram D の bridge-replacing move で架け替える bridge B が bypass を持つ



D

Gauss diagram 上での必要十分条件

Proposition 24

D を over-bridge (または under-bridge) B を持つ diagram とする.
また, v_0, \dots, v_{k+1} を G_D にある B 上の交点に対応する chords の端点の label とする. このとき

$g(D) > g(\tilde{D}_B) \iff G_D$ のある cycle α が $\alpha = [\dots v_i v_{i+1} \dots v_j v_{j+1} \dots]$
ただし, $0 \leq i, j \leq k$ で $i \neq j$

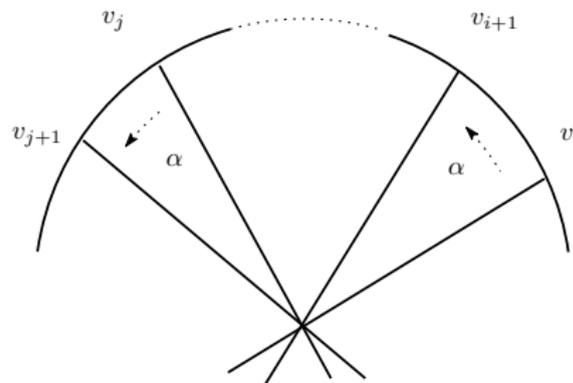
proof

c を v_0, \dots, v_{k+1} を端点に持つ G_D の chords とし,
 G'_D を G_D から c をすべて取り除いた Gauss diagram とする.

Gauss diagram 上での必要十分条件

$$\alpha = [\dots v_i v_{i+1} \dots v_j v_{j+1} \dots]$$

であるとき, G は図のようになっている.



このとき, bridge の chords で端点の両脇が二つの cycle になっているものを1つ1つ全て取り除くことを考えると, (口) よりある一つの cycle にすることができる.

従って残った chords の内1つ取り除くときは必ず (イ) の状況がおこる.

Gauss diagram 上での必要十分条件

(\implies)

$$g(D) > g(\tilde{D}_B) \iff g(G_D) > g(G_{D_B^\bullet})$$

よって Lemma 19 より示される.

(\impliedby)

$$g(G_D) > g(G'_D) = g(D_B^\bullet) = g(D_B^\circ) = g(\tilde{D}_B)$$

□

Example

Remark 25 (Stoimenow 2008)

knot 16_{686716} (in the Hoste-Thistlethwaite knot table) の knot genus はまだ 2 か 3 か決定していない。

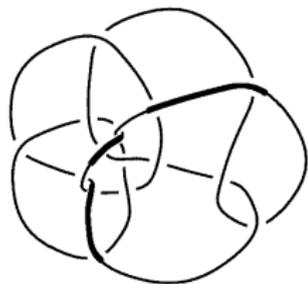


Figure: HT

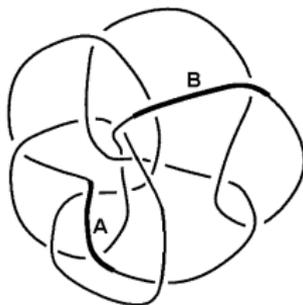


Figure: HT'

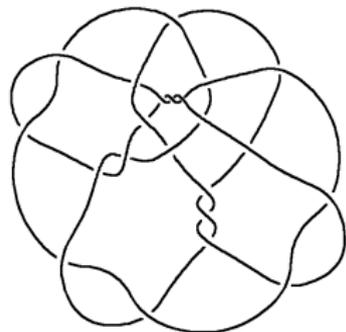


Figure: HT' から得られる genus が 3 の diagram

計算機による実験

Bridge-replacing move はすべて Gauss Code の言葉に翻訳できる。これを元に次のようなプログラムを作り¹, genus 2 の diagram を探した:

- ① 与えられた Gauss Code の中からすべての over-/under-bridge を探索, bridge-replacing move を行い, 新しい Gauss Code を得る。またその genus を求める。
- ② 得られた新しい Gauss Code に対して同じことを行う。繰り返す。

結果として, genus 2 の diagram は得られなかったが, このプログラム (+ α の工夫) によって, 右のような genus 3 を持つ最小交点の diagram が発見できた:

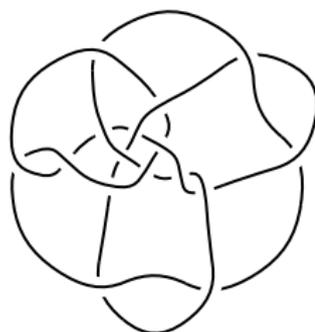


Figure: 16 交点, genus 3 の図式

¹佐々木潔氏による Python スクリプト

ちょっと面白い点 — 収束性？

このプログラムによって再帰的に **bridge-replacing move** を行っていくと、交点の数がどんどん増えていくので、計算は「発散」する（10 世代目くらいで PC がハングした）。

そこでプログラムの①と②の間に、以下のような交点を減らす **move**（に対応する **Gauss Code** の変形）を挟むことにする：



Figure: これらは向きによらず **diagram** の **genus** を増やさない

この改良したプログラムを使うと、例えば、**HT** の図式は 3 世代目以降、**HT'** の図式は 4 世代目以降、どの **over-/under-bridge** に関して **move** をやっても図式が変化しなくなるという「収束性」が確認できた。

Remark 26

少なくとも実験を行った範囲ではどんな **knot diagram** も **bridge-replacing move** に関して「収束」する.

課題 1: 上の「収束性」はおそらく証明できそう?

- ① 与えられた **diagram** が何世代目で収束するか
- ② 収束した世代には何種類の **diagram** が現れているか
- ③ それらの **genus** の最小値はいくらか

などはすべて元の図式の不変量になるのではないか?

課題 2: 交代結び目の非交代図式に **bridge-replacing move** を施していくと必ず交代図式が得られるのか? ← 現在, 二橋図式について研究中.

REFERENCES

- 1 J. Host, M. Thistlethwaite, Knotscape, an interactive program for the study of knots, available at <http://www.math.utk.edu/~morwen>
- 2 A. Stoimenow, Knots of (canonical) genus two, *Fund. Math.* 200 (2008), 1–67
- 3 A. Stoimenow, V. Tchernov, A. Vdovina, The canonical genus of a classical and virtual knot, *Proceedings of the Conference on Geometric and Combinatorial Group Theory, Part II (Haifa, 2000)*, *Geom. Dedicata* 95 (2002), 215–225
- 4 V. Turaev, Knotoids, preprint available at <http://arxiv.org/abs/1002.4133>
- 5 K. Daikoku, K. Sakai, and M. Takase, On a move reducing the genus of a knot diagram, preprint.