Levi-平坦境界と Levi-葉層について

三松　佳彦

(中大・理工)

2017 年 1 月 18 日

Report on a j.w.in progress w/
堀内智広 (中大・理工), 小川竜 (東海大・理), 足立真訓 (東理大・理工)

Levi-平坦実超曲面、Levi 葉層

W : n-次元複素多様体,　$M^{2n-1} \subset W$: 実超曲面

$\xi = \xi_M = TM \cap J(TM)$: Levi 超平面場

- ξ が余次元 1 葉層 $\mathcal{F}$ を定めるとき
  M : Levi-平坦実超曲面,　$\mathcal{F}$: Levi 葉層
- $\Omega \subset W$, $M = \partial\Omega$ が "狭義" 正の接触構造を定めるとき
  Ω [*resp.* $M = \partial\Omega$] を強擬凸 (Grauert) 領域 [*resp.* 境界]

. . . .

Stein 多様体 Ω の境界に Levi-平坦実超曲面が現れることもある；

- 幾つかの典型例　:　凸性の強そうなもの、弱そうなもの
  - 強擬凸境界よりも強い擬凸性を持つと期待できる (場合がある) のではないか？
  - Reeb 成分はどのように現れ得るか？

Levi-平坦実超曲面

- 複素トーラス内（$\cong T^{2n}$）の実トーラス（$\cong T^{2n-1}$） (Grauert ?)
- Hopf 曲面（多様体）内の Reeb 成分二つからなる実超曲面

予想

$\mathbb{CP}^2$ 上の複素正則な複素 1 次元葉層構造の極小集合は特異点に限る、つまり各葉の閉包に特異点が含まれる

予想

$\mathbb{CP}^2$ は閉じた Levi-平坦実超曲面を含まない。

定理（Brunella, 他）

複素３次元以上では、閉 Kähler 多様体内には閉じた Levi-平坦実超曲面が存在しない。Brunell

そもそも次元が上がると Levi-平坦実超曲面は存在しにくくなる？

典型例-1：測地型代数的 Anosov 葉層

$\boldsymbol{\Sigma_g = \Gamma \setminus \mathbb{H}^2}$：双曲曲面 $(\boldsymbol{g \geq 2})$,

$\quad \boldsymbol{\Gamma \subset PSL(2;\mathbb{R}) \subset PSL(2;\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{CP}^1}$

$\boldsymbol{\Omega = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2/\Gamma \quad \subset \quad W = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1/\Gamma}$ (対角作用)

$\boldsymbol{\Delta = \Delta/\Gamma}$, $\boldsymbol{M = \partial\Omega = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{RP}^1/\Gamma}$

$\boldsymbol{\phi([(x,y)]) = d_{\mathbb{H}^2}(x,y)^2}$：$\boldsymbol{\Omega \setminus \Delta}$ 上 spsh

. . . .

- $\boldsymbol{\Omega}$ は $\boldsymbol{\Delta}$ の所為で Stein ではないが、Grauert 領域
- $\boldsymbol{M}$ は Levi-平坦実超曲面、Levi 葉層はこの世で最も大切な葉層
  i.e., 測地型代数的 Anosov 流の弱安定葉層

. . . .

- 第 1 成分と第 2 成分への作用をずらしてもよい
  $\rightsquigarrow$ $\boldsymbol{\Delta}$ が消えて Stein になる

. . . .

- $\boldsymbol{\overline{\Omega} = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{L}^2/\Gamma}$ は Stein

典型例-2：懸垂型代数的 Anosov 葉層

W = Hirzebruch-井上曲面 = Hilbert modular 曲面を二つ貼り合わせて、二つ残ったエンドをコンパクト化すると尖点特異点が二つでるので、それを (minimal) blow up したもの。

i.e.,

$\Omega' = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2/\Gamma'$： Hilbert modular 曲面

$\Gamma' \subset PSL(2;\mathbb{R}) \times PSL(2;\mathbb{R})$:可解離散部分群、

$W' = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{C}/\Gamma'$, W = Hirzebruch-井上曲面 = W' の二つのエンドをそれぞれ 1 点コンパクト化して現れる尖点特異点を (minimal) blow up したもの。

$M = \partial\Omega = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}/\Gamma'$：Levi-平坦実超曲面、

Levi 葉層は懸垂型 Anosov 葉層 (T^2 の双曲的自己同型の懸垂)

. . . .

- blowing up locus の所為で Ω は Stein ではないが Grauert 領域

典型例-3 Hopf 曲面

$$\Psi = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{R}, \quad 0 < |\lambda|, \mu < 1$$

$\Psi(\tilde{M}) = \tilde{M}$, $\tilde{M} = \{\mathrm{Im} z_2 = 0\}$

$W = \left(\mathbb{C}^2 \setminus 0\right) / \Psi^{\mathbb{Z}} \cong S^3 \times S^1$: Hopf 曲面

$\Omega_{\pm} = (\mathbb{C} \times \{z_2 ; \mathrm{Im} z_2 \gtrless 0\} \setminus 0) / \Psi^{\mathbb{Z}} \cong B^3 \times S^1$: Stein

$M = \partial\Omega_{\pm} = \left(\mathbb{C}^{\times}\mathbb{R} \setminus 0\right) / \Psi^{\mathbb{Z}} \cong S^{2n-2} \times S^1$: Levi-平坦

. . . .

$M_{\pm} = \{[(z_1, z_2)] \in M ; z_2 \gtreqqless 0\} \cong B^2 \times S^1$: 二つの Reeb 成分,

$\mathcal{F}_{\pm} = \{\mathbb{C} \times \{t\}\} / \Psi^{\mathbb{Z}}$: $M_{\pm}$ 上の Reeb 葉層,

境界葉 $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) / \lambda^{\mathbb{Z}} \cong S^1 \times S^1$ は Hopf 曲線

$\quad = \text{modulus } (\log \lambda)/2\pi i$ の楕円曲線

典型例-3' Hopf 多様体（高次元化）

$\Psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$: contracting diffeo.,

$$\Psi(0) = 0,\ \Psi(\tilde{M}) = \tilde{M},\ \tilde{M} = \{\mathrm{Im} z_n = 0\}$$

e.g.,

$\Psi = \psi \oplus \mu_{\mathbb{C}}, \quad \psi : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}^{n-1}$: contracting diffeo., $\quad 0 < \mu < 1$

. . . .

$W = (\mathbb{C}^n \setminus 0)/\Psi^{\mathbb{Z}} \cong S^{2n-1} \times S^1$: Hopf 多様体

$\Omega_{\pm} = \left(\mathbb{C}^{n-1} \times \{z_n\,;\ \mathrm{Im} z_n \gtrless 0\} \setminus 0\right)/\Psi^{\mathbb{Z}} \cong B^{2n-1} \times S^1$: Stein

$M = \partial\Omega_{\pm} = \left(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \setminus 0\right)/\Psi^{\mathbb{Z}} \cong S^{2n-2} \times S^1$: Levi-平坦

. . . .

$M_{\pm} = \{[(Z_1, \ldots, z_n)] \in M\,;\ z_n \gtreqless 0\} \cong B^{2n-2} \times S^1$: 二つの Reeb 成分, $\mathcal{F}_{\pm} = \{\mathbb{C}^{n-1} \times \{t\}\}/\Psi^{\mathbb{Z}}$: $M_{\pm}$ 上の Reeb 葉層,

境界葉 $\left(\mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0\}\right)/\psi^{\mathbb{Z}} \cong S^{2n-3} \times S^1$ は (1 次元低い) Hopf 多様体

Reeb 成分に関する一般化

$$\boldsymbol{\Psi} : \tilde{\boldsymbol{R}} = \mathbb{C} \times [\mathbf{0}, \infty) \setminus \{\mathbf{0}\} \to \tilde{\boldsymbol{R}},$$

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{\lambda z}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \qquad (\mathbf{0} < |\boldsymbol{\lambda}| < \mathbf{1}),$$

$\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{Diff}^{\infty}[\mathbf{0}, \infty)$: contracting diffeo., $\quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{0})$

. . . .

$\boldsymbol{R} = \tilde{\boldsymbol{R}}/\boldsymbol{\Psi}^{\mathbb{Z}}$: Reeb 成分

- $\boldsymbol{\varphi}$ が境界葉に沿う holonomy に他ならない。

. . . .

- $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\mu x}$ なら前出の例と同じ
- $\boldsymbol{j}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{j}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{id}_{[\mathbf{0},\infty)}(\mathbf{0})$, $\exists \boldsymbol{k} \geq \mathbf{2}$, $\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}) \neq \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{id}_{[\mathbf{0},\infty)}(\mathbf{0})$ の場合
- $\boldsymbol{j}^{\infty}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{j}^{\infty}\boldsymbol{id}_{[\mathbf{0},\infty)}(\mathbf{0})$ (つまり $\boldsymbol{\varphi}$ が flat to identity) の場合

典型例-4 Nemirovski

L : Riemann 面 Σ 上の正則複素直線束、$L^* = L \setminus$ 0-切断

σ : 有理型切断、零点、極は総て単純と仮定, $S = \{$ 零点、極 $\}$

$r > 1$, $m = m_r : L^* \to L^*$ r-倍写像

$\tilde{M} = L^*$ 内での $\mathbb{R}_{>0}\sigma$ の閉包 $= \mathbb{R}_{>0}(\sigma \cap L^*) \cup \cup_S \mathbb{C}^*$

$M = \tilde{M}/m^{\mathbb{Z}} \subset W = L^*/m^{\mathbb{Z}}$: Levi-平坦

Levi 葉層 $= \{c(\sigma \cap L^*); c > 0\}/r^{\mathbb{Z}} \cup \cup_S \mathbb{C}^*/r^{\mathbb{Z}}$

. . . .

- 楕円曲線 $\mathbb{C}^*/r^{\mathbb{Z}}$ が零点と極に対応してコンパクト葉として現れる。
- 零点（若しくは 極）のみ 2 点以上ならば taut でない。
- Hopf 構成 $\lambda = \mu$ はこれに含まれる。
- Stein の境界になる。

強い凸性への期待（予想）

予想：究極の Stein 多様体？

$X = \overline{\Omega}$, $\Omega \subset W = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{C}P^1/\Gamma$ は次の意味で究極の Stein 多様体、Stein 空間であろう。

(I) X を真部分集合として含む連結複素多様体 Z と Z 上の定値でない正則関数 $f : Z \to \mathbb{C}$ の組 (Z, f) は存在しない。

(II) X を開真部分集合として含む Stein 多様体、Stein 空間は存在しない。

(II') $\varphi : X \to \mathbb{R}$: 下に有界、定数でない spsh $\Rightarrow$ φ : proper

(III) X には Fatou-Bieberbach 現象は起こらない。

Hilbert modular surfaces

- Ω : Hilbert modular 曲面 $\Omega' = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2/\Gamma'$ のコンパクト化

についても上と同様であろう。

ここから先　：　足立講演に期待

コンパクト化

コンパクト化（Levi-平坦境界）に関する予想

$\boldsymbol{\Omega} = \mathbb{H}^{\mathbf{2}} \times \mathbb{H}^{\mathbf{2}}/\boldsymbol{\Gamma} \subset \boldsymbol{W} = \mathbb{H}^{\mathbf{2}} \times \mathbb{C}\boldsymbol{P}^{\mathbf{1}}/\boldsymbol{\Gamma}$ とすると
$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\partial\Omega}$ の Levi 葉層は測地型代数的 Anosov 流の弱安定葉層

. . . .

$\boldsymbol{\Omega} = \mathbb{H}^{\mathbf{2}} \times \mathbb{H}^{\mathbf{2}}/\boldsymbol{\Gamma} \subset \boldsymbol{W} = \mathbb{C}\boldsymbol{P}^{\mathbf{1}} \times \mathbb{H}^{\mathbf{2}}/\boldsymbol{\Gamma}$ とすると
$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\partial\Omega}$ の Levi 葉層は測地型代数的 Anosov 流の弱不安定葉層

. . . .

この二つのコンパクト化に集合論的な対応はない

予想

$\boldsymbol{\Omega}$, $\overline{\boldsymbol{\Omega}}$ の滑らかなコンパクト化は其々上に挙げた 2 つのものだけである。

. . . .

Hilbert modular surface に関しても同様であろう。

強い凸性の期待（弱い結果）

$\boldsymbol{\Omega} = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2/\boldsymbol{\Gamma}$, $\overline{\boldsymbol{\Omega}} \subset \boldsymbol{W} = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{C}\boldsymbol{P}^1/\boldsymbol{\Gamma}$ とする。

定理

$\forall \boldsymbol{\Omega}^*$ s.t. $\boldsymbol{\Omega} \subsetneqq \boldsymbol{\Omega}^* \subset \boldsymbol{W}$, $\mathcal{O}\omega^* = \{$ 定数函数 $\} = \mathbb{C}$.
即ち、そのような $\boldsymbol{\Omega}^*$ の $\boldsymbol{W}$ 正則内での凸包は $\boldsymbol{W}$ 全体になってしまう。

$\because$ 測地流の Anosov 葉層は minimal である。

. . . .

Hilbert modular surface に関しても同様である。

. . . .

註：このような結果は、入れ物の $\boldsymbol{W}$ を指定しているので、極めて弱い (本質的に一歩も踏み出していない)。

Reeb 成分の自己同型

３次元葉向複素 Reeb 成分 $\boldsymbol{R}$ （の中でも Hopf 構成によって得られるもの）に関して、以下の結果を得た。

$\boldsymbol{AutR}$ により、葉層を保つ微分同相で、各葉間では正則なもののなす $\boldsymbol{R}$ の自己同型群を表す。

Case 1 : $\varphi(x) = \mu x \ (\mu > 1)$

Case 2 : $j^1\varphi(0) = j^1 id_{[0,\infty)}(0)$, $\exists k \geq 2$, $j^k\varphi(0) \neq j^k id_{[0,\infty)}(0)$

Case 3 : $j^\infty\varphi(0) = j^\infty id_{[0,\infty)}(0)$ (つまり φ が flat to identity)

定理 : $\boldsymbol{AutR}$

Case 1 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{AutR}$: 実 $\mathbf{3}$- or $\mathbf{5}$-次元可解 Lie 群

Case 2 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{AutR}$: 実 $\mathbf{3}$ 次元可解 Lie 群をもう一回無限次元 abel 群で拡大したようなもの

Case 3 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{AutR}$: 実 $\mathbf{3}$ 次元可解 Lie 群をもう一回拡大したようなもの

自己同型群の計算が示唆すること

Barrett

Case 3 は Levi 葉層としては実現されない

予想

Case 2 も Levi 葉層としては実現されない

高次元の場合も含め、「上田理論の精密化」に期待したい。

. . . .

小川講演に期待