

Hamilton-Jacobi 方程式 の幾何構造

待田芳徳

共同: 石川剛郎

○ 1階偏微分方程式とHamilton-Jacobi方程式

- 1未知関数・1階偏微分方程式 PDE $\left\{ \begin{array}{l} \text{単独} \\ \text{連立} \end{array} \right.$

- 1階PDE: $F(x_i, z, \frac{\partial z}{\partial x_i}) = 0$
 $(x_i) = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ $\left(\begin{array}{l} * F: \text{smooth} \\ * F'(0): \text{非特異} \end{array} \right.$

↪ Hamilton-Jacobi方程式: $\frac{\partial z}{\partial t} + H(t, x_i, \frac{\partial z}{\partial x_i}) = 0$
H-J eq.

- t は特別な独立変数, z を含まない
- $F=0$ で z を含まないとき, $t=x_1$ として $\frac{\partial F}{\partial t}$ で解く。(陰関数の定理)
 z を含むときは, z を独立変数とみなす.

Ⓞ 方程式: $F(x, y) = 0$ (x, y の対称, global)
 $\left(\begin{array}{l} F_y \neq 0 \\ \text{関数} : y = f(x) \end{array} \right.$ (微分積分, local)

- H-J eq. - 解析力学, 幾何光学, 量子力学, 最適制御, ...

1-ジェット空間と1階PDE

$$J^{1(n,1)} : (x_i, z, p_i) \quad \theta = dz - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$$

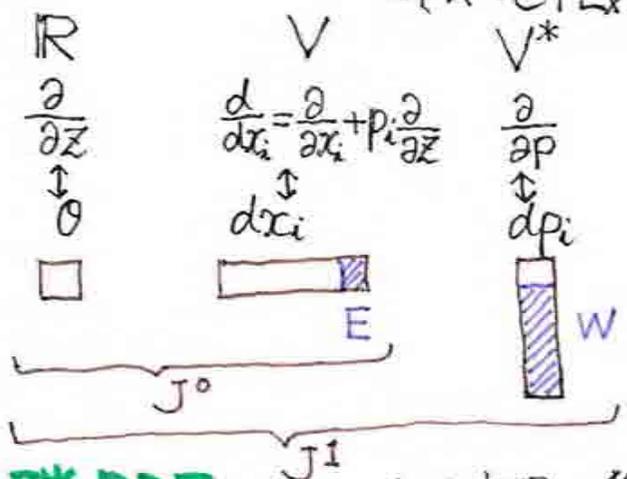
$$\downarrow \pi$$

$$J^0(n,1) : (x_i, z)$$

• $TJ^{2n+1} \supset C \supset \text{Char}(C)$

$$C = \{\theta = 0\} = \{X \in C \mid X \lrcorner d\theta \equiv 0\}$$

$$= \{X \in C \mid L_X(C) \subset C\}$$



$x = (x_i, z, p_i) \in \Sigma, x_0 = (x_i, z) \in J^1$

$W_x = (T_x \Sigma \cap C_x) \cap \text{Char}(C_x)$
D: 2n-1次元とする

$E_x = \{X \in D_x \mid d\theta(X, Y) = 0, Y \in D_x\}$

$E = \langle X_F \rangle$ 接触 Hamilton v.f. \rightarrow 特異曲線

$E \oplus W \subset D \subset T\Sigma$: Monge系 (at $x \in \Sigma$)

$\bigcup_{x \in \pi^{-1}(x_0)} \pi_{*x}^{-1}(E \oplus W)$: Mongeコーン (at $x_0 \in J^1$)
同じ次元

• (単独) 1階PDE \leftrightarrow 1-ジェット空間の幾何学

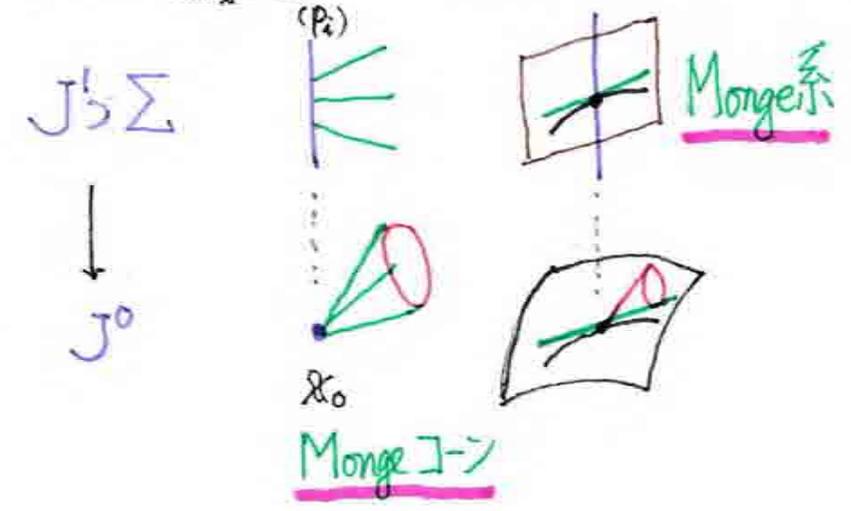
$$F(x_i, z, p_i) = 0$$

$$J^{1(n,1)} \supset_{\text{codim } 1} \Sigma^{2n} = \{(x_i, z, p_i) \mid F=0\}$$

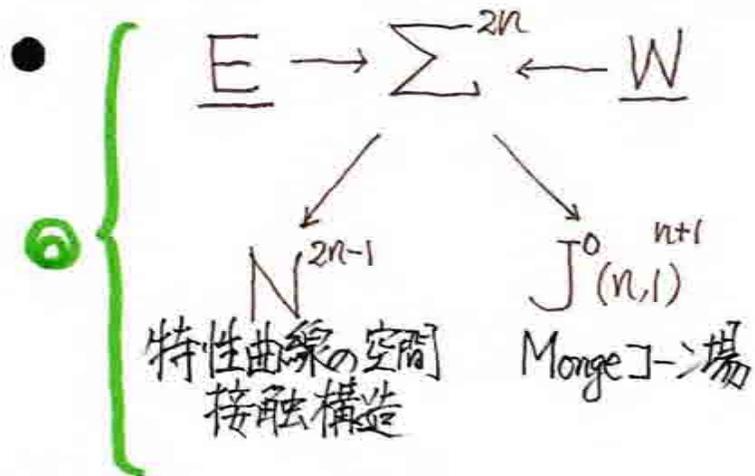
\downarrow submersion

$$J^0(n,1)$$

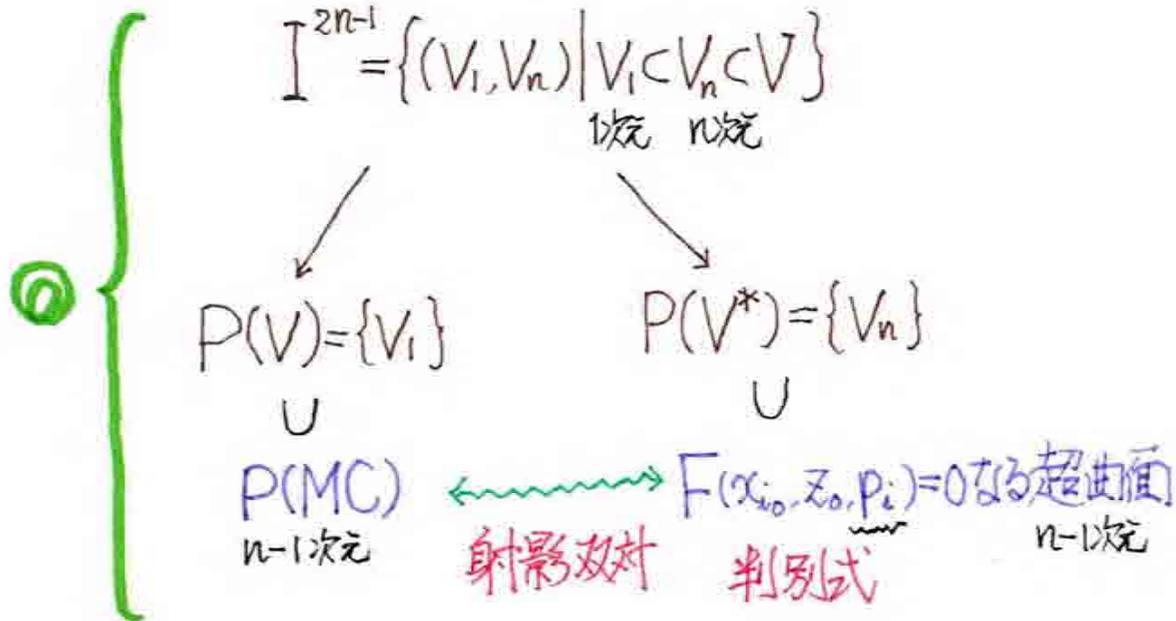
$$\left\{ \begin{array}{l} TJ^{2n+1} \supset C \supset \text{Char}(C)_n \\ \cup \quad \cup \quad \cup \\ T\Sigma \supset D \supset \text{Char}(D) = W_{n-1} \end{array} \right.$$



コーン場と射影双対



• $x_0 \in J^0(n,1) : \text{fix}$
 $T_{x_0} J^0 = V^{n+1}$
 \cup
 MC : Monge コーン
 n次元と
 (n+1)
 次元



Hamilton-Jacobi 方程式

$$\begin{aligned} I &\subset \mathbb{R}: t \\ \Omega &\subset \mathbb{R}^n: (x_1, \dots, x_n) & T^*\mathbb{R}^n &: (x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) \\ J^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &: (x_1, \dots, x_n, z) & J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &: (x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) \\ J^{0(n,1)} & & J^{1(n,1)} & \end{aligned}$$

• Hamilton 関数

$$H = H(t, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) \text{ on } I \times T^*\Omega$$

• Hamilton-Jacobi 方程式

$$\frac{\partial z}{\partial t} + H(t, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0 \text{ on } I \times \Omega \quad \left(\begin{array}{l} z = z(t, x_1, \dots, x_n) \text{ 未知関数} \\ p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \end{array} \right)$$

• Hamilton 方程式 解曲線を特性曲線

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \\ \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1 \leq i \leq n) \quad (h = \frac{\partial z}{\partial t})$$

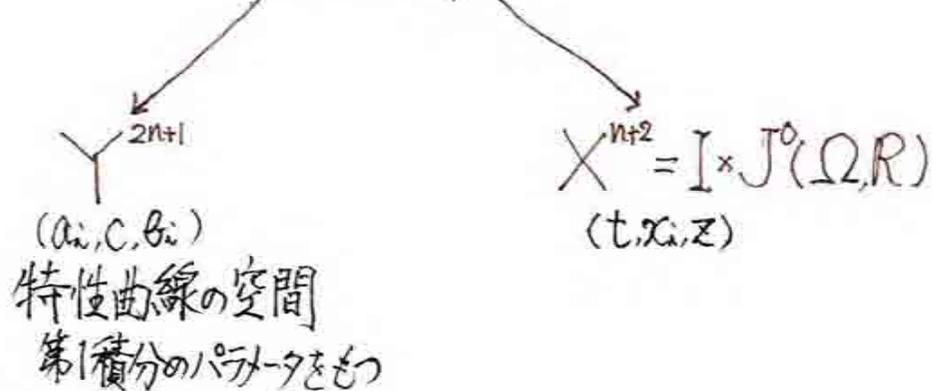
1- \rightarrow 空間

$$\begin{aligned} h + H(t, x_i, p_i) &= 0, \quad dz = \sum_{i=1}^n p_i dx_i + h dt && \text{on } J^1(I \times \Omega, \mathbb{R}) \\ dz &= \sum_{i=1}^n p_i dx_i - H dt && \text{on } I \times J^1(\Omega, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Poincaré-Cartan 形式

$$t \rightarrow Z^{2n+2} = I \times J^1(\Omega, \mathbb{R}) \leftarrow (p_i)$$

$$(t, x_i, z, p_i)$$



○ } (green bracket)

例) \mathbb{R}^n 上, $g_0 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ Riemann 計量 (Euclid)

対称性は $\mathbb{R} \times SO(n)$
実は $SO(2, n+2)$!

$$H = H(t, x_i, p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + \dots + p_n^2) \rightarrow \frac{\partial Z}{\partial t} + H(t, x_i, \frac{\partial Z}{\partial x_i}) = \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial Z}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial Z}{\partial x_n} \right)^2 \right) = 0$$

\mathbb{Z}^{2n+2} 上,

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{dZ}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 \end{cases}$$

$\rightarrow x_i = b_i t + a_i$
 $\rightarrow p_i = b_i$ ($a_i, b_i, c: \text{const}$)
 $Z = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n p_i^2 \right) t + c$

$Y^{2n+1}: (a_i, c, b_i)$

$$\begin{cases} a_i = x_i - p_i t = -t b_i + x_i \\ c = Z - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n p_i^2 \right) t = -\frac{t}{2} \sum_{i=1}^n b_i^2 + Z \\ b_i = p_i \end{cases}$$

$X^{n+2}: (t, x_i, Z)$

$$\begin{cases} t = t \\ x_i = p_i t + a_i \\ Z = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n p_i^2 \right) t + c \end{cases}$$

幾何構造 $TY \supset D: dc - \sum_{i=1}^n b_i da_i = 0$ 接触構造
(グラフ: $(b_i) \mapsto (a_i, c, b_i)$ Legendre n -平面
(Y の各点を通る 1-パラメータ t をもつ leg. n -平面

$TX \supset C: g = -2dt dz + \sum_{i=1}^n dx_i^2 = -2dt ds + g_0 = 0$ Lorentz 計量のコーン構造
(グラフ: $t \mapsto (t, x_i, Z)$ 双直線
(X の各点を通る n -パラメータ p_i をもつ双直線

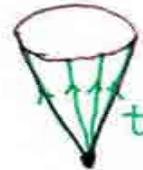
$TZ \supset E = \{ dx_i - p_i dt = 0, dZ - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n p_i^2 \right) dt = 0 \}$ rank $n+1$ の分布
 $\cup \wedge E^2 = E + [E, E] = \{ dZ - \sum_{i=1}^n p_i dx_i + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n p_i^2 \right) dt = 0 \}$ cork 1 の分布

● 解

× Z
↓
×

$$(t, p_i) \mapsto (t, x_i = p_i t + a_i, z = \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^n p_i^2) t + C, p_i) \quad \text{完全解} \quad \text{パラメータ } a_i, C$$

$$\downarrow$$
$$(t, x_i, z = z(t, x_i)) \quad \text{ヌルコーン} \quad (n+1 \text{次元})$$



ヌル直線

$$z = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2t}$$

中心場

× Y
↓
Z
↓
×

$$C = f(a_1, \dots, a_n), \quad b_i = \frac{\partial f}{\partial a_i} = f_{a_i}$$

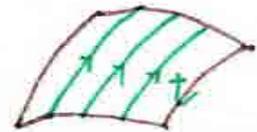
$$(a_i) \mapsto (a_i, C = f, b_i = f_{a_i}) \quad \text{Legendre mfd.}$$

$$(t, a_i) \mapsto (t, x_i = f_{a_i} t + a_i, z = \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^n f_{a_i}^2) t + f)$$

一般解 初期条件 $z(0, x_i) = f$

ヌル超曲面
(n+1次元)

一般解 $\left(\begin{array}{l} \text{完全解} \text{の中で } C = f(a_1, \dots, a_n) \text{の部分集合} \\ \downarrow \pi_x \\ \text{ヌルコーンの } n \text{-パラメータ部分族の envelope} \end{array} \right.$

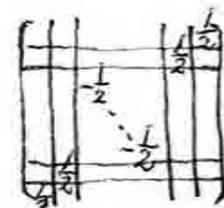


ヌル曲線

BD図式

f. $V = \mathbb{R}^{n,n}$ ニュートン計算量 $\rightarrow SO(n,n)$

$V = \mathbb{R}^{2, n+2} \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n+2}, e_{n+3}, e_{n+4}\}$ s.t. (e_i, e_j) :



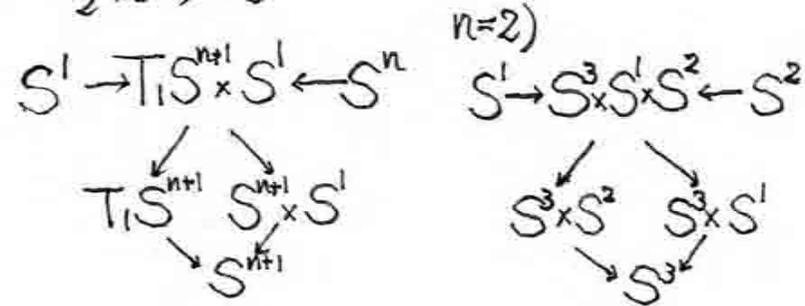
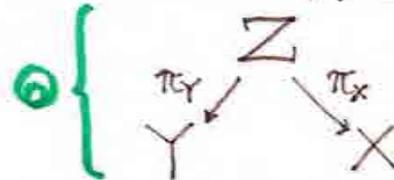
$\hookrightarrow SO(2, n+2)$

$f = \sum_{i=1}^{n+4} x_i e_i : x_1 \wedge \dots \wedge x_{n+4} \stackrel{\text{def.}}{\iff} (f, f) = x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 - \frac{1}{2}(x_3^2)^2 - \dots - \frac{1}{2}(x_{n+2}^2)^2 = 0$

$Z := \{(V_1, V_2) \mid V_1 \subset V_2 \subset V, V_i: i \text{ dim 全 } x_i \text{ の } \mathbb{R} \text{ 空間}\}$

$X := \{V_1 \mid V_1 \subset V\}$

$Y := \{V_2 \mid V_2 \subset V\}$



● 局所座標系 Z 上の loc. coord.

$V_1 = \langle f_1 \rangle \subset V_2 = \langle f_1, f_2 \rangle$

$\begin{cases} f_1 = e_1 + x_1^2 e_2 + x_1^3 e_3 + \dots + x_1^{n+2} e_{n+2} + x_1^{n+3} e_{n+3} + x_1^{n+4} e_{n+4} \\ f_2 = e_2 + x_2^3 e_3 + \dots + x_2^{n+2} e_{n+2} + x_2^{n+3} e_{n+3} + x_2^{n+4} e_{n+4} \end{cases}$
 $(f_1, f_1) = (f_2, f_2) = (f_1, f_2) = 0 \text{ (1)}$

$Z : (x_1^2, x_1^3, \dots, x_1^{n+2}, x_1^{n+3}, x_2^3, \dots, x_2^{n+2}) \quad \dim Z = 2n+2$

X 上の loc. coord.

$X : (x_1^2, x_1^3, \dots, x_1^{n+2}, x_1^{n+3}) \quad \dim X = n+2$

$\pi_X : Z \rightarrow X, (x_1^2, \dots, x_2^{n+2}) \mapsto (x_1^2, \dots, x_1^{n+3})$

Y 上の loc. coord.

$V_2 = \langle g_1, g_2 \rangle$

$\begin{cases} g_1 = e_1 + y_1^3 e_3 + \dots + y_1^{n+2} e_{n+2} + y_1^{n+3} e_{n+3} + y_1^{n+4} e_{n+4} \\ g_2 = e_2 + y_2^3 e_3 + \dots + y_2^{n+2} e_{n+2} + y_2^{n+3} e_{n+3} + y_2^{n+4} e_{n+4} \end{cases}$

$Y : (y_1^3, \dots, y_1^{n+2}, y_1^{n+3}, y_2^3, \dots, y_2^{n+2}) \quad \dim Y = 2n+1$
 $\pi_Y : Z \rightarrow Y, (V_1, V_2) \mapsto V_2$
 $\begin{cases} y_1^3 = x_1^3 - x_2^3 x_1^2, \dots, y_1^{n+2} = x_1^{n+2} - x_2^{n+2} x_1^2 \\ y_1^{n+3} = x_1^{n+3} - \frac{1}{2}(x_2^3)^2 - \dots - \frac{1}{2}(x_2^{n+2})^2 x_1^2, y_2^3 = x_2^3 \dots \end{cases}$

分布

Z 上の分布

* $E = E_1 \oplus E_2$
 $\text{rk } n+1$

$E_1 = \text{Ker } \pi_{X*}, E_2 = \text{Ker } \pi_{Y*}$
 $\text{rk } n, \text{rk } 1$

Engel 分布

$= \{ dx_1^3 - x_2^3 dx_1^2 = 0, \dots, dx_1^{n+2} - x_2^{n+2} dx_1^{n+1} = 0, dx_1^{n+3} - \frac{1}{2}((x_2^3)^2 + \dots + (x_2^{n+2})^2) dx_1^2 = 0 \}$

* $E^2 = \partial E = E + [E, E]$ E の (第 1) 派生系

$\text{cor } k=1$
 $= \{ dx_1^{n+3} - x_2^3 dx_1^3 - \dots - x_2^{n+2} dx_1^{n+2} + \frac{1}{2}((x_2^3)^2 + \dots + (x_2^{n+2})^2) dx_1^2 = 0 \}$

$TZ = \partial^2 E = \partial E + [E, \partial E] = E^2 + [E, E^2]$

$E = E_1 \oplus E_2 \subset E^2 \subset TZ$
 $\text{rk } n+1, n, 1, 2n+1, 2n+2$

$E_1 = \langle \frac{\partial}{\partial x_2^i} \rangle_{3 \leq i \leq n+2}$
 $E_2 = \langle \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \sum_{i=3}^{n+2} x_2^i \frac{\partial}{\partial x_1^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{n+2} (x_2^i)^2 \frac{\partial}{\partial x_1^{n+3}} \rangle$

$[E_1, E_2] = E^2, [E_1, E_1] = E_1, [E_2, E_2] = E_2$
 $[E_1, E^2] = TZ, [E_2, E^2] = E^2$

Y 上の分布

* $D \subset TY$ 接線分布

$y = V_2 \in Y, Y' = \{ V_2' \in Y \mid V_2' \subset V_2^\perp \}$

$D_y := T_y Y' \cong \text{Hom}(V_2, V_2^\perp / V_2) \cong W \otimes U, W = V_2^*, U = V_2^\perp / V_2$: 定値内積をもつ Lie 接線分布
 $\text{rk } 2n, \dim W = 2, \dim U = n$
 $= \{ dy_1^{n+3} - y_2^3 dy_1^3 - \dots - y_2^{n+2} dy_1^{n+2} = 0 \}$

$= \pi_{Y*} E^2$

$L: Y$ の Legendre mfd. が ZIL である $\stackrel{\text{def.}}{\iff} T_y L = \underset{W}{\mathbb{C}} \otimes U \subset D_y (y \in L)$

* $C_Y \subset TY$ コー分布

$(C_Y)_y := \bigcup_{z \in \pi_Y^{-1}(y)} \pi_{Y*}(E_1)_z$

$C_Y \subset D, \pi_{Y*}(E_1)_z = T_y(\pi_Y(\pi_X^{-1}(x))) (x \in X)$ ZIL leg. subsp.

$C_Y \subset D \subset TY$
 $\text{rk } n+1, 2n, 2n+1$ linear hull

X 上の分布 $C = C_x \subset TX$ 又ルコーン分布
(共形, 2次)

$x = V_1 \in X$ 中心のコーン $P(V_1^\perp) \cap X = \pi_x \pi_Y^{-1} \pi_Y \pi_x^{-1}(x)$

x での接コーン $C_x := \bigcup_{z \in \pi_x^{-1}(x)} \pi_{x*}(E_z) = \bigcup_{z \in \pi_x^{-1}(x)} \pi_{x*}(E_{2z})$

$T_x X \cong V_1^\perp / V_1$ 上, Lorentz 共形構造をもつ
(1, n+1)型

$$g = -dx_1^2 dx_1^{n+3} + \frac{1}{2} ((dx_1^3)^2 + \dots + (dx_1^{n+2})^2)$$

$$l = \pi_{x*}(E_{2z}) = T_x(\pi_x(\pi_Y^{-1}(y))) \quad (y \in Y) \quad \text{(1次元) 又ル subsp. 又ル方向}$$

$$\underbrace{C = C_x \subset TX}_{\substack{n+1 \quad (\quad n+2 \\ \text{linear hull}}}}$$

ツイスター対応

$x \in X$ に対して, $\pi_Y \pi_x^{-1}(x)$ は Y の null Leg. n 平面 $\rightarrow X$ は, Y の null Leg. n 平面全体の集合

$y \in Y$ に対して, $\pi_x \pi_Y^{-1}(y)$ は X の null line $\rightarrow Y$ は, X の null line 全体の集合

null 方向束 $ND(X) = \bigcup_{x \in X} (x, l) \quad (l \subset T_x X : \text{null 方向}) \cong Z$

null Leg. n 平面束 $NL(Y) = \bigcup_{y \in Y} (y, L) \quad (L = t \otimes U \subset D_y \subset T_y Y : \text{null Leg. n 平面}) \cong Z$
 $\mathbb{P}^{n+1}(W)$

①注

X において, $x_1^2 \rightarrow t; x_1^3, \dots, x_1^{n+2} \rightarrow x_1, \dots, x_n; x_1^{n+3} \rightarrow z$

(t, x_1, \dots, x_n, z)

Z において, $x_2^3, \dots, x_2^{n+2} \rightarrow p_1, \dots, p_n$

$(t, x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n)$

Y において, $y_1^3, \dots, y_1^{n+2} \rightarrow a_1, \dots, a_n; y_1^{n+3} \rightarrow c; y_2^3, \dots, y_2^{n+2} \rightarrow b_1, \dots, b_n \quad (a_1, \dots, a_n, c, b_1, \dots, b_n)$

H-Jeg. の (隠れた) 対称性
 $SO(2, n+2)$

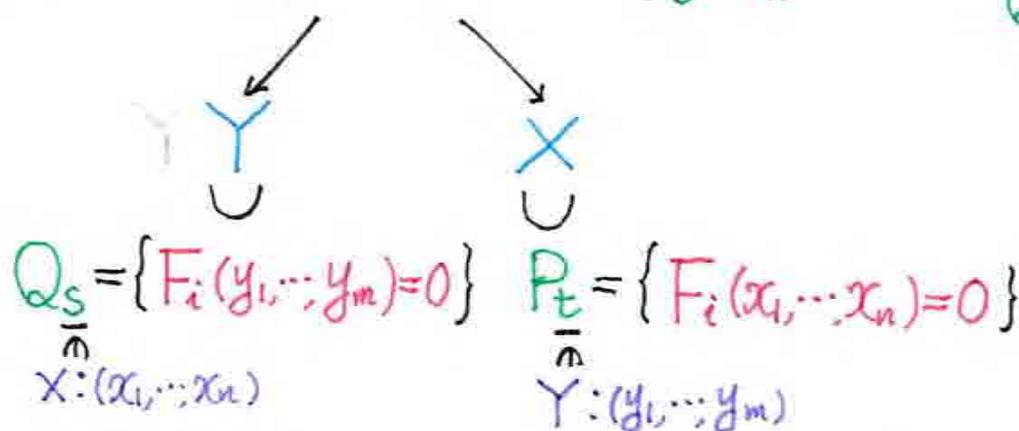
※ 微分方程式のツイスター対応

$$X^n : (x_1, \dots, x_n)$$

$$Y^m : (y_1, \dots, y_m)$$

$$X \times Y \supset Z^{n+m-l} = \left\{ \underbrace{F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0}_{\text{ツイスター関係式}}, i=1, \dots, l \right\}$$

$$P_t \cong P^{n-l} \rightarrow Z \subset X \times Y \leftarrow Q_s \cong Q^{m-l}$$

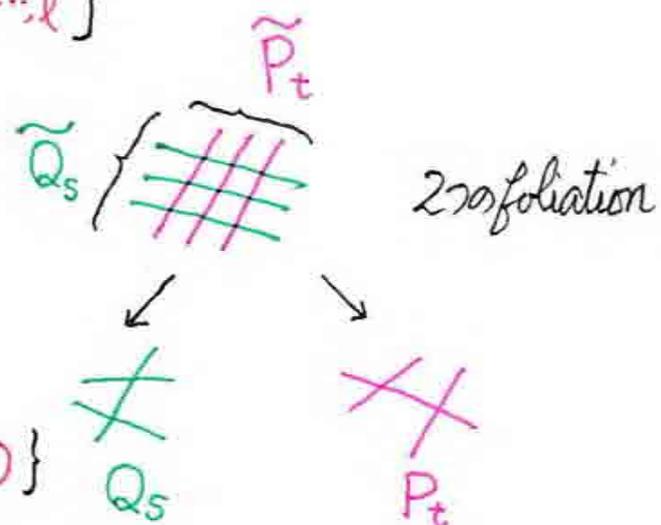


↓ ↑ 完全解

↓ ↑ 完全解

\mathcal{F}_Y : 微分方程式系 \longleftrightarrow \mathcal{F}_X : 微分方程式系

一般化した Bäcklund 変換



○ 放物面での図式

$$J_Y^2(n,1) \supset Z^{2n+2} \begin{pmatrix} Y \times X \\ Y_0 \times X \end{pmatrix} \subset J_X^1(n+1,1)$$

$$Y = J_Y^1(n,1)^{2n+1} \begin{pmatrix} a_i, c, b_i \end{pmatrix}$$

$$X = J_X^0(n+1,1)^{n+2} (t, x_i, z)$$

$$Y_0 = J_Y^0(n,1)^{n+1} (a_i, c)$$

$$F = -c + \frac{t}{2} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) + \sum_{i=1}^n x_i a_i + z = 0$$

* c は a_i の 2 次関数で、グラフは回転放物面
(1 次定数含む)

* $F_i = -b_i + t a_i + x_i = 0$ ($i=1, \dots, n$) を加える

$$Z = \{F=0\} \subset Y_0 \times X$$

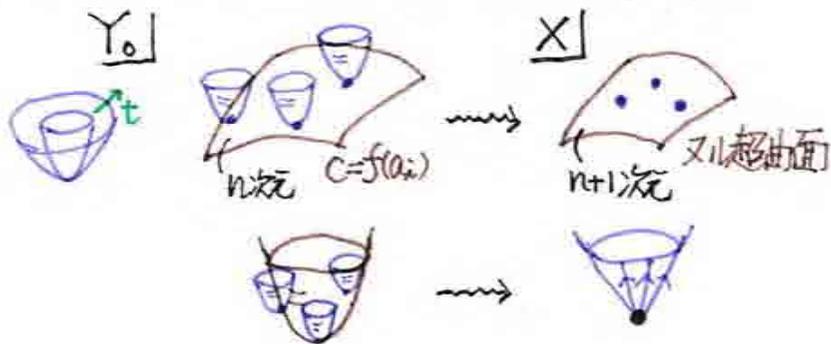
$$= \{F=F_1=\dots=F_n=0\} \subset Y \times X$$

回転放物面

又 n Leg. n -平面

given

$$C = f(a_1, \dots, a_n) \quad Y_0 \text{ でのグラフ (超曲面)}$$



cf.   楕円放物面 双曲放物面
すべての 2 次関数 $i.e.$ すべての放物面
そのとき X は Lagrange Grassmann str.

$$F = F_i = 0 \text{ のとき}$$

$$-dc + t \sum a_i da_i + \frac{1}{2} (\sum a_i^2) dt + \sum x_i da_i + \sum a_i dx_i + dz = 0$$

$$-db_i + t da_i + a_i dt + dx_i = 0$$

$$dc = t \sum a_i da_i + \sum x_i da_i, \quad db_i = t da_i \text{ のとき}$$

$$\begin{cases} 2dz + \sum a_i dx_i = 0 \\ a_i dt + dx_i = 0 \quad (i=1, \dots, n) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2dz & dx_1 & dx_2 & \dots & dx_n \\ dx_1 & dt & & & \\ dx_2 & & dt & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ dx_n & & & & dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det = (dt)^{n+1} (2dzdt - dx_1^2 - \dots - dx_n^2) = 0$$

$$dt = 0 \text{ or } dzdt - \frac{1}{2} (dx_1^2 + \dots + dx_n^2) = 0$$

* z は t, x_i の 1 次関数で、グラフは又 $n+1$ 平面
* z, x_i は t の又 n 直線

○ Hamilton-Jacobi系

● H-J系

● X^{n+2} : $n+2$ dim. mfd.

CCTX: $n+1$ dim. コーン場

$Z^{2n+2} = PC(X)$: 射影コーン束

$\pi_x: Z \rightarrow X$: 射影

- 各点で \mathbb{R}_+ -inv.
- 各点のCはdiffeo.
- $x \mapsto C_x$ はsmooth
- sing.は0-section

⊕ 次元の低いコーン場
ex. Lag. Grass str. 対称行列
コーン (行列式=0, 階数1の行列)

× $E \subset TZ$ $z=(x,l) \in PC(X)$ ($x \in X, l \subset C_x$) とし, $E_z = \pi_{x*}^{-1}(l)$
rk $n+1$

× $E_1 \subset TZ$ $E_1 := \text{Ker } \pi_{x*}$ 発積分可能, $E_1 \subset E$
rk n

× $E^2 \subset TZ$ $(l) \pi_l \subset T_x X$ ($z=(x,l)$) 接超平面とて, $E_z^2 = \pi_{x*}^{-1}(\pi_l)$
cor k 1

$E_1 \subset E \subset E^2 \subset TZ$ for (X, C)
rk n rk $n+1$ rk $2n+1$ rk $2n+2$

● $E = E_1 \oplus E_2 \subset TZ$ なる E_2 とする
rk $n+1$ rk n rk 1

$(X, C, E = E_1 \oplus E_2)$ Hamilton-Jacobi系 とし
(H-J系)

$\Leftrightarrow (X, C, h)$: h を X 上の C に沿った Z への水平リフト (擬部分接続)
 $z=(x,l) \in PC(X)$ に対して, $\pi_{x*} E_{2|z} = l$

⊕ (X, D, C, h) G-C系
 D : 接触分布
 C : Lag. コーン場

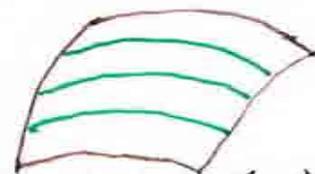
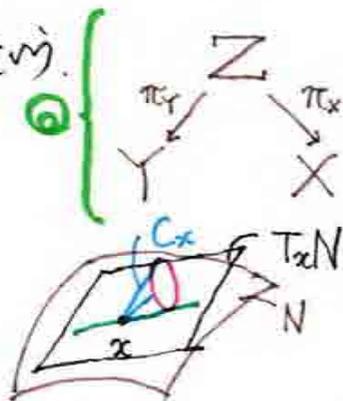
* Z 上の E_2 の積分曲線を, H - J 系の特性曲線といふ.

特性曲線の空間 $Y^{2n+1} = Z/E_2$
leaf sp.

* $n+1$ 次元超曲面 $N \subset X$ が, H - J 系の解である

$$\stackrel{\text{def.}}{\iff} T_x N \cap C_x = \pi_{x*} E_2$$

1次元



N 上, 特性曲線の射影のfoliation

$$\bullet \quad \begin{aligned} E^2 &= E + [E, E] & TZ &= E^2 + [E, E^2] \\ &= E + [E_1, E_2] & &= E^2 + [E_1, E^2], [E_2, E^2] \subset E^2 \end{aligned}$$

ブラケット関係式が成り立つとき,

H - J 系 $(X, C, E = E_1 \oplus E_2)$ は, H - J 系 with generating といふ.

$D := \pi_{Y*} E^2 \subset TY$ は接触構造をもつ

$$\bullet \quad \left\{ \begin{array}{ll} (Z, E = E_1 \oplus E_2, E^2) & \\ \pi_Y \swarrow & \searrow \pi_X \\ (Y, D) & (X, C) \\ \text{contact str.} & \text{cone str.} \end{array} \right.$$

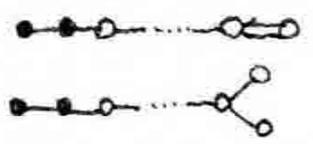
● コンコン型のH-J系

- ベキ零次数つき Lie代数 (nilpotent graded Lie algebra) が, **コンコン型** (conformal-contact type) con-con type である

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M} = \mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1, [\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q] \subset \mathfrak{g}_{p+q} \quad ([\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_2, [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] \subset \mathfrak{g}_3, \text{他は } 0) \\ \dim \mathfrak{g}_3 = 1, \dim \mathfrak{g}_2 = n, \dim \mathfrak{g}_1 = n+1 \\ \mathfrak{g}_1 = e \oplus f \quad \dim e = n, \dim f = 1 \\ [e, e] = [f, f] = 0, [e, f] = \mathfrak{g}_2 \\ e \text{ 上 (尖形) 対称双線形形式は定値: } \quad \left(\begin{array}{l} * \text{ 不定値もある} \\ * \text{ 同型 } e \cong \mathfrak{g}_2 \text{ より, } \mathfrak{g}_2 \text{ 上にどうつす} \end{array} \right) \\ \varphi: e \times e \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(u, v) = [u, v, f]h \quad (f = \langle f \rangle, \mathfrak{g}_3 = \langle h \rangle) \end{array} \right.$$

Prop. (cf. [Yamaguchi])

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p \text{ を } \mathcal{M} \text{ の延長とする.} \\ \text{そのとき, } \mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3}_{\mathcal{M}} \text{ として, } \end{array} \right. \begin{cases} (B_l, \{\alpha_1, \alpha_2\}) & (l = \frac{n+3}{2}, n: \text{odd}) \\ (D_l, \{\alpha_1, \alpha_2\}) & (l = \frac{n+4}{2}, n: \text{even}) \end{cases}$$

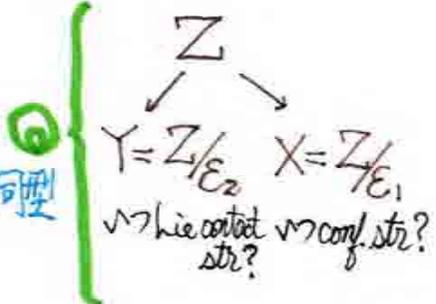


Z^{2n+2} : $2n+2$ dim. mfd.

$E \subset TZ$: rank $n+1$ の分布が, **コンコン構造** (conformal-contact structure) である



$$\left\{ \begin{array}{l} E = E_1 \oplus E_2 \quad \text{rk } E_1 = n, \text{rk } E_2 = 1 \quad * \text{ 必ず完全積分可能} \\ E \subset E^2 = \partial E \subset TZ = \partial^2 E \quad \text{rk } E^2 = n+1 \\ \text{シンボル代数 } \mathcal{M}(Z) = \mathfrak{g}_3(Z) \oplus \mathfrak{g}_2(Z) \oplus \mathfrak{g}_1(Z) \quad (Z \in \mathbb{Z}) \text{ が, コンコン型 NGLA } \mathcal{M} \text{ に同型} \\ \left(\begin{array}{l} \mathfrak{g}_1(Z) = E(Z) = E_1(Z) \oplus E_2(Z) \\ \mathfrak{g}_2(Z) = E^2(Z)/E(Z) \\ \mathfrak{g}_3(Z) = TZ(Z)/E^2(Z) \end{array} \right. \end{array} \right.$$



- $(X, C, E = E_1 \oplus E_2)$: H-J系 with generating が, H-J系 with con-con str. であるとは, 射影コーン束 $Z = PC(X)$ がコンコン構造をもつときをいう.

例) X^{n+2} : 共形 Lorentz 計量 $[g]$ をもつ mfd.

C : $[g]$ からの $(1, n+1)$ 型ヌルコーン場

$Z = PC(X) = ND(X)$: (2) 型ヌル方向束

$E = E_1 \oplus E_2$: $rk 1$ の E_2 は, ヌル測地線からの測地的流れから決まるもの

- X の超曲面 N が **ヌル超曲面** である \Leftrightarrow $T_x N$ ($x \in N$) の誘導計量が退化 i.e. $(0, n)$ 型 $(n+1)$ 次元ヌル直線場 $\mathcal{N} \subset TN$ が定義される.

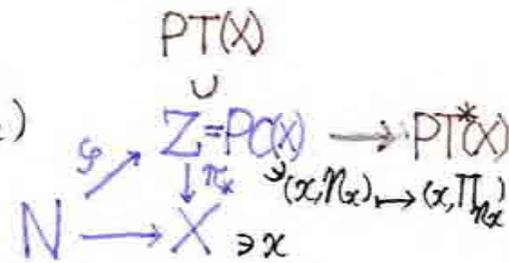
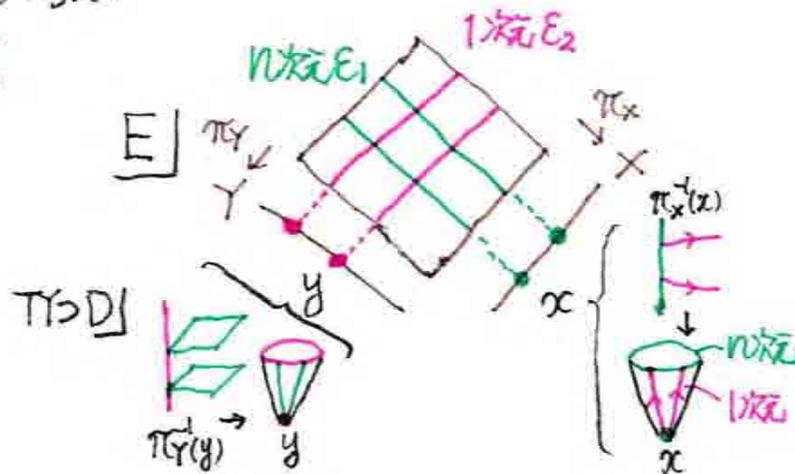
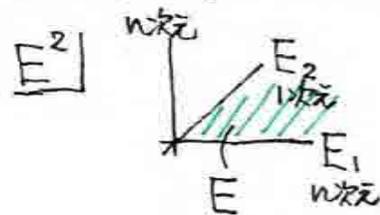
N は, H-J系の解である

$N \subset X$ から Z へのリフト $\tilde{N} = \mathcal{G}(N) \subset Z$ が定義される: $\mathcal{G}: N \rightarrow Z, x \mapsto (x, \mathcal{N}_x)$

\tilde{N} は E^2 -積分多様体である: $T\tilde{N} \subset E^2$

$\pi_x \tilde{N}$ は Y での Legendre mfd.

- $E = E_1 \oplus E_2 \subset E^2 \subset TZ$



- H-J系の解 \Leftrightarrow X でのヌル超曲面 $n+1$ 次元
 \Leftrightarrow Z での極大 E^2 -積分多様体 $n+1$ 次元 E_2 -foliated
 \Leftrightarrow Y でのLegendre多様体 n 次元

解の初期値問題

初期空間の解へ:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & Z & & Y & & Z & & X \\
 \tilde{N}_0 & \xrightarrow{\pi_Y} & \tilde{N}_0 & \xrightarrow{\pi_Y^{-1}} & \tilde{N} & \xrightarrow{\pi_X} & N \\
 n & & n & & n+1 & & n+1 \\
 & & & & = \phi_2 \tilde{N}_0 & &
 \end{array}$$

$(E_2 \text{のflow})$

(1) 特異初期値

(i) E-integral

E_1 -integral		$E_1 (T_Z \tilde{N}_0 = E_{1Z})$	\rightarrow		完全解	-----	中心場
E_1 -slant		$E_1 (T_Z \tilde{N}_0 \cap E_{1Z})$	\rightarrow				

(ii) E-intersect E^2

$E (T_Z \tilde{N}_0 \cap E_Z)$
k次元

\rightarrow

ヌル曲線

一般解 ----- 接線場

(2) 正則初期値

E^2

$(T_Z \tilde{N}_0 \cap E_Z = \emptyset)$

$\pi_Y \swarrow$ \tilde{N}_0 $\searrow \pi_X$

D

\rightarrow

ヌルはな N

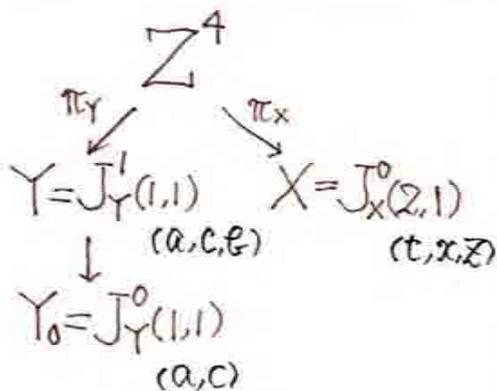
包絡面
 (* involute of evolute)
 (* $n=1$ 時の接線曲面)

一般解 ----- 法線場
 (ヌル線の包絡面)

○ 局所同値問題

● ツイスター-関係式からの双対な微分方程式

- $B_2 = C_2$
 $SO(2,3) \sim Sp(4)$

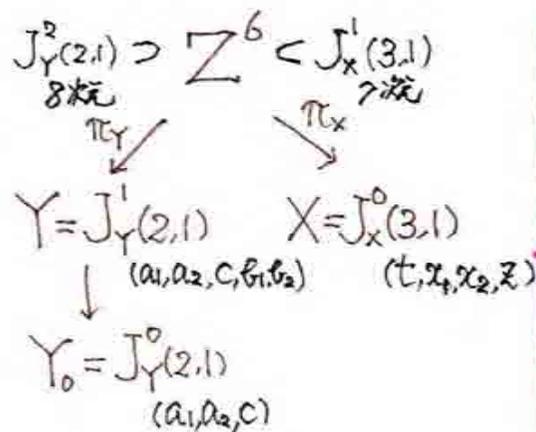


$$\begin{cases}
 F(a, c; t, x, z) = -c + \frac{t}{2}a^2 + xa + z = 0 \\
 C = \frac{t}{2}a^2 + xa + z
 \end{cases}$$

$$C''' = \frac{d^3 C}{da^3} = 0 \iff \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 = 0$$

Y: proj. contact str. X: (1,2)型 conf. str.

- $D_3 = A_3$
 $SO(2,4) \sim SU(2,2)$
 $SO(3,3) \sim SL(4)$



$$\begin{cases}
 F(a_1, a_2, c; t, x_1, x_2, z) \\
 = -c + \frac{t}{2}(a_1^2 + a_2^2) + x_1 a_1 + x_2 a_2 + z = 0 \\
 \frac{t a_1 a_2}{t a_1 a_2}
 \end{cases}$$

$$C_{a_1 a_2} = 0, C_{a_1 a_1} - C_{a_2 a_2} = 0$$

$$\iff \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^2 \right) = 0$$

Y: 楕円型 Lie 接触構造
X: (1,3)型 尖形構造

$$C_{a_1 a_1} = 0, C_{a_2 a_2} = 0$$

$$\iff \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$$

Y: 双曲型 "
X: (2,2)型 "

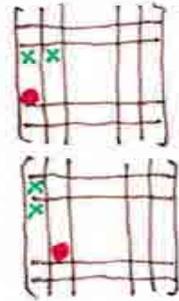
Thm (Reduction Theorem)

con-con str. $(Z^{2n+2}, E=E_1 \oplus E_2)$ をもつ正規 Cartan 接続 (Q, ω) に対して, $(n \geq 3)$

$(n=2, Z^6$ のとき, 5つ
 $n=1, Z^4$ のとき, 4つ
 ぐわしくは別紙)

2つの基本不変量 I_1, I_2 をもつ

$\begin{cases} I_1 \text{ は } H^{0,2} \subset \mathfrak{g}_{-2} \otimes \wedge_{-3}^2 \text{-値関数, } \mathfrak{g}_0 \text{-生成元は} \\ I_2 \text{ は } H^{1,2} \subset \mathfrak{g}_{-1} \otimes \wedge_{-3}^2 \text{-値関数, } \mathfrak{g}_0 \text{-生成元は} \end{cases}$



(i) $I_1 = I_2 = 0 \iff Z \cong SO(2n+2)/H$ locally

(ii) $I_1 = 0 \iff Z$ 上の (Q, ω) は, conf. str. をもつ $X = Z/\mathfrak{E}_1$ 上の正規 Cartan 接続 (Q_X, ω_X) に reduce
 $\iff Z$ は, X 上の null geodesic からの con-con str. をもつ.
 (null path geometry の中で)

(iii) $I_2 = 0 \iff Z$ 上の (Q, ω) は, Lie contact str. をもつ $Y = Z/\mathfrak{E}_2$ 上の正規 Cartan 接続 (Q_Y, ω_Y) に reduce
 $\iff Z$ は, Y 上の null Legendre mfd. からの Lie contact str. をもつ.
 (null Legendre n-path geometry の中で)

Thm (Lifting Theorem)

- (i) (X, C) 上の null path geometry は, con-con str. をもつ $Z = ND(X) = PC(X)$ 上に正規 Cartan 接続 (Q, ω) をもつ.
- (ii) (Y, D) 上の null Legendre n-path geometry は, Lie contact str. をもつ $Z = NL(Y)$ 上に正規 Cartan 接続 (Q, ω) をもつ.

- (X, C) の $Z = ND(X) = PC(X)$ 上の **null path str.** とは,
 $E \supset E_1$ に対して, Z 上の $\text{rk } 1$ の分布 E_2 s.t. $\pi_{X*}(E_{2|z}) = l$ ($z = l \in Z$) を与えること.
 そのとき, **splitting** $E = E_1 \oplus E_2$ をもつ. 注) E_2 は null geodesic flow とは限らない.
- (Y, D) の $Z = NL(Y)$ 上の **null Legendre n-path str.** とは,
 $E \supset E_2$ に対して, Z 上の $\text{rk } n$ の分布 E_1 s.t. $\pi_{Y*}(E_{1|z}) = L$ ($z = L \in Z$) を与えること.
 そのとき, **splitting** $E = E_1 \oplus E_2$ をもつ.

※ パス幾何

M 上の **パス幾何(構造)** とは.

M 上の 次のような曲線(パスと称)の集合 P :

$\forall m \in M, \forall l \in P(T_m M)$ に対して, 接する P のパスがただ 1 本.

- * 同値関係で, 不変量や分類
- * どんな条件で, パスが測地線となる射影構造があるか
- * P にどんな幾何構造

