確率論シンポジウム

Probability Symposium

ＲＩＭＳ 研 究 集 会

2012. 12. 18 ～ 12. 21

研 究 代 表 者
南　就将
MINAMI, Nariyuki

京 都 大 学 数 理 解 析 研 究 所
Research Institute for Mathematical Sciences
Kyoto University, Kyoto, Japan

目　　次

Finite Time Extinction of Historical Superprocess Related to Stable Measure

安定測度に関連するヒストリカル超過程の有限時間消滅性

I. DÔKU (Saitama University)　　道工　勇（埼玉大学教育学部）

1. Superprocess with Branching Rate Functional

We introduce the superprocess with branching rate functional, which forms a general class of measure-valued branching Markov processes with diffusion as a underlying spatial motion. We write as $\langle \mu, f \rangle = \int f d\mu$. For simplicity, $M_F = M_F(\mathbb{R}^d)$ is the space of finite measures on $\mathbb{R}^d$. Define a second order elliptic differential operator $L = \frac{1}{2}\nabla \cdot a\nabla + b \cdot \nabla$, and $a = (a_{ij})$ is positive definite and we assume that $a_{ij}, b_i \in C^{1,\varepsilon} = C^{1,\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$. Here $C^{1,\varepsilon}$ indicates the totality of all Hölder continuous functions with index ε $(0 < \varepsilon \leqslant 1)$, allowing their first order derivatives to be locally Hölder continuous. $\{\xi, \Pi_{s,a}\}$ indicates a corresponding L-diffusion. Moreover CAF stands for continuous additive functional. Let $\mathbb{K}^q$ (with $q > 0$) denote the Dynkin class of locally admissible CAF's with index q [10]. When we write C_b as the set of bounded continuous functions on $\mathbb{R}^d$, then C_b^+ is the set of positive members in C_b. The process $\{X, \mathbb{P}_{s,\mu}\}$ is said to be a *superprocess with branching rate functional* K or simply (L, K, μ)*-superprocess* [10]([1],[8]) if X is a continous M_F-valued time-inhomogeneous Markov process with Laplace functional $\mathbb{P}_{s,\mu} e^{-\langle X_t, \varphi \rangle} = e^{-\langle \mu, v(s,t) \rangle}$ for $0 \leqslant s \leqslant t$, $\mu \in M_F$ and $\varphi \in C_b^+$. Here v is uniquely determined by the log-Laplace equation

$$\Pi_{s,a}\varphi(\xi_t) = v(s,a) + \Pi_{s,a}\int_s^t v^2(r, \xi_r) K(dr), \qquad 0 \leqslant s \leqslant t, \quad a \in \mathbb{R}^d. \qquad (1)$$

2. Associated Historical Superprocess

The historical superprocess was initially studied by Dynkin (1991) [9] (cf. Dawson-Perkins (1991) [4]). $\mathbb{C}$ denotes the space of continuous paths on $\mathbb{R}^d$ with topology of uniform convergence. To each $w \in \mathbb{C}$ and $t > 0$, we write $w^t \in \mathbb{C}$ as the stopped path of w. We denote by $\mathbb{C}^t$ the totality of all these paths stopped at t. To every $w \in \mathbb{C}$ we associate the corresponding stopped path trajectory $\tilde{w}$ defined by $\tilde{w}_t = w^t$ $(t \geq 0)$. The image of L-diffusion w under the map : $w \mapsto \tilde{w}$ is called the *L-diffusion path process*. Moreover, we define $\mathbb{C}_R^\times = \{(s, w) : s \in \mathbb{R}_+, w \in \mathbb{C}^s\}$ and we denote by $M(\mathbb{C}_R^\times)$ the set of measures η on $\mathbb{C}_R^\times$ which are finite, if restricted to a finite time interval. Let K be a positive CAF of ξ. $\{\tilde{X}, \tilde{\mathbb{P}}_{s,\mu}\}$ is said to be a Dynkin's *historical superprocess* if $\tilde{X}$ is a time-inhomogeneous Markov process with state $\tilde{X}_t \in M_F(\mathbb{C}^t)$, $t \geq s$, with Laplace functional $\tilde{\mathbb{P}}_{s,\mu} e^{-\langle \tilde{X}_t, \varphi \rangle} = e^{-\langle \mu, v(s,t) \rangle}$

for $0 \leqslant s \leqslant t$, $\mu \in M_F(\mathbb{C}^s)$ and $\varphi \in C_b^+(\mathbb{C})$, where v is uniquely determined by the log-Laplace equation

$$\tilde{\Pi}_{s,w_s}\varphi(\tilde{\xi}_t) = v(s, w_s) + \tilde{\Pi}_{s,w_s}\int_s^t v^2(r, \tilde{\xi}_r)\tilde{K}(dr), \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \quad w_s \in \mathbb{C}^s. \tag{2}$$

We call this $\tilde{X}$ an associted historical superprocess in Dynkin's sense [9],[5].

3. Superprocess Related to Random Measure

Suppose that $p > d$, and let $\phi_p(x)$ be the reference function. C denotes the space of continuous functions on $\mathbb{R}^d$, and define $C_p = \{f \in C : |f| \leqslant C_f \cdot \phi_p, \exists C_f > 0\}$. We denote by M_p the set of non-negative measures μ on $\mathbb{R}^d$, satisfying $\langle \mu, \phi_p \rangle < \infty$. It is called the space of p-tempered measures. We define the continuous additive functional K_η of ξ by $K_\eta = \langle \eta, \delta_x(\xi_r)\rangle dr$ for $\eta \in M_p$. Then $X^\eta = \{X_t^\eta; t \geq 0\}$ is said to be a measure-valued diffusion with branching rate functional K_η if for $\mu \in M_F$, X satisfies the Laplace functional $\mathbb{P}_{s,\mu}^\eta e^{-\langle X_t^\eta, \varphi\rangle} = e^{-\langle \mu, v(s)\rangle}$ for $\varphi \in C_b^+$, where the function v is uniquely determined by

$$\Pi_{s,a}\varphi(\xi_t) = v(s,a) + \Pi_{s,a}\int_s^t v^2(r, \xi_r)K_\eta(dr), \quad (0 < s \leqslant t, a \in \mathbb{R}^d). \tag{3}$$

Assume that $d = 1$ and $0 < \nu < 1$. Let $\lambda \equiv \lambda(dx)$ be the Lebesgue measure on $\mathbb{R}$, and let $(\gamma, \mathbb{P})$ be the stable random measure on $\mathbb{R}$ with Laplace functional

$$\mathbb{P}e^{-\langle \gamma, \varphi \rangle} = \exp\left\{-\int \varphi^\nu(x)\lambda(dx)\right\}, \quad \varphi \in C_b^+. \tag{4}$$

Let $p > \nu^{-1}$ in what follows. We consider a positive CAF $K_{\gamma(\omega)}$ of ξ for $\mathbb{P}$-a.a. ω. So that, thanks to Dynkin's general formalism [10], there exists an (L, K_γ, μ)-superprocess X^γ when we adopt a p-tempered measure γ for K_η instead of η, as far as K_γ may lie in $\mathbb{K}^q$ $(\exists q > 0)$.

4. Historical Superprocess Related to Random Measure

As for the historical superprocess associated with the superprocess X^γ related to random measure, we can prove the following.

THEOREM 1. *Let K_γ be a positive CAF of ξ lying in the Dynkin class $\mathbb{K}^q$. Then there exists a historical superprocess $\tilde{\mathbb{X}}^\gamma = \{\tilde{X}^\gamma, \tilde{\mathbb{P}}_{s,\mu}^\gamma,\ s \geq 0,\ \mu \in M_F(\mathbb{C}^s)\}$ in the Dynkin sense. In fact, $\tilde{\mathbb{X}}^\gamma$ is a time-inhomogeneous Markov process with state $\tilde{X}_t^\gamma \in M_F(\mathbb{C}^t)$, $t \geq s$, with Laplace functional $\tilde{\mathbb{P}}_{s,\mu}^\gamma \exp\{-\langle \tilde{X}_t^\gamma, \varphi\rangle\} = e^{-\langle \mu, v(s,t)\rangle}$ for $0 \leqslant s \leqslant t$, $\mu \in M_F(\mathbb{C}^s)$ and $\varphi \in C_b^+(\mathbb{C})$, where v is uniquely determined by the log-Laplace equation*

$$\tilde{\Pi}_{s,w_s}\varphi(\tilde{\xi}_t) = v(s, w_s) + \tilde{\Pi}_{s,w_s}\int_s^t v^2(r, \tilde{\xi}_r)\tilde{K}_\gamma(\omega; dr), \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \quad w_s \in \mathbb{C}^s. \tag{5}$$

THEOREM 2. *Suppose that* $p > 1/\nu$ and $d = 1$. *Let* $\mu \in M_F$ *with compact support. Then the historical superprocess* $\tilde{X}^\gamma$ *with branching rate functional* $\tilde{K}_\gamma$ *dies out for finite time with pwobability one. That is to say,*

$$\mathbb{P} - \text{a.a.} \quad \gamma, \quad \tilde{\mathbb{P}}^{\gamma}_{0,\mu}(\tilde{X}^\gamma_t = 0, \quad \exists t > 0) = 1. \tag{6}$$

EXAMPLE. For $d = 1, a = 1$ and $b = 0$, X^γ is a stable catalytic SBM. This was initially constructed and investigated by Dawson-Fleischmann-Mueller (2000) [2].

As a matter of fact, the above result yields from the following:

PROPOSITION 3. *For a fixed sample* $\gamma(\omega)$

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\mathbb{P}}^{\gamma}_{0,\mu}(\tilde{X}^\gamma_t \neq 0 \quad \text{and} \quad \text{supp}(\tilde{X}^\gamma_t) \subseteq \mathbb{C}_K) = 0. \tag{10}$$

References

[1] Dawson, D.A.: *Measure-valued Markov processes.* LN Math. 1541 (1993, Springer), 1-260.

[2] Dawson, D.A., Fleischmann, K. and Mueller, C.: Finite time extinction of superprocesses with catalysts. Ann. Probab. 28 (2000), 603–642.

[3] Dawson, D.A., Li, Y. and Mueller, C.: The support of measure-valued branching processes in a random environment. Ann. Probab. 23 (1995), 1692–1718.

[4] Dawson, D.A. and Perkins, E.A.: *Historical Processes.* Mem. Amer. Math. Soc. 93, Providence, 1991.

[5] Dôku, I.: Weighted additive functionals and a class of measure-valued Markov processes with singular branching rate. Far East J. Theo. Stat. 9 (2003), 1–80.

[6] Dôku, I.: A limit theorem of superprocesses with non-vanishing deterministic immigration. Sci. Math. Jpn. 64 (2006), 563–579.

[7] Dôku, I.: Limit theorems for rescaled immigration superprocesses. RIMS Kôkyûroku Bessatsu B6 (2008), 55–69.

[8] Dôku, I.: A limit theorem of homogeneous superprocesses with spatially dependent parameters. Far East J. Math. Sci. 38 (2010), 1–38.

[9] Dynkin, E.B.: Path processes and historical superprocesses. Probab. Theory Relat. Fields 90 (1991), 1–36.

[10] Dynkin, E.B.: *An Introduction to Branching Measure-Valued Processes.* AMS, Providence, 1994.

[11] Iscoe, I.: A weighted occupation time for a class of measure-valued branching processes. Probab. Theory Relat. Fields 71 (1986), 85–116.

[12] Roelly-Coppoletta, S.: A criterion of convergence of measure-valued processes: application to measure branching processes. Stochastics 17 (1986), 43–65.

The expected volume of Wiener sausage for Brownian bridge joining the origin to a point outside a parabolic region

K. UCHIYAMA (Tokyo Institute of Technology)

1. NOTATION.

$$\nu = \frac{d}{2} - 1 \quad (d = 1, 2, \ldots); \qquad \tau_a^{\mathbf{x}} = \inf\{t > 0 : |B_t^{\mathbf{x}}| \leq a\} \quad (a > 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d)^1;$$

$$q^d(x, t; a) = \frac{d}{dt} P[\tau_a^{\mathbf{x}} \leq t] \quad (x = |\mathbf{x}| > a). \qquad p_t^{(d)}(x) = (2\pi t)^{-d/2} e^{-x^2/2t}.$$

$$\Lambda_\nu(y) = \frac{(2\pi)^{\nu+1}}{2y^\nu K_\nu(y)} \quad (y > 0)^2; \quad \Lambda_\nu(0) = \lim_{y \downarrow 0} \Lambda_\nu(y).$$

2. DENSITY OF HITTING DISTRIBUTION.

Theorem 1 *Let $\delta > 0$. Then, uniformly for $x > a + \delta$, as $t \to \infty$,*

$$q^{(d)}(x, t; a) = a^{2\nu} \Lambda_\nu\Big(\frac{ax}{t}\Big) p_t^{(d)}(x) \Big[1 - \Big(\frac{a}{x}\Big)^{2\nu}\Big] \Big(1 + o(1)\Big) \qquad (d \geq 3) \qquad (1)$$

and

$$q^{(d)}(x, t; a) = \Lambda_0\Big(\frac{ax}{t}\Big) p_t^{(2)}(x) \frac{2\lg(x/a)}{\lg(t \vee x^2)} \Big(1 + o(1)\Big) \qquad (d = 2). \qquad (2)$$

REMARK 1. A weaker version of the result above is given in [1] : the upper and lower bounds by some constants are obtained instead of the exact factor $(1 + o(1))$. For each $x > a$ fixed the result also is given in [2] but with some coefficient being not explicit. (2) restricted to the parabolic region $x < \sqrt{t}$ is a consequence of the results in [4](c). For the random walks the results corresponding to (1) and (2) (rather finer) but restricted within the parabolic region are given in [4](b).

Theorem 2 *For each $d = 1, 2, \ldots$, uniformly for $x > a$, as $t \downarrow 0$*

$$q^{(d)}(x, t; a) = \frac{x - a}{\sqrt{2\pi}\, t^{3/2}} \exp\Big(-\frac{(x-a)^2}{2t}\Big) \Big(\frac{a}{x}\Big)^{(d-1)/2} \Big(1 + O(t/a^2)\Big).$$

REMARK 2 (Scaling property). $\quad q(x, t; a) = a^{-2} q(x/a, t/a^2; 1)$.

3. VOLUME OF SAUSAGE.

Let $S_t^{(a)}$ be the region swept by the ball of radius $a > 0$ attached to $B_s^{\mathbf{0}}$ at its center as s runs from 0 to t:

$$S_t^{(a)} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d : |B_s^{\mathbf{0}} - \mathbf{x}| \leq a \ \text{ for some } \ s \in [0, t]\}.$$

Theorem 3 *If $d \geq 3$,*

$$E[\mathrm{Vol}_d(S_t^{(a)}) \,|\, B_t^{\mathbf{0}} = \mathbf{x}] = a^{d-2} t \Lambda_\nu(0)(1 + o(1)) \qquad \text{as } \ t \to \infty, \ \ x/t \to 0.$$

This asymptotic formula if restricted to the region $|\mathbf{x}| > \sqrt{t}$ holds also for $d = 2$.

---

[1] $B_t^{\mathbf{x}}$ is a d-dimensional standard Brownian motion started at $\mathbf{x}$.
[2] K_ν is the modified Bessel function of second kind of order ν.

Theorem 4 ([4](d)) *Let $d = 2$. For each $M > 1$, uniformly for $|\mathbf{x}| \le M\sqrt{t}$, as $t \to \infty$*

$$E[\mathrm{Vol}_2(S_t^{(a)}) \,|\, B_t^{\mathbf{0}} = \mathbf{x}] = 2\pi t N(\kappa t/a^2) + \frac{\pi x^2}{(\lg t)^2}\left[\lg\left(\frac{t}{x^2 \vee 1}\right) + O(1)\right] + O(1),$$

where $N(\lambda), \lambda \ge 0$ is given and admits the following asymptotic expansion

$$N(\lambda) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda u}}{(\lg u)^2 + \pi^2}\frac{du}{u} = \frac{1}{\lg \lambda} - \frac{\gamma}{(\lg \lambda)^2} + \cdots \qquad (as\ \ \lambda \to \infty).[3]$$

4. Range of Pinned Random Walk.

Let $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ be a random walk irreducible on $\mathbf{Z}^2$ and of mean zero. For $\lambda \in \mathbf{R}^2$, put $\phi(\lambda) = \lg E[e^{\lambda \cdot X_1}]$ and for $\mu \in \mathbf{R}^2$ let $c(\mu)$ be the value of λ determined by

$$\nabla\phi(\lambda)\Big|_{\lambda = c(\mu)} = \mu : \tag{3}$$

$c(\mu)$ is well defined if μ is an interior point of the image set $\nabla\phi(\Xi)$ of $\Xi = \{\lambda : E[\,|X_1|e^{\lambda\cdot X_1}] < \infty\}$. Let Q be the covariance matrix of X_1 and $f_0(n)$ the probability that the walk returns to the origin for the first time at the n-th step ($n \ge 1$). Put

$$H(\mu) = \sum_{k=1}^\infty f_0(k)\Big(1 - e^{-k\phi(c(\mu))}\Big), \qquad Z_n = \sharp\{S_1, S_2, \dots, S_n\}.$$

Theorem 5 *Suppose that $\phi(\lambda) < \infty$ in a neighborhood of the origin and let K be a compact set contained in the interior of Ξ. Then,*

$$H(\mu) = \frac{2\pi|Q|^{1/2}}{-\lg[\frac{1}{8}\mu\cdot Q^{-1}\mu]} + O\bigg(\frac{1}{(\lg|\mu|)^2}\bigg) \qquad as \quad |\mu| \to 0$$

and, uniformly for $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2$ satisfying $\mathbf{x}/n \in K$ and $|\mathbf{x}| \ge \sqrt{n}$, [4]

$$E_0\Big[Z_n \,\Big|\, S_n = \mathbf{x}\Big] = nH(\mathbf{x}/n) + O\bigg(\frac{n}{(\lg n) \vee (\lg|\mathbf{x}/n|)^2}\bigg) \qquad as \quad n \to \infty. \tag{4}$$

References

[1] T. Byczkowski, J. Malecki and M. Ryznar, Hitting times of Bessel processes, to appear in Potential Anal.

[2] Y. Hamana and H. Matumoto, The probability dinsities of the first hitting times of Bessel processes, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[3] I. McGillivray, Large time volume of the pinned Wiener sausage, J. Funct. Anal., **170** (2000) 107-140.

[4] K. Uchiyama, (a) The mean number of sites visited by a random walk, Math. Zeit. **261** (2009), 277-295./ (b) The first hitting time of a single point for random walks, Elect. J. Probab. **16**, no. 71, 1160-2000 (2011)./ (c) Asymptotic estimates of the distribution of Brownian hitting time of a disc, J. Theor. Probab., **25** ; Erratum, J. Theor. Probab. **25**, issue 3, 910-911 (2012)./ (d) The expected area of Wiener sausage swept by a disk. Stoch. Proc. Appl. **123** 191-211 (2013).

[3] $\gamma = -\int_0^\infty e^{-u}\lg u du$ (Euler's constant). N is called Ramanujan's function by some authors.

[4] A result for the case $|\mathbf{x}| < \sqrt{n}$ is given in [4](a).

ON SPECTRAL BOUNDS FOR SYMMETRIC MARKOV CHAINS WITH COARSE RICCI CURVATURES

KAZUHIRO KUWAE
(KUMAMOTO UNIVERSITY)

1. Coarse Ricci curvature

Throughout this talk, let (E, d) be a Polish space with complete distance d and $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Denote by $\mathcal{P}^p(E)$, the family of probability measures on (E, d) with finite p-th moment. We consider a conservative Markov chain $\mathbf{X}= (\Omega, X_k, \theta_k, \mathcal{F}_k, \mathcal{F}_\infty, \boldsymbol{P}_x)_{x\in E}$ with state space (E, d). Then the transition kernel $P(x, dy)$ (or $P_x(dy)$ in short) of $\mathbf{X}$ defined by $P(x, dy) := \boldsymbol{P}_x(X_1 \in dy)$, $x \in E$ satisfies

(P1) for each $x \in E$, $\mathcal{B}(E) \ni A \mapsto P(x, A)$ is a probability measure on $(E, \mathcal{B}(E))$.

(P2) for each $A \in \mathcal{B}(E)$, $E \ni x \mapsto P(x, A)$ is $\mathcal{B}(E)$-measurable.

Conversely, for $P(x, dy)$ satisfying (P1) and (P2), we can construct a conservative Markov chain $\mathbf{X}$ such that $P(x, dy) = \boldsymbol{P}_x(X_1 \in dy)$, $x \in E$. We set $Pf(x) := \int_X f(y)P(x, dy) = \boldsymbol{E}_x[f(X_1)]$ for any non-negative or bounded $\mathcal{B}(E)$-measurable function f on E. For $n \in \mathbb{N}$, if we set $P^n f(x) := P(P^{n-1}f)(x)$ inductively, then $P^n f(x) = \boldsymbol{E}_x[f(X_n)]$ and $P^n(x, A) := (P^n \mathbf{1}_A)(x) = \boldsymbol{P}_x(X_n \in A)$. For any non-negative measure ν on $(E, \mathcal{B}(E))$ and $n \in \mathbb{N}$, we define a measure νP^n by $\nu P^n(A) := \langle \nu, P^n \mathbf{1}_A\rangle := \int_E P^n(x, A)\nu(dx) = \boldsymbol{P}_\nu(X_n \in A)$, $A \in \mathcal{B}(E)$. Note that $\delta_x P^n = P^n_x$, $x \in E$.

We further assume the following condition to $\mathbf{X}$:

(P3) for each $x \in E$, $P_x \in \mathcal{P}^1(E)$.

For $\mu, \nu \in \mathcal{P}^1(E)$, the L^1-Wasserstein/Kantorovich-Rubinstein distance $d_{W_1}(\mu, \nu)$ is defined by

$$d_{W_1}(\mu, \nu) := \inf\left\{ \int_{E\times E} d(x, y)\pi(dxdy) \;\middle|\; \pi \in \Pi(\mu, \nu)\right\},$$

where $\Pi(\mu, \nu) := \{\pi \in \mathcal{P}(E \times E) \mid \pi(A \times E) = \mu(A), \pi(E \times B) = \nu(B) \text{ for any } A, B \in \mathcal{B}(E)\}$.

Definition 1.1 (Coarse Ricci Curvature, Ollivier(09))**.** For a pair of distinct points $x, y \in E$, the *n-step coarse Ricci curvature* $\kappa_n(x, y)$ of $\mathbf{X}$ along (xy) is defined to be

$$\kappa_n(x, y) := 1 - \frac{d_{W_1}(P^n_x, P^n_y)}{d(x, y)}, \quad (x, y) \in E \times E \setminus \mathsf{diag}$$

Date: December 18.

and $\kappa_n := \inf\{\kappa_n(x,y) \mid (x,y) \in E \times E \setminus \mathsf{diag}\} \in [-\infty, 1]$ is said to be the *lower bound of the n-step coarse Ricci curvature*. When $n = 1$, we write $\kappa(x,y)$ (resp. κ) instead of $\kappa_1(x,y)$ (resp. κ_1).

Definition 1.2 (Vertical Geodesics)**.** Let (Y, d_Y) be a 2-uniformly convex space. Take a geodesic η with a point p_0 on it and another geodesic γ through p_0. We say that γ *is vertical to η at p_0* (write $\gamma \perp_{p_0} \eta$ in short) if for any $x \in \gamma$ and $y \in \eta$, $d_Y(x, p_0) \le d_Y(x, y)$ holds.

(B) Let γ and η be unit-speed minimal geodesic segments such that γ intersects η at p_0. Then $\gamma \perp_{p_0} \eta$ imlies $\eta \perp_{p_0} \gamma$.

Definition 1.3 (Convex Geometry, see Kendall(90))**.** Let (Y, d_Y) be a geodesic space. For a $q \ge 1$, (Y, d_Y) is said to satisfy *convex geometry with index q* ($\mathbf{(CG)_q}$ in short) if there exists a symmetric convex function Φ on $Y \times Y$ with $C > 0$ such that

$$C^{-1} d_Y^q(x,y) \le \Phi(x,y) \le C d_Y^q(x,y) \tag{1.1}$$

and $\mathrm{diam}(Y) < \infty$ if $q > 1$.

Definition 1.4 (Variance)**.** Fix $p \ge 1$, $\mu \in \mathcal{P}(E)$, a metric space (Y, d_Y), a non-negative symmetric function Φ on $E \times E$ vanishing on the diagonal and $u \in L^p(E, Y; \mu)$. The *p-variance* $\mathrm{Var}_\mu^{\Phi^p}(u)$ of u is defined by

$$\mathrm{Var}_\mu^{\Phi^p}(u) := \inf_{y \in Y} \int_E \Phi^p(u(x), y)\mu(dx) (\le \infty).$$

The *quasi p-variance* $\overline{\mathrm{Var}}_\mu^{\Phi^p}(u)$ is defined by

$$\overline{\mathrm{Var}}_\mu^{\Phi^p}(u) := \frac{1}{2}\int_E \int_E \Phi^p(u(y), u(x))\mu(dx)\mu(dy) (\le \infty).$$

We easily see $\mathrm{Var}_\mu^{\Phi^p}(u) \le 2\overline{\mathrm{Var}}_\mu^{\Phi^p}(u)$. When we consider the case $\Phi = d_Y$, we simply write $\mathrm{Var}_\mu^p(u)$ (resp. $\overline{\mathrm{Var}}_\mu^p(u)$) instead of $\mathrm{Var}_\mu^{\Phi^p}(u)$ (resp. $\overline{\mathrm{Var}}_\mu^{\Phi^p}(u)$). When $p = 2$ with $\Phi = d_Y$, we write $\mathrm{Var}_\mu(u) := \mathrm{Var}_\mu^2(u)$ and $\overline{\mathrm{Var}}_\mu(u) := \overline{\mathrm{Var}}_\mu^2(u)$, and call them simply *variance*, *quasi variance*, respectively.

Definition 1.5 (Energy of Maps)**.** Take $m \in \mathcal{P}(E)$ and let $\mathbf{X}$ be an m-symmetric Markov chain and (Y, d_Y) is a metric space. For $u \in L^2(E, Y; m)$,

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_E \int_E d_Y^2(u(y), u(x))P(x, dy)m(dx)$$

is said to be *energy* of u with respect to $\mathbf{X}$.

2. Main results

In this section, we fix $p \geq 1$ and assume $m \in \mathcal{P}(E)$ and $\mathrm{supp}[m] = E$.

Theorem 2.1 (Non-linear Spectral Radius of P on $L^p(E, Y; m)/\{\mathrm{const}\}$)**.** *Let* $\mathbf{X}$ *be an* m*-symmetric Markov chain on* (E, d)*. Assume* $m \in \mathcal{P}^p(E)$ *and* $\kappa \in \mathbb{R}$*. Let* (Y, d_Y) *be a complete separable* 2*-uniformly convex space satisfying* **(B)** *and* $\mathbf{(CG)_q}$ *for some* $q \geq 1$*. Then, we have*

$$\varlimsup_{\ell\to\infty}\left(\sup_{u\in L^p(E,Y;m)}\frac{\mathrm{Var}_m^{\Phi^p}(P^\ell u)}{\mathrm{Var}_m^{\Phi^p}(u)}\right)^{\frac{1}{p\ell}} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}}(1-\kappa_n)^{\frac{1}{n}}\wedge 1, \tag{2.1}$$

$$\varlimsup_{\ell\to\infty}\left(\sup_{u\in L^p(E,Y;m)}\frac{\overline{\mathrm{Var}}_m^{\Phi^p}(P^\ell u)}{\overline{\mathrm{Var}}_m^{\Phi^p}(u)}\right)^{\frac{1}{p\ell}} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}}(1-\kappa_n)^{\frac{1}{n}}\wedge 1. \tag{2.2}$$

Theorem 2.2 (Poincaré Inequality for L^2-functions)**.** *Let* $\mathbf{X}$ *be an* m*-symmetric Markov chain on* (E, d) *and* H *a real separable Hilbert space. Assume* $m \in \mathcal{P}^2(E)$ *and* $\kappa \in \mathbb{R}$*. Then, for* $f \in L^2(E, H; m)$

$$1-\inf_{n\in\mathbb{N}}(1-\kappa_n)^{\frac{1}{n}}\wedge 1 \leq \frac{\mathcal{E}(f)}{\mathrm{Var}_m(f)} \leq 1+\inf_{n\in\mathbb{N}}(1-\kappa_n)^{\frac{1}{n}}\wedge 1. \tag{2.3}$$

Theorem 2.3 (Strong L^p-Liouville Property)**.** *Let* $\mathbf{X}$ *be an* m*-symmetric Markov chain on* (E, d)*. Suppose that there exists* $n \in \mathbb{N}$ *such that* $\kappa_n > 0$*. Assume* $m \in \mathcal{P}^p(E)$ *and* $\kappa \in \mathbb{R}$*. Let* (Y, d_Y) *be a complete separable* 2*-uniformly convex space satisfying* **(B)** *and* $\mathbf{(CG)_q}$ *for some* $q \geq 1$*. Suppose that* $u \in L^p(E, Y; m)$ *satisfies* $Pu = u$ m*-a.e. on* E*. Then* u *is a constant map* m*-a.e.*

Theorem 2.4 (Poincaré Inequality for L^2-maps)**.** *Let* $\mathbf{X}$ *be an* m*-symmetric Markov chain on* (E, d)*. Suppose that there exists* $n \in \mathbb{N}$ *such that* $\kappa_n > 0$*. Assume* $m \in \mathcal{P}^2(E)$ *and* $\kappa \in \mathbb{R}$*. Let* (Y, d_Y) *be a complete separable* 2*-uniformly convex space satisfying* **(B)** *and* $\mathbf{(CG)_q}$ *for some* $q \in [1, 2]$*. Then for* $\varepsilon \in]0, 1-(1-\kappa_n)^{\frac{1}{qn}}[$*, there exists* $\ell_0 \in \mathbb{N}$ *depending on* $\varepsilon, \kappa_n, (E, d, m, \mathbf{X})$ *and* (Y, d_Y) *such that*

$$(1-(1-\kappa_n)^{\frac{1}{qn}}-\varepsilon)^2\mathrm{Var}_m(u) \leq 8C^{4/q}\ell_0^2 E(u) \quad u \in L^2(E, Y; m)$$

holds, where C *is the constant appeared in* $\mathbf{(CG)_q}$*. In particular, if* (Y, d_Y) *is a complete separable* $CAT(0)$*-space, then*

$$\inf_{u\in L^2(E,Y;m)}\frac{E(u)}{\mathrm{Var}_m(u)} \geq \frac{(1-(1-\kappa_n)^{\frac{1}{n}}\wedge 1-\varepsilon)^2}{8\ell_0^2} > 0.$$

References

[1] E. Kokubo and K. Kuwae, *On spectral bounds for symmetric Markov processes with coarse Ricci curvatures*, preprint, 2012.

[2] Y. Ollivier, *Ricci curvature of Markov chains on metric spaces*, J. Func. Anal. **256** (2009), no. 3, 810–864.

Large deviation principle of Freidlin-Wentzell type for pinned diffusion measures

Yuzuru Inahama (Nagoya University)

Summary: T. Lyons がラフパス理論を開発して以来、ラフパス空間上の確率解析でもっとも成功したのはおそらく Ledoux, Qian, and Zhang [5] によるブラウニアン・ラフパスに対する Schilder 型大偏差原理ではなかろうか。Lyons の連続性定理により、伊藤写像はこの世界では連続になるので、これより直ちに拡散過程に対する Freidlin-Wentzell 型大偏差原理が示せる。この考え方を延長して、ピンド拡散過程に対する Freidlin-Wentzell 型大偏差原理が示せないか、というのが本講演のテーマである。Besov 型ノルムを入れたラフパス空間の上で、quasi-sure 解析を実行することにより、悪くない楕円型条件のもとでこれを証明する。(プレプリントは Arxiv Math に投稿済み [3])

For the canonical realization of d-dimensional Brownian motion $(w_t)_{0\le t\le 1}$ and the vector fields $V_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ $(1 \le i \le d)$ with sufficient regularity, let us consider the following Stratonovich-type stochastic differential equation (SDE):

$$dy_t = \sum_{i=1}^{d} V_i(y_t) \circ dw_t^i \qquad \text{with} \quad y_0 = a \in \mathbf{R}^n.$$

For simplicity of explanation, no drift term is added, but modification is easy. The correspondence $w \mapsto y$ is called the Itô map and denoted by $y = \Phi(w)$. It is well-known that the Itô map is not continuous as a map from the Wiener space. Moreover, it is not continuous with respect to any Banach norm on the Wiener space which preserves the structure of the Wiener space.

Now, introduce a small positive parameter $\varepsilon \in (0, 1]$ and consider

$$dy_t^\varepsilon = \sum_{i=1}^{d} V_i(y_t^\varepsilon) \circ \varepsilon dw_t^i \qquad \text{with} \quad y_0^\varepsilon = a \in \mathbf{R}^n.$$

Formally, $y^\varepsilon = \Phi(\varepsilon w)$. The process $(y_t^\varepsilon)_{0\le t\le 1}$ takes its values in $\mathbf{R}^n$ and its law is a diffusion measure associated with the starting point a and the generator $\mathcal{L}^\varepsilon = (\varepsilon^2/2)\sum_{i=1}^d V_i^2$.

A classic result of Freidlin and Wentzell states the laws of $(y_t^\varepsilon)_{0\le t\le 1}$ satisfies a large deviation principle as $\varepsilon \searrow 0$. The proof was not so easy. If Φ were continuous, we could use contraction principle and the proof would be immediate from Schilder's large deviation principle for the laws of $(\varepsilon w)_{0\le t\le 1}$. However, it cannot be made continuous in the framework of the usual stochastic analysis.

Ten years ago, Ledoux, Qian, and Zhang (2002) gave a new proof by means of rough path theory. Roughly speaking, a rough path is a couple of a path itself and its iterated integrals. Lyons established a theory of line integrals along rough paths and ordinary differential equation (ODE) driven by rough paths. The Itô map in the rough path sense is deterministic and is sometimes called the Lyons-Itô map. The most important result in the rough path theory could be Lyons's continuity theorem (also known as the universal limit theorem), which states that the Lyons-Itô map is continuous in the rough path setting. Brownian motion (w_t) admits a natural lift to a random rough path W, which is called Brownian rough path. If we put W or εW into the Lyons-Itô map, then we obtain the solution of Storatonovich SDE (y_t) or (y_t^ε), respectively. Ledoux, Qian, and Zhang proved that the laws of εW satisfy a large deviation principle of Schilder type with respect to the topology of the rough path space. Large deviation principle of Freidlin-Wentzell type for the laws of (y_t^ε) is immediate from this, since the contraction principle can be used in this framework. Since then many works on large deviation principle on rough path space have been published.

There arises a natural question; can one obtain a similar result for pinned diffusion processes with this method, too? More precisely, does the family of measures $\{\mathbb{Q}_{a,a'}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfy a large deviation principle as $\varepsilon \searrow 0$? Here, $\mathbb{Q}_{a,a'}^\varepsilon$ is the pinned diffusion measure associated with $\mathcal{L}^\varepsilon$, which starts at a at time $t = 0$ and ends at a' at time $t = 1$. Heuristically, $\mathbb{Q}_{a,a'}^\varepsilon$ is the law of y_1^ε under the conditional probability measure $\mathbb{P}(\,\cdot\,|y_1^\varepsilon = a')$, where $\mathbb{P}$ stands for the Wiener measure.

The aim of this talk is to answer this question affirmatively under a certain mild ellipticity assumption for the coefficient vector fields. Besides rough path theory, our main tool is quasi-sure analysis, which is a sub-field of Malliavin calculus. It deals with objects such as Watanabe distributions (i.e., generalized Wiener functionals) and capacities associated with Gaussian Sobolev spaces. Recall that motivation for developing this theory was to analyse (the pullbacks of) pinned diffusion measures on the Wiener space.

Takanobu and Watanabe presented this kind of large deviation principle under a hypoellipticity assumption for coefficient vector fields (Theorem 2.1, [6]). This result seems very general and nice, but they gave no proof. Their tool are Malliavin calculus, and in particular, quasi-sure analysis. Recall that rough path theory did not exist, then. Presumably, they computed Besov norm of the solution of SDE, but details are unknown.

Since we use rough path theory, we will compute, not the output, but the input of the (Lyons-)Itô map. Here, the input means (w_t) itself and its iterated Storatonovich stochastic integrals. Hence, we believe that our proof via rough paths is probably simpler. Extending our method to the hypoelliptic case is an interesting and important future task.

Now we give a precise setting and state our main result. Let $(w_t)_{0\le t\le 1}$ be the canonical realization of d-dimensional Brownian motion. We consider the following $\mathbf{R}^n$-valued Stratonovich-type SDE;

$$dy^\varepsilon_t = \sum_{i=1}^{d} V_i(y^\varepsilon_t)\circ \varepsilon dw^i_t + V_0(\varepsilon, y^\varepsilon_t)dt \qquad \text{with} \quad y^\varepsilon_0 = a \in \mathbf{R}^n. \tag{1}$$

Here, $\varepsilon \in [0,1]$ is a small parameter and $V_i \in C^\infty_b(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ for $1 \le i \le d$ and $V_0 \in C^\infty_b([0,1]\times\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. (A function is said to be of class C^∞_b if it is a bounded, smooth function with bounded derivatives of all order.) For each ε, (y^ε_t) is a diffusion process with its generator

$$\mathcal{L}^\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i=1}^{d} V_i^2 + V_0(\varepsilon, \,\cdot\,).$$

We assume everywhere ellipticity:

(H1): For all $a \in \mathbf{R}^n$, the set of vectors $\{V_1(a), \ldots, V_d(a)\}$ linearly spans $\mathbf{R}^n$.

Under this assumption, the heat kernel $p^\varepsilon_t(a, a')$ exists and positive for all $a, a' \in \mathbf{R}^n$, $t > 0$ and $\varepsilon > 0$. Hence, the pinned diffusion measure $\mathbb{Q}^\varepsilon_{a,a'}$ associated with $\mathcal{L}^\varepsilon$ exists for any $\varepsilon > 0$, starting point a and terminal point a'. This measure sits on

$$C^{\alpha-H}_{a,a'}([0,1], \mathbf{R}^n) = \{x \in C([0,1], \mathbf{R}^n) \mid x_0 = a,\ x_1 = a', \text{ and } x \text{ is } \alpha\text{-Hölder continous }\}$$

for any $\alpha \in (1/3, 1/2)$. Heuristically, $\mathbb{Q}^\varepsilon_{a,a'}$ is the law of y^ε_1 under the conditional probability measure $\mathbb{P}(\,\cdot\,|y^\varepsilon_1 = a')$, where $\mathbb{P}$ stands for the Wiener measure. (This argument can be made rigorous with quasi-sure analysis, however.)

Let $\mathcal{H}$ be Cameron-Martin space for (w_t). For $h \in \mathcal{H}$, we denote by $\phi^0 = \phi^0(h)$ be a unique solution of the following ODE;

$$d\phi^0_t = \sum_{i=1}^{d} V_i(\phi^0_t)dh^i_t + V_0(0, \phi^0_t)dt \qquad \text{with} \quad \phi^0_0 = a. \tag{2}$$

We set $\mathcal{K}^{a,a'} = \{h \in \mathcal{H} \mid \phi^0(h)_1 = a'\}$, which is not empty under **(H1)**.

Define a good rate function $J : C^{\alpha-H}_{a,a'}([0,1], \mathbf{R}^n) \to [0,\infty]$ by

$$J(y) = \inf\{\frac{\|h\|^2_{\mathcal{H}}}{2} \mid h \in \mathcal{K}^{a,a'} \text{ with } y = \phi^0(h)\} - \min\{\frac{\|h\|^2_{\mathcal{H}}}{2} \mid h \in \mathcal{K}^{a,a'}\}$$

if $y = \phi^0(h)$ for some $h \in \mathcal{K}^{a,a'}$ and define $J(y) = \infty$ if no such $h \in \mathcal{K}^{a,a'}$ exists.

Now we state our main result in this paper.

Theorem 1 *Let $1/3 < \alpha < 1/2$ and assume* **(H1)**. *The family $\{\mathbb{Q}^{\varepsilon}_{a,a'}\}_{\varepsilon>0}$ of probability measures on $C^{\alpha-H}_{a,a'}([0,1],\mathbf{R}^d)$ satisfies a large deviation principle as $\varepsilon \searrow 0$ with a good rate function J, that is, for any Borel subset $A \subset C^{\alpha-H}_{a,a'}([0,1],\mathbf{R}^n)$,*

$$-\inf_{y\in A^\circ} J(y) \le \liminf_{\varepsilon\searrow 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{Q}^{\varepsilon}_{a,a'}(A) \le \limsup_{\varepsilon\searrow 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{Q}^{\varepsilon}_{a,a'}(A) \le -\inf_{y\in \bar{A}} J(y).$$

Roughly speaking, our argument goes in the following way. (1) Brownian motion (w_t) admits a lift, not only almost surely, but aslo quasi-surely. See [1, 2, 4, 7].

(2) Let $\delta_{a'}(y^{\varepsilon}_1) = \delta_{a'}(y^{\varepsilon}(1,a))$ be the positive Watanabe distribution. By Sugita's theorem, it is actually a finite Borel measure on the Wiener space. We can think of its push-forward measure $\mu^{\varepsilon}_{a,a'}$ of $\delta_{a'}(y^{\varepsilon}_1)$ by the lift map. Notice that the pushforward measure of $\mu^{\varepsilon}_{a,a'}$ by the Lyons-Itô map is the pinned diffusion measure in question.

(3) We prove large deviation for $\{\mu^{\varepsilon}_{a,a'}\}$ as $\varepsilon \searrow 0$ on the geometric rough path space. (In fact, we need to assume ellipticity only at the starting point a.) Three key facts in this part are as follows; (i) large deviation estimate for capacities, not for measures, on geometric rough path space, (ii) integration by parts formula in the sense of Malliavin calculus for Watanabe distributions, (iii) uniform non-degeneracy of Malliavin covariance matrix for solutions of the shifted SDE.

References

[1] S. Aida, JFA (2011).

[2] Y. Inahama, IDAQP (2007).

[3] Y. Inahama, ArXiv Math; 1203.5177

[4] Y. Higuchi, Master thesis, Osaka U., (2006).

[5] M. Ledoux, Z. Qian, and T. Zhang, SPA (2002)

[6] S. Takanobu, S. Watanabe, (1993)

[7] S. Watanabe, Proc. Abel Sympo. (2007).

Stochastic Hamiltonian equation With Uniform Motion Area

梁松　（筑波大学）

$\gamma > 0$ をパラメータとしてもつ以下の確率微分方程式を考える。

$$\begin{cases} dQ_t^\lambda = \frac{P_t^\lambda}{\sqrt{1+|P_t^\lambda|^2}}dt \\ dP_t^\lambda = \sigma(Q_t^\lambda)dB_t - \gamma\frac{P_t^\lambda}{\sqrt{1+|P_t^\lambda|^2}}dt - \lambda\nabla U(Q_t^\lambda)dt, \\ (Q_0^\lambda, P_0^\lambda) = (q_0, p_0). \end{cases} \tag{1}$$

但し、$\sigma \in C^\infty(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^{d\times d})$ は有界で、${}^t\sigma\sigma$ は一様楕円型であるとする。ここで、$Q_t^\lambda, P_t^\lambda \in \mathbf{R}^d$ はそれぞれ粒子の位置と運動量を表す。粒子の速度は $V_t^\lambda = \frac{P_t^\lambda}{\sqrt{1+|P_t^\lambda|^2}}$ で与えられる、即ち、我々は粒子の動きに相対効果があるモデルを考えている。

(1) はハミルトニアンが $H(q,p) = \sqrt{1+p^2} + \lambda U(q)$ で与えれらる系に減衰とランダム性を加えたモデルと考えることができる。

問題： $\lambda \to \infty$ の時、粒子はどういう挙動を示すか。

ポテンシャル $U \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$ は次の条件を満たすとする：

1. U は球対称である。即ち、ある実数値関数 h が存在し、$U(x) = h(|x|)$.
2. 定数 $r_2 > r_1 > 0$ が存在し、次が成り立つ：$U(x) = 0$ if $|x| \geq r_2$, $U(x) > 0$ if $|x| < r_1$, and $U(x) < 0$ if $|x| \in (r_1, r_2)$.
3. 定数 $\varepsilon_0 \in (0, r_1/2 \wedge (r_2 - r_1)/2)$ と関数 $k \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$ が存在し、$\|k\|_\infty \leq 1$ かつ $x \in A \Rightarrow |h'(|x|)| = h'(|x|)k(x)$. ここで、$A := \{x \in \mathbf{R}^d \big| ||x| - r_1| \leq \varepsilon_0 \text{ or } |x| \geq r_2 - \varepsilon_0\}$.
4. $h'(r_1) < 0$ であり、$\lim_{a\to r_2-0} \frac{h'(a)}{h(a)} = -\infty$.

また、$U(q_0) = 0$ とする。

$C([0,\infty); \mathbf{R}^d)$ と Cadlag な関数全体 $D([0,\infty); \mathbf{R}^d)$ 上の距離をそれぞれ

$$dis_1(q_1, q_2) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\Big(1 \wedge \Big(\max_{t\in[0,n]} |q_1(t) - q_2(t)|\Big)\Big),$$
$$dis_2(v_1, v_2) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\Big(1 \wedge \Big(\int_0^n |v_1(t) - v_2(t)|^n dt\Big)^{1/n}\Big)$$

とする。

補題 1 $\{(Q_t^\lambda, V_t^\lambda)$ の分布$; \lambda \geq 1\}$ は $(C([0,\infty);\mathbf{R}^d) \times D([0,\infty);\mathbf{R}^d), dis_1 \times dis_2)$ 上の分布族としてタイトである。

補題 1 より、特に、$\lambda \to \infty$ の時 $(Q_t^\lambda, V_t^\lambda)$ の分布 が収束することが期待できる。実際に、後述のように確かに収束する。しかし、その極限 μ_∞ をどう記述すればよいか？

問題点を説明するために、まず μ_∞ がどういう性質を満たすかを考えよう。U が $|Q_t| < r_1$ では正な値を取り、$|Q_t| \in (r_1, r_2)$ では負な値を取るので、以下が成り立つことが容易に分かる：(1) $|Q_t| \geq r_1$, μ_∞-almost surely, (2) $|Q_t| \in (r_1, r_2)$ では $|V_t| = 1$. 一方、$Q_t > r_2$ の範囲では、$U = 0$ なので (1) は λ に依存しない、よって、極限においても (位置、運動量) は同じ確率微分方程式（即ち、(1) で $\lambda = 0$ として得られるもの）を満たす（よって、$|V_t|$ は 1 より真に小さい値を取る）であろう。即ち、μ_∞ は二つの phase を持つ：$|Q_t| > r_2$ では粒子は拡散過程に従って動き、$|Q_t| \in (r_1, r_2)$ では粒子は等速運動をする。問題は、粒子が等速運動 phase から境界 $|Q_t| = r_2$ に到着したときどういう挙動を取るか？折り返し等速運動 phase に留まるか、拡散過程 phase に突入するか？また、拡散過程 phase に入るならどういう初期速度になるか？極限過程 μ_∞ を記述するには、これらの問題に答えなければならない。

この問題の解決法として、「粒子の総エネルギー」H_t 及び「位置に垂直な運動量」R_t という二つの確率過程を導入する。

$$\begin{aligned} H_t^\lambda &:= \sqrt{1 + |P_t^\lambda|^2} + \lambda U(Q_t^\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1 - |V_t^\lambda|^2}} + \lambda U(Q_t^\lambda), \\ R_t^\lambda &:= \pi_{Q_t^\lambda}^\perp P_t^\lambda. \end{aligned}$$

定理 2 $\{(Q_t^\lambda, V_t^\lambda, H_t^\lambda, R_t^\lambda)$ の分布$; \lambda \geq 1\}$ は $(C([0,\infty);\mathbf{R}^d) \times D([0,\infty);\mathbf{R}^d) \times C([0,\infty);\mathbf{R}^d) \times C([0,\infty);\mathbf{R}^d), dis_1 \times dis_2 \times dis_1 \times dis_1)$ 上の分布族としてあるジャンプを持つ拡散過程 $\overline{\mu_\infty}$ に収束する。

$\overline{\mu_\infty}$ の具体的な記述は [1] に書いてある。

参考文献

[1] S. Liang, *Stochastic Hamiltonian equation With Uniform Motion Area,* Preprint.

Markov chain approximations to symmetric Markov processes on ultrametric spaces

Kohei Suzuki
Kyoto University *

A metric space (E, ρ) is called *an ultrametric space* if a metric ρ satisfies the strong triangle inequality:

$$\rho(x, z) \leq \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}.$$

Many properties of stochastic processes on ultrametric spaces have been studied by Evans-Aldous, Albeverio-Karwowski, Yasuda, Kaneko, Kigami and Bendikov-Grigor'yan-Pittet et al.

In this talk, we consider the following Markov chain approximation problem on ultrametric spaces:

(Q) Given a symmetric jump Markov process X on an ultrametric space E, under what conditions can we approximate X by a sequence of continuous-time Markov chains X^k on a discrete ultrametric space E^k?

The setting of (Q) is the following: Intuitively, ultrametirc space E can be thought as the end points of a non-homogeneous branching tree, and a discrete ultrametric space E^k can be thought as the end points of the cut tree in the k-th level. Approximation means weak convergence in $\mathbb{D}_E[0, T]$, the cádlág space on a finite time interval equipped with Skorokhod topology. X is a Hunt processes on E associated with the following jump Dirichlet form:

$$\mathscr{E}(u, v) = \frac{1}{2} \int_{E \times E \setminus d} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) J(x, y) \mu(dx) \mu(dy),$$
$$\mathscr{F} = \overline{D_0}^{\mathscr{E}_1},$$

*E-mail: kohei0604@math.kyoto-u.ac.jp

where D_0 stands for the functional space of a finite linear combinations of indicator functions of spheres and d denotes the diagonal set.

In **Theorem I**, we obtain quite general sufficient conditions for (Q) under the above setting. Consequently, we can show that many important Markov processes on ultrametric spaces can be obtained by the limit of Markov chains on discrete ultrametric spaces, for example, Albeverio-Karwowski class in [1] (AK class) and conservative Kigami class in [4]. (Both AK class and Kigami class are the class of Markov processes on the end points of a non-homogeneous branching tree, and Kigami class includes AK class.) Moreover, we construct the class not included in Kigami class but obtained by the limit of Markov chains (**Example I**). The remarkable point in Theorem I is that approximating Markov chains X^k can be obtained by the darning process of X to E^k. (Strictly speaking, this is not the darning process because we admit jumps between squeezed points, but the procedure of making these processes is very similar to darning. In this talk, we call these processes *averaged processes.*) Furthermore, in **Theorem II**, we show that, under good conditions, approximating Markov chains X^k can be obtained by the projection of X to E^k. In other words, under good conditions, the darning process coincides with the projected process. Since, in general, Markov property does not preserve under the projection, it is quite a characteristic property of ultrametric spaces.

We briefly mention a history of Markov chain approximations. When X is Brownian motion in $\mathbb{R}^d$, the problem (Q) was answered as well-known theorem, Donsker's invariance theorem. In general, when X is a diffusion on $\mathbb{R}^d$, this problem (Q) was studied in the book of Stroock-Varadhan [5, Chapter 11] and Stroock-Zheng [6]. On the other hand, when X is a symmetric jump process on a metric space, (Q) was studied by Chen-Kim-Kumagai [3]. In these contexts, we study the problem (Q) when X is a symmetric jump process on a ultrametric space and obtain above results. We remark that, when a state space has a group structure such as local fields and X is a semi-stable process, Yasuda had the invariance theorem in [7] and gave the answer to (Q). However, in this talk, we do not assume any group structure on a state space. Hence, the way of approximation is different and the range of application is large.

References

[1] S.Albeverio and W.Karwowski. Jump processes on leaves of multi-branching trees, J. Math. Phys. 49 (2008), 093503, 20pp.

[2] A. Bendikov, A.Grigor'yan and Ch. Pittet, On a class of Markov semigroups on discrete ultra-metric spaces, Potential Analysis 37 (2012) Nr 2 125–169

[3] Z.-Q. Chen, P. Kim and T.Kumagai. Discrete Approximation of Symmetric Jump Processes on Metric Measure Spaces. Probab. Theory Relat. Fields, to appear.

[4] J.Kigami. Transitions on a noncompact Cantor set and random walks on its defining tree. Annales de l'Institut Henri Poincar, to appear.

[5] D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan. Multidimensional Diffusion Processes. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[6] D.W. Stroock and W. Zheng. Markov chain approximations to symmetric diffusions. Ann. Inst. Henri. Poincar e Probab. Statist. 33 (1997), 619–649.

[7] K.Yasuda. Semi-stable processes on local fields. Tohoku Math. J.58 (2006), 419–431.

A variational representation for G-Brownian functionals

大須賀 恵実
東北大学 大学院理学研究科 博士２年
(e-mail: sa9m06@math.tohoku.ac.jp)

S. Peng により導入された G-Brown 運動について考察する.

$d \in \mathbb{N}$ を固定し, $\Omega = C([0,1];\mathbb{R}^d)$ を $[0,1]$ 上の $\mathbb{R}^d$-値連続関数 ω で $\omega_0 = 0$ なるもの全体とする. また, $\mathbb{R}^{d\times d}$ を実 $d \times d$ 行列全体とし, Θ を $\mathbb{R}^{d\times d}$ の与えられた空でない有界閉集合とする. G-Brown 運動は分散に不確定性をもつ Brown 運動であるとみなすことができ, その不確定性は Θ によって特徴づけられる. S. Peng [3, 4] は Wiener と類似の方法によって, Ω の標準過程 B を G-Brown 運動とする空間を構築した. 具体的には以下のようである: $\gamma \in \Theta$ に対し, γ^* を γ の転置行列, $D^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j})_{i,j=1}^d$ を Hessian とする. $[0,1] \times \mathbb{R}^d$ 上の非線形熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sup_{\gamma \in \Theta} \left\{ \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left[\gamma\gamma^* D^2 u \right] \right\} = 0 \tag{1}$$

の粘性解を用いて整合的な有限次元劣線形分布の族を Ω の柱状汎関数からなる族 $\mathcal{H}$ の上に構成し, 非線形 Kolmogolov の定理により $(\Omega, \mathcal{H})$ 上の一意な劣線形期待値 $\mathbb{E}$ を得る. そして $\mathcal{L}_G^1(\Omega)$ をノルム $\mathbb{E}[|\cdot|]$ の下での $\mathcal{H}$ の完備化とし, $\mathbb{E}$ を $\mathcal{L}_G^1(\Omega)$ 上の劣線形期待値へと拡張する. このようにして構成された三組 $(\Omega, \mathcal{L}_G^1(\Omega), \mathbb{E})$ は G-期待値空間と呼ばれ, この下で Ω の標準過程 B は G-Brown 運動となる.

注意 1. 非線形熱方程式 (1) は

$$\sigma_0 := \inf_{\gamma \in \Theta} \inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ |x|=1}} x \cdot \gamma\gamma^* x > 0$$

のとき一意な古典解をもつ.

G-期待値空間 $(\Omega, \mathcal{L}_G^1(\Omega), \mathbb{E})$ における劣線形期待値 $\mathbb{E}$ は G-期待値と呼ばれ, 劣線形性

$$\mathbb{E}[X+Y] \leqslant \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y], \quad X, Y \in \mathcal{L}_G^1(\Omega)$$

をもつ期待値である. 一般に, 劣線形期待値は線形な期待値の上限 (upper expectation) として表されることが知られており, Denis-Hu-Peng [1] により G-期待値に対する具体的な upper expectation 表示が与えられた: P を適当な可測空間上に定義された確率測度とし, $W = \{W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^d)^*; t \geqslant 0\}$ を P の下での標準 Brown 運動とする. また, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ を Brown 運動から生成されるフィルトレーションとする. $[0,1]$ 上の Θ-値 $\{\mathcal{F}_t\}$-発展的可測過程全体を $\mathcal{A}_{0,1}^\Theta$ とおき, $\theta \in \mathcal{A}_{0,1}^\Theta$ に対し, 法則 P_θ を

$$P_\theta(A) = P\left(\int_0^\cdot \theta_s \, dW_s \in A \right), \quad A \in \mathcal{B}(\Omega)$$

と定める. このとき, 任意の $X \in \mathcal{L}_G^1(\Omega)$ に対し

$$\mathbb{E}[X] = \sup_{\theta \in \mathcal{A}_{0,1}^{\Theta}} E_{P_\theta}[X]$$

が成り立つ. この upper expectation 表示に関連し, 容量

$$c(A) := \sup_{\theta \in \mathcal{A}_{0,1}^{\Theta}} P_\theta(A), \quad A \in \mathcal{B}(\Omega)$$

が定義される. $c(N) = 0$ なる集合 $N \in \mathcal{B}(\Omega)$ を極と呼び, ある主張が極の外側で成立するとき, quasi-surely (q.s.) に成立するという.

以下, $\sigma_0 > 0$ と仮定する. このとき次の変分表現が成り立つ.

定理 2. 任意の q.s. に有界な $f \in \mathcal{L}_G^1(\Omega)$ に対し,

$$\log \mathbb{E}\left[e^{f(B)}\right] = \sup_h \mathbb{E}\left[f\left(B + \int_0^\cdot d\langle B\rangle_s\, h_s\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 h_s \cdot (d\langle B\rangle_s\, h_s)\right].$$

ただし, $\langle B\rangle = (\langle B^i, B^j\rangle)_{i,j=1}^d$ は G-Brown 運動の二次変分, $h = (h^1, \ldots, h^d)^*$ は d-次元過程, 各積分は $\langle B\rangle$ に関する積分

$$\int_0^t d\langle B\rangle_s\, h_s := \left(\sum_{i=1}^d \int_0^t h_s^i\, d\langle B^1, B^i\rangle_s, \ldots, \sum_{i=1}^d \int_0^t h_s^i\, d\langle B^d, B^i\rangle_s\right)^*,$$

$$\int_0^t h_s \cdot (d\langle B\rangle_s\, h_s) := \sum_{i,j=1}^d \int_0^t h_s^i h_s^j\, d\langle B^i, B^j\rangle_s$$

を表し, 上限はこれらの積分が well-defined となるクラスの上でとるものとする.

この変分表現のモチベーションの 1 つに, G-Brown 運動に対する大偏差原理がある. G-期待値空間の枠組みにおいては大偏差原理は次のように定式化される: $\mathcal{X}$ をポーランド空間, $\mathcal{F}$ を $\mathcal{X}$ 上の σ-加法族とし, $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ を $\mathcal{X}$-値確率変数の族とする. $I : \mathcal{X} \to [0, \infty]$ を速度関数, すなわち, 各 $M \geqslant 0$ に対し level set $\{x \in \mathcal{X} : I(x) \leqslant M\} \subset \mathcal{X}$ はコンパクトとする. 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対し

$$-\inf_{x \in A^\circ} I(x) \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log c(X^\varepsilon \in A) \leqslant \limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log c(X^\varepsilon \in A) \leqslant -\inf_{x \in \bar{A}} I(x) \quad (2)$$

が成り立つとき, $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は速度関数を I として $\mathcal{X}$ 上で大偏差原理をみたすという. ただし, A° と $\bar{A}$ はそれぞれ A の内部と閉包を表す. 通常の確率解析における場合と同様に, G-期待値空間の枠組みにおいても, 大偏差原理と Laplace 原理は同値であることがいえる. すなわち, $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ が大偏差原理 (2) をみたすための必要十分条件は, 任意の有界連続関数 $\Phi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ に対し

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\Phi(X^\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\right] = \sup_{x \in \mathcal{X}} \{\Phi(x) - I(x)\}$$

が成り立つことである．確率変数の族 $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ が G-Brown 運動の汎関数で表されているとき，Laplace 原理の導出に対して定理 2 を応用することができる．例えば以下の Laplace 原理を導出することができる: $\mathcal{X} = C([0,1];\mathbb{R}^d)$ とする．また，$\mathcal{Y} = C([0,1];\mathbb{R}^{d\times d})$ を $[0,1]$ 上の $\mathbb{R}^{d\times d}$-値連続関数 y で $y(0)=0$ なるもの全体とする．

$$\mathbb{H} := \left\{ x \in \mathcal{X} : x \text{ は絶対連続, かつ } \int_0^1 |\dot{x}(t)|^2\, dt < \infty \right\},$$
$$\mathbb{A} := \{ y \in \mathcal{Y} : y \text{ は絶対連続, かつ a.e. } t \in [0,1] \text{ に対し } \dot{y}(t) \in \{\gamma\gamma^* : \gamma \in \Theta\}\}$$

とおく．ただし $\dot{x}$, $\dot{y}$ は，それぞれ導関数 dx/dt, dy/dt を表す．速度関数 $I : \mathcal{X} \to [0,\infty]$ と $J : \mathcal{X}\times\mathcal{Y} \to [0,\infty]$ を次で定義する．

$$x \in \mathbb{H} \text{ のとき} \qquad I(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \inf_{\gamma\in\Theta} |\gamma^{-1}\dot{x}(t)|^2\, dt,$$
$$(x,y) \in \mathbb{H}\times\mathbb{A} \text{ のとき} \qquad J(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{x}(t)\cdot\big(\dot{y}(t)^{-1}\dot{x}(t)\big)\, dt,$$

それ以外の場合，$I(x) = J(x,y) = +\infty$.

命題 3. $\{\sqrt{\varepsilon}B\}_{\varepsilon>0}$ は，速度関数を I として $\mathcal{X}$ 上で Laplace 原理をみたす．また，$\{(\sqrt{\varepsilon}B, \langle B\rangle)\}_{\varepsilon>0}$ は速度関数を J として $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ 上で Laplace 原理をみたす．

命題 3 を通じて $\{\sqrt{\varepsilon}B\}_{\varepsilon>0}$, $\{(\sqrt{\varepsilon}B, \langle B\rangle)\}_{\varepsilon>0}$ に対する大偏差原理が得られる．これらの族に対する大偏差原理は，オリジナルには Gao-Jiang [2] によって離散近似の手法を用いて与えられた．定理 2 は彼らの結果の別証明を与える．

参考文献

[1] Denis, L., Hu, M., Peng, S.: Function spaces and capacity related to a sublinear expectation: application to G-Brownian motion paths. Potential Anal. 34, 139–161 (2011)

[2] Gao, F., Jiang, H.: Large deviations for stochastic differential equations driven by G-Brownian motion. Stochastic Process. Appl. 120, 2212–2240 (2010)

[3] Peng, S.: G-expectation, G-Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type. Stoch. Anal. Appl., Abel Symp. 2, 541–567, Springer, Berlin (2007)

[4] Peng, S.: Multi-dimensional G-Brownian motion and related stochastic calculus under G-expectation. Stochastic Process. Appl. 118, 2223–2253 (2008)

幾何学的関数論と拡散過程が関連する話題から - 複素葉層構造を中心に -

厚地 淳 (慶應義塾大学)

近年、幾何学的関数論における問題に対して拡散過程を用いる方法が取り入れらてれているが、本講演では、特に、葉層構造に対するアプローチについて概観したい。本講演は以下の 6 つのセクションからなる。

1. holomorphic diffusions 定義と概観
2. foliated manifolds, laminations.
3. harmonic measures and diffusions on foliated manifolds.
4. applications 1 -nonsingular cases-.
5. singular cases.
6. applications 2.

1 では、先ず、複素関数論に適合した拡散過程として知られている 正則拡散過程 (holomorphic diffusion) の定義を見、知られている結果を概観する。本セクションの内容については雑誌『数学』にある金子宏氏の論説 [25] に詳しいので、そちらをご覧になるとよい。

2 では葉層構造を持つ多様体についてその定義と基本事項について述べる。本講演では、特異点を持たない foliated manifold を $(M,\mathcal{L})$ と書くことにする。特異点を持つ場合については 5 において見る。M が ambient space を、$\mathcal{L}$ が葉 (leaf) の全体を表す。特異点を持たないとき、M はコンパクトとする。

3 では Lucy Garnett[19] の導入した harmonic measure と対応する拡散過程ついて述べる。ここで言う harmonic measure とは、関数論に現れる調和関数を表現する測度、所謂調和測度とは異なる。本講演においても両者登場する機会があり誤解を生じるかもしれないが、葉層構造の研究者の間ではすでに確立された用語であるのでそのまま用いることにする。harmonic measure は leafwise Laplacian を生成作用素とする拡散半群の不変測度である。M がコンパクトならば、harmonic measure は常に存在する。Garnett はこの測度を用いて葉層の統計的性質を見ようとした。その後、葉層構造の研究において頻繁に用いられるようになり、特に、E.Ghys は、これを用いて種々の性質を導いている ([21]). leafwise Laplacian とは、各葉に沿って葉に与えられたリーマン計量に対応する Laplacian として作用するものである。これに対応して拡散半群が存在するが、これは各葉上ではリーマン計量に対応するブラウン運動の熱半群と一致する (Candel[3])。このブラウン運動のことを leafwise Brownian motion と呼ぶことにするが、応用上、これに関する M 上でのエルゴード定理が基本的で重要な道具となる。また、leafwise holomorphic diffusion も構成できることも注意する。

4 では、leafwise Brownian motion を用いた幾何学的関数論に関連する研究のいくつかを見る。
Liouville property(Kaimanovich[24], Fenley, Feres and Parwani[12], Feres and Zeghib[13]),
Transversal invariance of harmonic measures(Deroin and Kleptsyn[8], S.Matsumoto[27]),
Unique ergodicity(Deroin and Kleptsyn[8], Fornaes and Sibony[15]),
Ends of leaves (Ghys[21]),
Minimal sets and Levi-flat surfaces(Deroin and Dupont[9]).

ここで言う Liouville property とは、2 通りの意味がある。ひとつは各葉の Liouville 性を議論するものである。すなわち、リーマン面の型問題のように、各葉上で非定数の有界調和関数が存在するかどうかを議論する。Kaimanovich は covering manifolds のときと同様にエントロピーを用いて議論した。他方、各葉上で調和で、M 上では連続な関数を考えることもある。このような関数を continuous leafwise harmonic function と呼ぶことにする。これらが定数以外許容されるかどうかを議論するものもある (Fenley, Feres and Parwani)。これらに関連するものとして、葉の放物性 (leafwise Brownian motion の再帰性) を議論するものもある (Brunella[2], Nishino, Yamaguchi[31])。

5 では特異点つきの葉層構造を考える。複素葉層構造・正則葉層構造を考えるとき、特異点が現れる場合が多い。従って、複素関数論的には特異点つきの葉層構造を考えるのは自然である。我々が考えるのは次のような状況である。N を複素多様体とし、$M \subset N$ が次を満たすとする。$(M,\mathcal{L})$ が

complex foliation で、$\overline{M} = N$. $N \setminus M$ が特異点の集合である。たとえば、$N = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ で、葉層構造が正則ベクトル場によって与えられるときは、このような状況である。現状では、各葉が複素次元1のとき、すなわちリーマン面のときが主に考察されている。この分野は高次元化などこれからの発展が期待されるが、1次元の場合でも種々の未解決問題がある。この場合も前述した non-singular なときと同じような事柄を問題とすることができ、確率論的考察が有効ではないかと考えられる。

6 ではこれまでの簡単な応用として leafwise meromorphic function の値分布に関する筆者の結果を述べたい。leafwise holomorphic diffusion を導入することで話が非常に易しくなることを注意したい。また、種々の問題についても述べたい。

参考文献

[1] Berndtsson, Bo; Sibony, Nessim: The $\overline{\partial}$-equation on a positive current. Invent. Math. 147 (2002), no. 2, 371-428.

[2] Brunella, Marco: Some remarks on parabolic foliations. Geometry and dynamics, 91-102, Contemp. Math., 389, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[3] Candel, Alberto: The harmonic measures of Lucy Garnett. Adv. Math. 176 (2003), no. 2, 187-247.

[4] Candel, A.: Uniformization of surface laminations. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 26 (1993), no. 4, 489-516.

[5] Candel, A.; Conlon, Lawrence: Foliations. I. Graduate Studies in Mathematics, 23. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. xiv+402 pp. ISBN: 0-8218-0809-5

[6] Candel, A.; Conlon, L.: Foliations. II. Graduate Studies in Mathematics, 60. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xiv+545 pp. ISBN: 0-8218-0881-8

[7] Candel, A.; Gomez-Mont, X.: Uniformization of the leaves of a rational vector field. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 45 (1995), no. 4, 1123-1133.

[8] Deroin, B.; Kleptsyn,Victor: Random conformal dynamical systems. Geom. Funct. Anal. 17 (2007), no. 4, 1043-1105.

[9] Deroin,B; Dupont,Christophe: Topology and dynamics of Levi-flats in surfaces of general type. preprint(2012).

[10] Dinh, T.-C.; Nguyen, V.-A.; Sibony, N.: Heat equation and ergodic theorems for Riemann surface laminations. Math. Ann. 354 (2012), no. 1, 331-376.

[11] Dinh, T.-C.; Nguyen, V.-A.; Sibony, N.: Entropy for hyperbolic Riemann surface laminations I,II. arXiv:1105.2307, arXiv:1109.4489.

[12] Fenley, S.; Feres, R.; Parwani, K.: Harmonic functions on R-covered foliations. Ergodic Theory Dynam. Systems 29 (2009), no. 4, 1141-1161.

[13] Feres, R.; Zeghib, A.: Dynamics on the space of harmonic functions and the foliated Liouville problem. Ergodic Theory Dynam. Systems 25 (2005), no. 2, 503-516.

[14] Feres, R.; Zeghib, A.: Leafwise holomorphic functions. Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 6, 1717-1725 (electronic).

[15] Fornæss, John Erik; Sibony, N.: Unique ergodicity of harmonic currents on singular foliations of $\mathbf{P}^2$. Geom. Funct. Anal. 19 (2010), no. 5, 1334-1377.

[16] Fornæss, J. E.; Sibony, N.: Harmonic currents of finite energy and laminations. Geom. Funct. Anal. 15 (2005), no. 5, 962-1003.

[17] Fukushima,M; Okada,M: On conformal martingale diffusions and pluripolar sets, J. Funct. Anal., 55 (1984), 377-388.

[18] Fukushima,M; Okada,M: On Dirichlet forms for plurisubharmonic functions, Acta Math., 159 (1988), 171-214.

[19] Garnett,L: Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion, J. Funct. Anal. 51 (1983) 285-311.

[20] Gaveau,B: Methode du controle optimal en analyse complexe. II. Resolution des equations du Monge-Ampere daps des faiblement pseudo convexes, Bull. Sci. Math., 102 (1978), 101-128.

[21] Ghys,E: Topologie des feuilles generiques, Ann. Math. 141 (1995) 387-422.

[22] Ghys,E; Langevin,R; Walczak,P: Entropie geometrique des feuilletages, Acta Math. 160 (1988) 105-142.

[23] Guedj, Vincent(ed): Complex Monge-Ampere Equations and Geodesics in the Space of Kahler Metrics. Lect. Note. Math. vol.2038, Springer(2012).

[24] Kaimanovich, V. A.: Brownian motion on foliations: entropy, invariant measures, mixing. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 22 (1988), no. 4, 82–83; translation in Funct. Anal. Appl. 22 (1989), no. 4, 326-328.

[25] 金子　宏　多重劣調和関数と複素多様体上の正則拡散過程 数学 41(4),345–375, 1989.

[26] Kaneko,H: A stochastic resolution of a complex Monge-Ampere equation on a negatively curved Kahler manifold, Osaka J. Math., 24(1987), 307-319.

[27] Matsumoto, Shigenori: The dichotomy of harmonic measures of compact hyperbolic laminations. arXiv:1002.0394.

[28] Phong,D.H.; Sturm,Jacob: The Dirichlet problem for degenerate complex Monge-Ampere equations. To appear in Comm. in Analysis and Geometry.

[29] Taniguchi,S: Explosion problem for holomorphic diffusion processes and its applications, Osaka J. Math., 26 (1989),931-951.

[30] Taniguchi,S: Kahler diffusion processes associated with the Bergman metric and domains of holomorphy, Proc. Japan Acad., 64 Ser. A (1988), 184-186.

[31] Yamaguchi, Hiroshi: Parabolicité d'une fonction entiére. J. Math. Kyoto Univ. 16(1976), 71-92.

カオス的な2次写像力学系の
マルチフラクタル解析

鄭　容武　(広島大学)*

閉区間 $X=[-1,1]\subset\mathbb{R}$ 上で2次写像族 $f_a(x)=1-ax^2,\ \ 0<a\leq 2$, を考える. パラメータ a が 2 に十分近いとき, 力学系 $f=f_a\colon X\to X$ は「カオス」的である. 特に, 後述する条件のもとで, f が Lebesgue 測度に対して絶対連続な不変確率測度を持つことが知られている [2, 3, 7]. 本講演では, この写像族によってあたえられる力学系のマルチフラクタル解析について, 高橋博樹氏（京都大学）との共同研究により得られた結果[6] を紹介する.

関数 $\varphi\colon X\to\mathbb{R}$ があたえられたとき, その時間平均によるレベル集合

$$K_\varphi(\alpha)=\left\{x\in X\colon \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_n\varphi(x)=\alpha\right\}$$

の Hausdorff 次元

$$B_\varphi(\alpha)=\dim_H K_\varphi(\alpha)$$

を α の関数と考えて, これを φ に関する Birkhoff スペクトルとよぶ. ここで, $S_n\varphi(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(f^i(x))$ である. 力学系のマルチフラクタル解析の目的は, このようにしてあたえられるスペクトルを, 力学系に付随したほかの量によって特徴づけ, その連続性や微分可能性, 凸性について調べることにある. 一様双曲型力学系のマルチフラクタルについてはすでによく調べられているが [9], 2次写像のように特異点を持つ可微分力学系についてはMisiurewicz 条件を満たす特別な場合 [5] を除いては満足な結果が得られていなかった.

さて, 我々は2次写像力学系 $f=f_a$ に対して, 以下の４つの条件を仮定する:

(A1) a は 2 に十分近い;

(A2) $|(f^n)'(f(0))|\geq e^{\lambda n}\ \forall n\geq 0$;

(A3) $|f^n(0)|\geq e^{-\alpha\sqrt{n}}\ \forall n\geq 1$;

(A4) f は区間 $[f^2(0),f(0)]$ 上で位相混合的.

ここで, $\lambda=\frac{9}{10}\log 2,\ \ \alpha=\frac{1}{100}$ である. 条件 (A1)-(A4) を満たすパラメータ $a\in(0,2]$ の集合のLebesgue 測度は正である [2, 3, 10].

連続関数 $\varphi\colon X\to\mathbb{R}$ に対して

$$c_\varphi=\inf_{x\in X}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_n\varphi(x),\qquad d_\varphi=\sup_{x\in X}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_n\varphi(x)$$

とおく. すると, $c_\varphi=\min\{\mu(\varphi)\colon\mu\in\mathcal{M}_f\}$, $d_\varphi=\max\{\mu(\varphi)\colon\mu\in\mathcal{M}_f\}$ が成り立つ. ここで, $\mathcal{M}_f$ は X 上の f-不変 Borel 確率測度全体から成るコンパクト距離

科学研究費補助金 基盤研究(C) 課題番号 24540212

2010 Mathematics Subject Classification: 37D25, 37E05, 60F10.

キーワード：quadratic maps, nonuniform hyperbolicity, multifractal formalism.

*e-mail: chung@amath.hiroshima-u.ac.jp

空間を表し, $\mu(\varphi) = \int \varphi d\mu$ である. レベル集合による分割

$$X = \left(\bigcup_{\alpha \in [c_\varphi, d_\varphi]} K_\varphi(\alpha) \right) \cup \hat{K}_\varphi,$$

は複雑な位相構造を持つ. ここで, $\hat{K}_\varphi$ は時間平均 $(1/n)S_n\varphi(x)$ が収束しない点 $x \in X$ の集合である. 実際に, 任意の $\alpha \in [c_\varphi, d_\varphi]$ に対し, $K_\varphi(\alpha)$ は X において稠密である. また, $c_\varphi \neq d_\varphi$ ならば, $\hat{K}_\varphi$ も X において稠密であり, その Hausdorff 次元は 1 である [1, 5]. 測度 $\mu \in \mathcal{M}_f$ の (Kolmogorov-Sinai) エントロピーを $h(\mu)$ と表し, Lyapunov 指数を $\lambda(\mu) = \int \log |f'| d\mu$ により定義する. 条件 (A2) より

$$\lambda_{\inf} = \inf\{\lambda(\mu) \colon \mu \in \mathcal{M}_f\} > 0$$

が成り立つ [4, 8]. 我々の結果は次のとおりである.

定理 [6]. *2次写像力学系 $f = f_a : X \to X$ が条件 (A1)-(A4) を満たすとする. このとき, 任意の連続関数 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ と $\alpha \in [c_\varphi, d_\varphi]$ に対して,*

$$B_\varphi(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \left\{ \frac{h(\mu)}{\lambda(\mu)} \colon \mu \in \mathcal{M}_f,\ |\mu(\varphi) - \alpha| < \varepsilon \right\}$$

が成り立つ. さらに, Birkhoff スペクトル $\alpha \mapsto B_\varphi(\alpha)$ は, 区間 $[c_\varphi, d_\varphi]$ において連続かつ上に凸な関数であり, 区間 $[c_\varphi, \mu_f(\varphi)]$ では単調増加し, 区間 $[\mu_f(\varphi), d_\varphi]$ では単調減少する. ここで, μ_f は f の絶対連続不変確率測度を表す.

参考文献

[1] L. Barreira and J. Schmeling. Sets of “non-typical” points have full Hausdorff dimension and full topological entropy. *Israel J. Math.* **116** (2000), 29–70.

[2] M. Benedicks and L. Carleson, On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$. *Ann. of Math.* (2) **122** (1985), 1–25.

[3] M. Benedicks and L. Carleson, The dynamics of the Hénon map. *Ann. of Math.* (2) **133** (1991), 73–169.

[4] H. Bruin and G. Keller, Equilibrium states for S-unimodal maps. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **18** (1998), 765–789.

[5] Y. M. Chung. Birkhoff spectra for one-dimensional maps with some hyperbolicity. *Stochastics and Dynamics* **10** (2010), 53–75.

[6] Y. M. Chung and H. Takahasi, Multifractal formalism for Benedicks-Carleson quadratic maps. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* to appear, arXiv:1112.1827, 25 pages.

[7] M. Jakobson, Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Comm. Math. Phys.* **81** (1981), 39–88.

[8] T. Nowicki and D. Sands, Non-uniform hyperbolicity and universal bounds for S-unimodal maps, *Invent. Math.* **132** (1998), 633–680.

[9] Y. Pesin. *Dimension Theory in Dynamical Systems*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1997.

[10] L.-S. Young, Decay of correlations of certain quadratic maps. *Comm. Math. Phys.* **146** (1992), 123-138.

カオス的な2次写像力学系の大偏差原理

高橋　博樹　(京都大学)*

この講演では、区間 $X=[-1,1]$ 上の2次写像

$$f_a\colon x\in I\mapsto 1-ax^2 \quad a>0\text{ はパラメーター} \tag{1}$$

の反復合成によるカオス的な力学系に対する大偏差原理を扱う。

「カオス」とは、力学系における軌道の「予測困難な」不規則な振る舞いのことを指す。すなわち、初期値が必然的に含むであろう誤差が力学系の時間発展とともに急速に増大し、長時間にわたる予測を困難にすることを指す。現在では「カオス」は非線型な力学系の時間発展に現れる普遍的な現象であることが理解されている。

(1) のような臨界点を持つ区間上の写像の反復合成は、カオスを示す最も基本的な力学系としてさかんに研究され、次のようなカオスの存在定理がJakobsonにより1970年代終わり頃に得られた。

定理. [3] パラメーター a の集合 $A\subset(0,2]$ と $c>0$ が存在して次が成り立つ：

(a) $\lim_{\varepsilon\to+0}(1/\varepsilon)|A\cap[2-\varepsilon,2]|=1.$ ただし $|\cdot|$ はLebesgue測度を表す;

(b) $a\in A$ なら、Lebesgue測度の意味でほとんどすべての $x\in I$ に対して

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|Df_a^n(x)|\geq c. \tag{2}$$

初期値 x を指定すれば未来の任意の時刻 $n>0$ における状態 $f_a^n(x)$ は一意に定まる。この意味で力学系は決定論的である。しかし、初期値を無限の精度で指定することは実際には不可能であり、さらに $a\in A$ なら (2) により初期値の小さな誤差が n が大きくなるとともに指数的に拡大されてしまうため、一般に $f_a^n(x)$ の観測値はきわめてでたらめに見えてしまう。そこで f_a^n $(n=1,2,3,\ldots)$ を確率過程と見なし、その極限定理を通じてカオス的な2次写像力学系の性質を理解することを考える。

カオス的な2次写像力学系が大偏差原理を満たすための十分条件は [1] で初めて与えられた。この結果より、大偏差原理が満たされるようなパラメーター a は少なくとも可算無限個存在することが従う。 我々の主結果 [2] は、このようなパラメーター a がLebesgue測度正で存在することを主張する。

主結果を述べる。$f=f_a$ に対して次を仮定する：

(A1) a は2に十分近い;
(A2) $|Df^n(f0)|\geq e^{\lambda n}$ $\forall n\geq 0$;
(A3) $|f^n0|\geq e^{-\alpha\sqrt{n}}$ $\forall n\geq 1$;
(A4) f は $[f^20,f0]$ 上で位相混合的である.

科学研究費補助金 若手 (B) 課題番号 23740121
* 京都市左京区北白川追分町　京都大学工学部電気電子工学科
e-mail: takahasi.hiroki.7r@kyoto-u.ac.jp

ここで $\lambda = \frac{9}{10}\log 2$, $\alpha = \frac{1}{100}$ である [1]。(A1)-(A4) が成立するようなパラメーター a の集合のLebesgue測度は正であることが知られている。また、(A2) が成立すれば力学系はカオス的になる。

X 上のボレル集合族を $\mathcal{B}$, X 上の規格化 Lebesgue 測度を m とおく。X 上のボレル確率測度全体からなる集合に弱位相を入れて得られる位相空間を $\mathcal{M}$ とおく。確率空間 $(X, \mathcal{B}, m)$ を考え、$n \in \mathbb{N}$ に対して確率変数 $\Delta_n\colon X \to \mathcal{M}$ を

$$\Delta_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)}$$

で定義する。$\delta_{f^i(x)}$ は $f^i(x)$ でのDirac測度である。Δ_n の分布を μ_n とおく。

定理. [2, Theorem B](A1)-(A4) が成立するなら、$\{\mu_n\}_n$ は大偏差原理を満たす。すなわち下半連続な関数 $I\colon \mathcal{M} \to [0,\infty]$ が存在して、任意のボレル集合 $\Gamma \subset \mathcal{M}$ に対して

$$-\inf_{\nu\in\Gamma^o} I(\nu) \le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\mu_n(\Gamma) \le \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu_n(\Gamma) \le -\inf_{\nu\in\overline{\Gamma}} I(\nu).$$

ここで $\overline{\Gamma}$, Γ^o はそれぞれ Γ の閉包と内部を表す。また $\log 0 = -\infty$, そして関数の空集合上での inf は ∞ と約束する。

臨界点 $x = 0$ があるため、cumulant 関数の存在を示して Gärtner-Ellis の定理に持ち込んで証明することは困難である。 そこで [4, 5] の考え方を使い、直接に大偏差原理の評価をする。依然として臨界点が問題になるため、(A1)-(A4) と確率論的な議論を使って角谷-Rokhlin の摩天楼を構成し、そこから性質のよい部分力学系を抜き出してそれを評価に用いる。摩天楼が無限個必要になる点が、[1] と比べて難しい。

参考文献

[1] Chung, Y. M.: Large deviations on Markov towers. Nonlinearity **24**, 1229–1252 (2011)

[2] Chung, Y. M. and Takahasi, H.: Multifractal formalism for Benedicks-Carleson quadratic maps. Ergodic Theory and Dynamical Systems. to appear

[3] Jakobson, M.: Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. Commun. Math. Phys. **81**, 39–88 (1981)

[4] Takahashi, Y.: Entropy functional (free energy) for dynamical systems and their random perturbations. Stochastic analysis (Katata/Kyoto, 1982), North-Holland Math. Library **32**, North-Holland, Amsterdam 437–467 (1984)

[5] Young, L.-S.: Some large deviation results for dynamical systems. Trans. Amer. Math. Soc. **318**, 525–543 (1990)

[1] $0 < \alpha \ll \lambda < \log 2$ を満たすものなら何でもよい。

Application of the lace expansion to the φ^4 model

Akira Sakai[1]

Department of Mathematics
Hokkaido University

The φ^4 model is a standard model in scaler field theory. It is defined as the Gaussian free field combined with quartic self-interaction. Let $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ and define the Hamiltonian for the spin configuration $\varphi = \{\varphi_x\}_{x\in\Lambda}$ as

$$\mathscr{H}_\Lambda(\varphi) = -\sum_{\{u,v\}\subset\Lambda} \mathscr{J}_{u,v}\varphi_u\varphi_v + \sum_{v\in\Lambda}\left(\frac{\mu}{2}\varphi_v^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi_v^4\right),$$

where $\mu \in \mathbb{R}$ plays the role of the temperature, while the intensity λ of self-interaction is fixed nonnegative. We assume that the spin-spin coupling $\mathscr{J}_{u,v}$ is ferromagnetic (i.e., $\mathscr{J}_{u,v} \geq 0$), translation-invariant (i.e., $\mathscr{J}_{u,v} = \mathscr{J}_{o,v-u}$), $\mathbb{Z}^d$-symmetric and finite-range. For example, the nearest-neighbor coupling $\mathscr{J}_{o,x} = \delta_{|x|,1}$ satisfies all those properties. Let

$$\langle\varphi_o\varphi_x\rangle_\mu = \lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^d} \frac{\int_{\mathbb{R}^\Lambda} \varphi_o\varphi_x\, e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\varphi)}\, \mathrm{d}^\Lambda\varphi}{\int_{\mathbb{R}^\Lambda} e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\varphi)}\, \mathrm{d}^\Lambda\varphi}.$$

It is known to exhibit a phase transition and critical behavior: there is a $\mu_\mathrm{c} = \mu_\mathrm{c}(d, \mathscr{J}, \lambda)$, which is not larger than the critical point $\hat{\mathscr{J}} \equiv \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \mathscr{J}_{o,x}$ for the Gaussian free field, such that $\chi_\mu \equiv \sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\langle\varphi_o\varphi_x\rangle_\mu$ is finite if and only if $\mu > \mu_\mathrm{c}$ and diverges as $\mu \downarrow \mu_\mathrm{c}$ [7]. There were intensive researches in the 1980's when Aizenman [1] and Fröhlich [2] succeeded in showing mean-field behavior (e.g., χ_μ is bounded above and below by a positive multiple of $(\mu - \mu_\mathrm{c})^{-1}$ as $\mu \downarrow \mu_\mathrm{c}$) above 4 dimensions under the assumption of reflection-positivity. The nearest-neighbor model satisfies this assumption. In 4 dimensions, Gawędzki and Kupiainen [4] and Hara and Tasaki [5, 6] succeeded in showing the mean-field behavior (with log corrections) for the weakly coupled nearest-neighbor model using a rigorous renormalization-group method.

The sufficient condition for the mean-field behavior that Aizenman suggested in [1] is the bubble condition

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\langle\varphi_o\varphi_x\rangle_{\mu_\mathrm{c}}^2 < \infty.$$

For reflection-positive models, the Fourier transform of $\langle\varphi_o\varphi_x\rangle_\mu$ is known to obey the Gaussian infrared bound [3]

$$0 \leq \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{ik\cdot x}\langle\varphi_o\varphi_x\rangle_\mu \leq O(|k|^{-2}) \quad \text{uniformly in } \mu > \mu_\mathrm{c},$$

which implies that the bubble condition holds for $d > 4$, hence the mean-field behavior. Although the result is satisfactory, it is often hard to verify the assumption of reflection-positivity.

The goal of my research is to investigate asymptotic behavior of the critical two-point function $\langle\varphi_o\varphi_x\rangle_{\mu_\mathrm{c}}$ above the upper-critical dimension, without the assumption of reflection-positivity. In [9], we prove the following:

[1] `http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~sakai/`

Theorem 1. *Let $\rho = 2(d-4) > 0$ and $0 < \lambda \ll 1$ (depending on d and $\mathscr{J}$). Then there is a $\Phi_\mu(x) = \langle\varphi_o^2\rangle_\mu \delta_{o,x} + O(\lambda)\,(|x| \vee 1)^{-(d+2+\rho)}$, where $O(\lambda)$ is uniform in $\mu \geq \mu_{\rm c}$, such that*

$$\mu_{\rm c} = \hat{\mathscr{J}} - \frac{\lambda}{2}\hat{\Phi}_{\mu_{\rm c}}, \qquad \langle\varphi_o\varphi_x\rangle_{\mu_{\rm c}} \underset{|x|\uparrow\infty}{\sim} \frac{\frac{d}{2}\Gamma(\frac{d-2}{2})\pi^{-d/2}}{\sum_{y\in\mathbb{Z}^d}|y|^2\big(\mathscr{J}_{o,y} - \frac{\lambda}{2}\Phi_{\mu_{\rm c}}(y)\big)}|x|^{2-d}.$$

The key elements for the proof of the above theorem are the following:

1. The Griffiths-Simon construction [10] to approximate the φ^4 model on Λ to some Ising model on $\Lambda \times \{1, 2, \dots, N\}$.
2. The lace expansion for the Ising two-point function [8].
3. Detail estimates on the expansion coefficients in terms of N [9].

These steps yield a linearized version of the Schwinger-Dyson equation, which further yields the aforementioned asymptotic expression for $\langle\varphi_o\varphi_x\rangle_{\mu_{\rm c}}$.

References

[1] M. Aizenman, *Geometric analysis of ϕ^4 fields and Ising models*, Comm. Math. Phys. **86** (1982), 1–48.

[2] J. Fröhlich, *On the triviality of $\lambda\varphi_d^4$ theories and the approach to the critical point in $d \underset{(-)}{\geq} 4$ dimensions*, Nucl. Phys. B **200** [FS4] (1982), 281–296.

[3] J. Fröhlich, B. Simon, T. Spencer, *Infrared bounds, phase transitions and continuous symmetry breaking*, Comm. Math. Phys. **50** (1976), 79–95.

[4] K. Gawędzki and A. Kupiainen, *Massless lattice ϕ_4^4 theory: rigorous control of a renormalizable asymptotically free model*, Comm. Math. Phys. **99** (1985), 197–252.

[5] T. Hara, *A rigorous control of logarithmic corrections in four-dimensional φ^4 spin systems. I. Trajectory of effective Hamiltonians*, J. Stat. Phys. **47** (1987), 57–98.

[6] T. Hara and H. Tasaki, *A rigorous control of logarithmic corrections in four-dimensional φ^4 spin systems. II. Critical behavior of susceptibility and correlation length*, J. Stat. Phys. **47** (1987), 99–121.

[7] J. Lebowitz, *GHS and other inequalities*, Comm. Math. Phys. **35** (1974), 87–92.

[8] A. Sakai, *Lace expansion for the Ising model*, Comm. Math. Phys. **272** (2007), 283–344.

[9] A. Sakai, *Application of the lace expansion to the φ^4 model*, In preparation.

[10] B. Simon and R.B. Griffiths, *The $(\phi^4)_2$ field theory as a classical Ising model*, Comm. Math. Phys. **33** (1973), 145–164.

数学者のゲーム理論と社会学者のゲーム理論
—展開形ゲーム再考—

河 野 敬 雄

email: kono.norio.58x@st.kyoto-u.ac.jp

発表要旨

数学者の立場と社会科学者の立場からのゲーム理論の解釈の違いについて概観し，特に展開形ゲームといわれる非協力ゲームの問題点について考察する．1950 年代には ”Contributions to the theory of games” vol.I–IV(1950,53,57,59, シリーズ Annals of mathematics studies no. 24, 28, 39, 40) が Princeton University Press から出版されたが，近年数学者側からのまとまった論文集は見当らないようである．ただし，今回の発表でいうゲーム理論とはナッシュ(1950 [6], 1951[7]) による非協力ゲーム理論のことであってノイマン・モルゲンシュテルン (1944, [9]) のゲーム理論ではないことに注意されたい．

H. Gintis(2009). Princeton University Press, “The bounds of reason : game theory and the unification of the behavioral sciences.”『ゲーム理論による社会科学の統合』成田悠輔 [ほか] 訳.NTT 出版，(2011) に至ると数学者からは相当距離がある，という印象を受ける．

講演中で用いるゲーム理論に関する記号と用語をまとめておく．

非協力ゲームの定式化

1．標準形 (normal form game)

戦略形 (strategic form game) ともいう．プレイヤーの数が 2 且つ選択肢の集合が有限集合の場合は双行列ゲーム (bimatrix game), 2 人有限ゲームという．

$N = \{1,\dots,n\}$：プレイヤーの集合，$S_i\,;\, i \in N$：プレイヤー $i \in N$ の純粋戦略の全体（有限集合，純粋戦略セットと呼ぶ），

$u_i(s_1,\dots,s_n)\,;\,(s_1,\dots,s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$：プレイヤー $i \in N$ の利得（あるいは効用）関数（$S_1 \times \cdots \times S_n$ 上で定義された実数値関数）.

これらの概念が一組準備されている時，**標準形ゲーム** ($\Gamma = \{N, \{S_i\}, \{u_i\}\}$ と記す）が定義される．標準形ゲームはワンショットゲームであるが戦略として混合戦略（純粋戦略セット上の確率分布) をも考慮するので，純粋戦略セット S_i 上の確率分の全体を $\mathcal{P}(S_i)$ と記す．純粋戦略 $s \in S_i$ は単位分布 $\delta_s \in \mathcal{P}(S_i)$ と同一視できるので純粋戦略は混合戦略の特別な場合とみなす．このとき，プレイヤー i が混合戦略 $\mathbf{x}_i \in \mathcal{P}(S_i)$ を選択したときのプレイヤー i の期待利得 $u_i(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n)$ は次式で与えられる．

$$u_i(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) = \sum_{s_1\in S_1}\cdots\sum_{s_n\in S_n} u_i(s_1,\ldots s_n)x_1(s_1)\times\cdots\times x_n(s_n).$$

本講演では主として $n=2$ の場合，つまり 2 人ゲームの場合に限定する．以下 $N=\{1,2\}$ とする．

ナッシュ均衡戦略: すべてのプレイヤーにとって，自分から選択肢を変更してもより高い利得を得ることが出来ないような戦略の組のこと．

講演では，最もよく知られた 2 人 2×2 ゲームである，囚人のジレンマゲームとチキンゲームにの例について説明する．

2. くり返しゲーム (super game, meta game)

囚人のジレンマから如何にして協力を引出すか，という問題意識から考えだされた，展開形ゲームの特別な場合とも考えられるが，確率過程として捉える方が数学的には理解しやすいと思われる．

3. 展開形ゲーム (extensive form game)

標準形ゲームを展開形ゲームに，逆に展開形ゲームを標準形ゲームで表現することは可能である．展開形ゲームは時間の経過を表わしているために現実のゲームとの対応関係がイメージしやすいが数学的には種々の問題が発生する．なお，ノイマン・モルゲンシュテルン ([9], vol. I, 224 頁) には「これら 2 つの型はまったく同値なので,...」とあり，誤解を生じているように思われる．数学的にも社会学的含意からいっても到底同値であるとは思われない．

なお，標準形ゲーム，展開形ゲームの分類はノイマン・モルゲンシュテルン ([9]) によるが現在用いられている展開形ゲームの定式化の原形はもっぱら Kuhn(1953, [5]) に従っている．

展開形ゲームの定式化

標準形ゲームは一意に展開形ゲームで表現できるが，展開形ゲームの含意は標準形ゲームとは著しく異なる．それは展開形ゲームはプレイヤーの選択が時間的順序を持っているからである．もちろん，標準形ゲームを表現した場合のように実際上は選択の順序に無関係な場合も含まれている．次の例は明かに標準形とは異なる含意を持つ（が数学者にとっては自明な）展開形ゲームの例である．

次の展開形ゲームにはナッシュ均衡戦略が次の二組であることが容易にわかる．

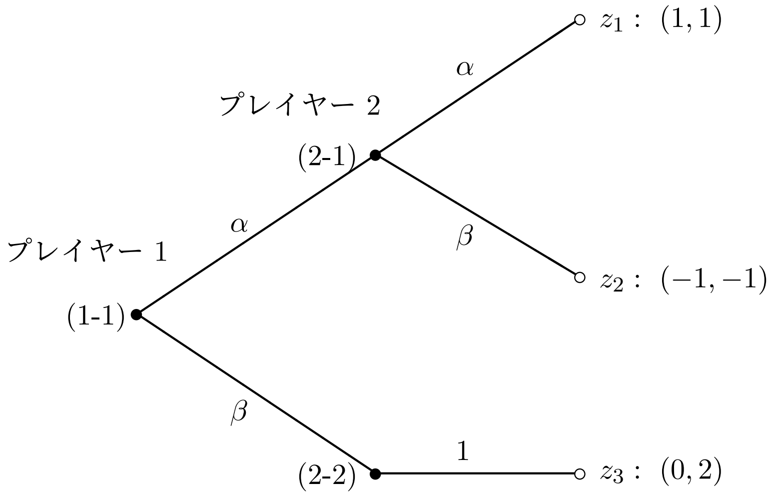
(1) プレイヤー 1: α, プレイヤー 2: α,

(2) プレイヤー 1: β, プレイヤー 2: $p\alpha+(1-p)\beta$, $(0\le p\le 1/2)$.

♠ 数学者の反応： 自明なゲームである．プレイヤー 1 は α を選択すべきである．そのとき，プレイヤー 2 は選択肢 α を（ルールに従って）選ぶはずだから．

♡ 経済学者の反応：市場に参入した場合（α を選択した場合）プレイヤー 2 は安売り攻勢 (β を選択する）をかけてくるかもしれない．その場合，参入しない (選択肢 β ）方がましだ．どうしよう．

♠ 参入ゲーム（信憑性のない脅し），自明なゲーム



参考文献

[1] Aumanmn, R. J. and M. Maschler. 1972. “Some Thoughts on the Minimax Principle.” *Management Science.* 18(5): 54–63.

[2] 河野　敬雄. 2003. 『ゲーム理論アラカルトー確率論の立場からー』Rokko Lectures in Mathematics, No.13. 神戸大学理学部数学教室.

[3] ————-. 2011. 『ゲーム理論アラカルトー確率論の立場からー（続）』Rokko Lectures in Mathematics, No.21. 神戸大学理学部数学教室.

[4] ————-. 2012. 「Maximin 原理に基づくゲーム理論構築の試み」『理論と方法』数理社会学会機関誌（投稿中）

[5] Kuhn, H.W. (1953) “Extensive Games and the Problem of Information.” *Contributions to the Theory of Games,* Eds. Kuhn and Tucker, 193–216. Princeton University Press.

[6] Nash, J.F., 1950. “Equilibrium Points in n-Person Games.” *Proceedings National Academy of Sciences, USA* 36: 48–49.

[7] ——————, 1951, “Non-cooperative Games.” *Annals of Mathematics.* 54, 286–295.

[8] 岡田　章 (2011) 『ゲーム理論』（新版）有斐閣.

[9] von Neumann, John and Oskar Morgenstern. 1944. *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton: Princeton University Press. (銀林浩，橋本和美，宮本敏雄監訳, 1953 年の third edition の翻訳)『ゲームの理論と経済行動 I,II,III』ちくま学芸文庫，2009 年.

確率制御問題の個体群生態学への応用

大泉嶺*, 高田壮則

Graduate School of Environmental Science; Hokkaido University

zumi@ees.hokudai.ac.jp

概要

確率制御問題は工学、数理ファイナンスの分野において幅広く応用されてきている．なぜなら制御理論はエネルギーコスト、個人の効用、リスク制御などの最適化を考える上で有用であるからである．生態学の分野においても、実証研究のレベルで確率制御と思われる現象が確認されている (Pfister 1998). それは推移行列モデルという解析方法を様々な種に対して行うと、その行列の最大固有値に最も寄与する要素の時系列における分散は一般的に少ないというものである．このとき、その最大固有値は生物集団の増加率を表し、行列の要素は時刻ごとの各ステージ（サイズ、齢など）の死亡率を含む次ステージへの推移を表す．言い換えるならば生物は増加率に最も影響を与えるステージへの成長に対して自然界のノイズを嫌うということを意味している．このとき生物の成長過程を生活史と呼ぶと、生活史と生物個体群のダイナミクスとの関係を研究する分野を個体群生態学という．生態学の理論研究でも制御理論は最適生活史スケジュール問題とよばれ、一個体の生活史の解析に以前より応用されてきた．しかし、未だに決定論の範疇を出ないか不確実性を制御するという問題に至っていないのが現状である．つまりこの実証研究の結果に対する理論的な定式化はまだない．不確実性を含む生活史のなかで最適戦略を構成する突破口として、まず重要なことは適切な評価関数を見つけることである．我々が考える適切な評価関数とは生活史の解析が直接個体群の増加率に結びつくものである．
そこで本研究ではまず足がかりとして生物集団を構成する個々体の成長率がばらつきを持つ場合について定式化を試みた．まず、$a \in \mathbb{R}_+$ を齢、 $y \in A \subset \mathbb{R}_+$ をサイズ、制御パラメータを

$$v := (v_1, v_2, \cdots, v_d) \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^d$$

($\mathcal{V}$ はコンパクトな凸集合とする）とすると、それを含む個体群の推移を表す時刻 t での状態方程式は

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial a}\right] P_t(a,y) = -\mathcal{H}_y^v P_t(a,y) \\ \mathcal{H}_y^v := \dfrac{\partial}{\partial y} g(y,v) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\sigma(y,v)^2 + \mu(y,v) \\ P_{t-a}(0,y) = n_{t-a}(x)\,\delta(x-y), \end{cases} \tag{1}$$

である．このとき $g(y,v)$ はサイズのドリフト、$\sigma(y,v)$ はサイズの拡散, $\mu(y,v)$ はサイズごとの死亡率を表す．$n_t(x)$ は　時刻 t での初期個体数（子孫の数）を表し、

以下の積分方程式で与えられる

$$\begin{cases} n_t(x) = G_t(x) + \int_0^t da \int_A dy F(y) P_t(a,y) \\ G_t(x) := \int_t^\infty da \int_A dy F(y) P_t(a,y) \\ G_0(x) = n_0(x). \end{cases} \tag{2}$$

$F(y)$ はサイズごとの繁殖率を表す．これらの方程式は数理人口学で用いられる齢構造モデル Mckendrick 方程式をサイズとその成長のばらつきを含むところまで拡張したものである．我々はこの方程式の形式的な解から、以下の関数:

$$\tilde{\psi}_\lambda(x) := \sup_{v \in \mathcal{V}} \mathbb{E}_x^v \left[\int_0^\infty da \exp\{-\lambda a\} F(X_a) \exp\left\{ - \int_0^a d\tau \mu(X_\tau, v) \right\} \right] \tag{3}$$

を値関数とおけば個体群増加率を最大にする最適戦略が得られる事を紹介したい．このとき、

$$\tilde{\psi}_{\lambda^*}(x) = 1$$

を満たす λ^* が前述の推移行列モデルにおける最大固有値に相当する．

Criticality of ergodic type HJB equations and stochastic ergodic control

Naoyuki Ichihara (Hiroshima University)*
市原直幸（広島大・工）

This talk is concerned with the minimizing problem with real parameter β

$$\text{Minimize}\quad J_\beta(\xi) := \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left[\int_0^T \left\{\frac{1}{2}a^*(X_t^\xi)|\xi_t|^2 - \beta V(X_t^\xi)\right\} dt\right],$$
$$\text{subject to}\quad X_t^\xi = x - \int_0^t \xi_s\, ds + W_t, \qquad t \geq 0,$$

where $W = (W_t)$ is an N-dimensional standard Brownian motion defined on some filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P; (\mathcal{F}_t))$, and $\xi = (\xi_t)$ stands for an $\mathbb{R}^N$-valued $(\mathcal{F}_t)$-progressively measurable process belonging to the admissible class $\mathcal{A}$ defined by

$$\mathcal{A} := \{\xi : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^N \mid \text{ess-sup}_{[0,T]\times\Omega} |\xi_t| < \infty \text{ for all } T > 0\}.$$

Furthermore, we assume that $a^*(x)$ and $V(x)$ satisfy the following conditions:

(H1) $a^* \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$ and $\kappa \leq a^* \leq \kappa^{-1}$ in $\mathbb{R}^N$ for some $\kappa > 0$.

(H2) $V \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$ and $V(x) \to 0$ as $|x| \to \infty$.

In this talk we discuss some qualitative properties, in terms of parameter β, of the optimal value $\Lambda(\beta) := \inf_{\xi\in\mathcal{A}} J_\beta(\xi)$ and the associated optimal control (i.e., $\xi^* \in \mathcal{A}$ with $\Lambda(\beta) = J_\beta(\xi^*)$). For this purpose, it is crucial to study the following ergodic type Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation:

$$\lambda - \frac{1}{2}\Delta\phi + \frac{1}{2}a(x)|D\phi|^2 + \beta V(x) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \quad \phi(0) = 0, \tag{EP}$$

where $a(x) := 1/a^*(x)$. The constraint $\phi(0) = 0$ is imposed to avoid the ambiguity of additive constants with respect to ϕ. We seek for a pair $(\lambda, \phi) \in \mathbb{R} \times C^2(\mathbb{R}^N)$ which satisfies (EP).

Theorem 1. Let (H1) and (H2) hold. Then, for each $\beta \in \mathbb{R}$, there exists a real constant $\lambda^* = \lambda^*(\beta)$ such that (EP) has a solution $\phi \in C^2(\mathbb{R}^N)$ if and only if $\lambda \leq \lambda^*$.

---

*Email: `naoyuki@hiroshima-u.ac.jp`. Supported in part by JSPS KAKENHI Grant Number 24740089.

It turns out that $\lambda^*(\beta)$ in Theorem 1 coincides with $\Lambda(\beta)$.

Theorem 2. Let (H1) and (H2) hold. Then, $\Lambda(\beta) = \lambda^*(\beta)$ for all $\beta \in \mathbb{R}$.

In view of Theorem 2, our study is reduced to that of nonlinear equation (EP). In what follows, we call the constant $\lambda^*(\beta)$ generalized principal eigenvalue of (EP). The next theorem gives some qualitative properties of $\lambda^*(\beta)$ with respect to β.

Theorem 3. Let (H1) and (H2) hold. Let $\lambda^*(\beta)$ be the generalized principal eigenvalue of (EP).
(i) The mapping $\beta \mapsto \lambda^*(\beta)$ is non-positive, non-increasing, and concave.
(ii) There exists a $\beta_c \geq 0$ such that $\lambda^*(\beta) = 0$ for $\beta \leq \beta_c$ and $\lambda^*(\beta) < 0$ for $\beta > \beta_c$.
(iii) $\beta_c = 0$ for $N \leq 2$ and $\beta_c > 0$ for $N \geq 3$.

Let $\phi \in C^2(\mathbb{R}^N)$ be a solution of (EP) with $\lambda = \lambda^*(\beta)$, which can be regarded as the "ground state" of (EP).

Theorem 4. Let (H1) and (H2) hold. Let β_c be the constant in Theorem 3.
(i) For any $\beta \geq \beta_c$, there exists at most one solution ϕ of (EP) with $\lambda = \lambda^*(\beta)$.
(ii) Suppose that $\beta > \beta_c$. Then, there exists a $C > 0$ such that the solution ϕ satisfies

$$C^{-1}|x| - C \leq \phi(x) \leq C(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

(iii) Suppose that $\beta = \beta_c$. Then, there exists a $C > 0$ such that the solution ϕ satisfies

$$C^{-1} \log(1 + |x|) - C \leq \phi(x) \leq C \log(1 + |x|) + C, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Theorem 4 plays a key role in constructing an optimal control for our minimizing problem. More precisely, let $\phi = \phi(x)$ be a solution of (EP) with $\lambda = \lambda^*(\beta)$, and let $X = (X_t)$ be the feedback diffusion governed by the stochastic differential equation

$$dX_t = -a(X_t)D\phi(X_t)\, dt + dW_t, \quad X_0 = x. \tag{1}$$

Then, the following holds.

Theorem 5. Let (H1) and (H2) hold. Let X be the diffusion governed by (1) and set $\xi_t^* := a(X_t)D\phi(X_t)$. Then, $\lambda^*(\beta) = J_\beta(\xi^*)$ for all β, namely, ξ^* is an optimal control. Furthermore, let β_c be the constant in Theorem 3. Then, one has the following recurrence-transience properties for X.
(a) X is transient for any $\beta < \beta_c$.
(b) X is positive recurrent for any $\beta > \beta_c$.
(c) X is recurrent for $\beta = \beta_c$ provided that $|x|^2 V(x) \to 0$ as $|x| \to \infty$.

References

[1] N. Ichihara, Recurrence and transience of optimal feedback processes associated with Bellman equations of ergodic type, SIAM J. Control Optim. 49 (2011) 1938-1960.

[2] N. Ichihara, Criticality of viscous Hamilton-Jacobi equations and stochastic ergodic control, to appear in J. Math. Pures Appl.

[3] N. Ichihara, Generalized principal eigenvalues for ergodic type HJB equations, in preparation.

有限グラフ上のランダムウォークの被覆時間について

阿部圭宏
京都大学理学研究科修士課程２年生

有限グラフ G 上の simple random walk (SRW) について、次の２つの時間を考える ：

- 被覆時間 (cover time): $t_{\mathrm{cov}}(G) := \max_{x \in V(G)} E_x(\max_{y \in V(G)} \tau_y(G))$,
  但し、$\tau_x(G)$ は、SRW による点 x への到達時間、$V(G)$ はグラフの点集合とする。

- 最大到達時間 (maximal hitting time): $t_{\mathrm{hit}}(G) := \max_{x,y \in V(G)} E_x \tau_y(G)$.

被覆時間は、SRW がグラフのすべての点を訪れるまでの時間を表わす。最大到達時間は、SRW が一方の点から他方の点を訪れるまでの時間の最大値を表わす。一般に、被覆時間と最大到達時間の間に次のような関係がある：

$$t_{\mathrm{hit}}(G) \le t_{\mathrm{cov}}(G) \le 2 \cdot t_{\mathrm{hit}}(G) \cdot \log|V(G)|, \tag{1}$$

但し、$|V(G)|$ は、グラフの点の総数を表わす。不等式 (1) の右辺は、Matthews[3] により示され、多くの例で tight な評価を与える（すなわち、$t_{\mathrm{hit}}(G) \cdot \log|V(G)|$ が被覆時間の正しいオーダーを与える）ことが知られている。他方、不等式 (1) の左辺は、多くの critical random graphs に対して、tight な評価を与えることが最近示された [2]。本研究では、これらの結果を一つの枠組みに整理して、(1) に現れる、被覆時間に対する２つの評価が tight となるための十分条件を与えた。さらに、この十分条件を応用して、様々なランダムグラフに対する被覆時間の評価を行った [1]。

1 準備

結果を述べるために、いくつかの準備をする。
有限グラフ G を考える。 グラフの点集合を $V(G)$、辺集合を $E(G)$ とする。有効抵抗 (effective resistance) を次で定義する：

$$R_{\mathrm{eff}}(x,y)^{-1} := \inf\{\mathcal{E}(f,f) : f \in \mathbb{R}^{V(G)}, f(x)=1, f(y)=0\}, x, y \in V(G).$$

但し、

$$\mathcal{E}(f,f) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{u,v \in V(G) \\ \{u,v\} \in E(G)}} (f(u)-f(v))^2, f \in \mathbb{R}^{V(G)}.$$

点集合 $V(G)$ 上の２点間の有効抵抗の最大値を $\mathrm{diam}_R(G)$ と置く。さらに、有効抵抗に関する ball を次のように定義する：

$$B_{\mathrm{eff}}(x,r) := \{y \in V(G) : R_{\mathrm{eff}}(x,y) \le r\}.$$

この balls を用いて、covering number と packing number を次のようにそれぞれ定義する：

$$n_{\mathrm{cov}}(G,r) := \min\Big\{m \geq 1: \text{ ある点 } x_1,\cdots,x_m \in V(G) \text{ が存在して、} \\ V(G) \subset \bigcup_{k=1}^{m} B_{\mathrm{eff}}(x_k,r)\Big\},$$

$$n_{\mathrm{pac}}(G,r) := \max\Big\{m \geq 1: \text{ ある点 } x_1,\cdots,x_m \in V(G) \text{ が存在して、} \\ B_{\mathrm{eff}}(x_1,r),\cdots,B_{\mathrm{eff}}(x_m,r) \text{ は、互いに disjoint}\Big\}.$$

2 結果

1) ある正定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在して、

$$\log\{n_{\mathrm{pac}}(G, c_1 \cdot \mathrm{diam}_R(G))\} \geq c_2 \log|V(G)|$$

が成り立つとする。このとき、ある正定数 $c > 0$ が存在して、

$$c \cdot t_{\mathrm{hit}}(G) \cdot \log|V(G)| \leq t_{\mathrm{cov}}(G) \leq 2 \cdot t_{\mathrm{hit}}(G) \cdot \log|V(G)|.$$

2) ある正定数 $c_1 > 0$ と $r_0 = \mathrm{diam}_R(G)$ かつ、ある $k_0 \in \mathbb{N}$ に対して、$r_{k_0-1} > 0, r_{k_0} = 0$ を満たすある非負単調非増加列 $(r_k)_{k\geq 0}$ が存在して、

$$\sum_{k=1}^{k_0} \sqrt{r_{k-1}\log\{n_{\mathrm{cov}}(G,r_k)\}} \leq c_1\sqrt{\mathrm{diam}_R(G)}$$

が成り立つとする。このとき、ある正定数 $c > 0$ が存在して、

$$t_{\mathrm{hit}}(G) \leq t_{\mathrm{cov}}(G) \leq c \cdot t_{\mathrm{hit}}(G).$$

3) 出生分布の分散が無限となる critical Galton-Watson tree を考え、生存するように条件づける。この（有限部分に制限した）グラフ G に対する被覆時間のオーダーは、$t_{\mathrm{hit}}(G)$ である。

本講演では、どのようなグラフが結果 1), 2) の仮定を満たすかを説明したい。また、結果 3) については、正確なモデルの定義とその被覆時間の評価を紹介したい。

参考文献

[1] Y. Abe. Cover times for sequences of Markov chains on random graphs. Available at `http://arxiv.org/abs/1206.0398`.

[2] M. T. Barlow, J. Ding, A. Nachmias, and Y. Peres. The evolution of the cover time. *Combin, Probab. Comput.* **20** (2011), 331-345.

[3] P. Matthews. Covering problems for Brownian motion on spheres. *Ann. Probab.* **16** (1988), 189-199.

Some regularity results for a certain class of de Rham's functional equations

岡村 和樹*

まず, 以下の関数方程式を考える. $p \in (0,1)$ とする.

$$f(x) = \begin{cases} pf(2x) & 0 \le x \le 1/2 \\ (1-p)f(2x-1)+p & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

これは de Rham の関数方程式の一例である ([1]). μ_p を, 解 f を分布関数とする $[0,1)$ 上の確率測度とする. この測度は, $[0,1)$ を $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ と同一視すると, Bernoulli 測度になっている.

$s(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$, $p \in [0,1]$ とする. $\dim_H(E)$ で E の Hausdorff 次元を表す. このとき以下が成立する (cf. [2], p172).

Fact. (1) μ_p は, $p = 1/2$ で Lebesgue 測度について絶対連続, $p \neq 1/2$ で特異.
(2) ある Borel 集合 K_p について, $\mu_p(K_p) = 1$ かつ $\dim_H(K_p) \le s(p)$.
(3) $\dim_H(K) < s(p)$ となる任意の Borel 集合 K に対し, $\mu_p(K) = 0$.

次に, より一般の場合を考える.

$$f(x) = \begin{cases} F_0(f(2x)) & 0 \le x \le 1/2 \\ F_1(f(2x-1)) & 1/2 \le x \le 1. \end{cases} \tag{1}$$

ただし, $F_i : [0,1] \to [0,1]$, $i = 0,1$, は狭義単調増大な縮小写像で, $0 = F_0(0) < F_0(1) = F_1(0) < F_1(1) = 1$ とする. このとき, 方程式 (1) は一意な連続解をもつ ([1]).

ここでは, F_i, $i = 0,1$, が共に 1 次分数変換の場合を考える. 具体的には, $F_i(x) = \Phi(A_i; x)$, $x \in [0,1]$, $i = 0,1$ である. ただし, 2×2 実行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $z \in \mathbb{R}$ に対し, $\Phi(A; z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ であり, $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$, $i = 0,1$ は以下の条件 (A1)-(A3) をみたすとする :

(A1) $0 = b_0 < \dfrac{a_0+b_0}{c_0+d_0} = \dfrac{b_1}{d_1} < \dfrac{a_1+b_1}{c_1+d_1} = 1$.
(A2) $a_i d_i - b_i c_i > 0$, $i = 0,1$.
(A3) $(a_i d_i - b_i c_i)^{1/2} < \min\{d_i, c_i + d_i\}$, $i = 0,1$.

* Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, Komaba 3-8-1, Meguro-ku, Tokyo 153-8914, Japan e-mail : kazukio@ms.u-tokyo.ac.jp

μ_f を f を分布関数とする $[0,1)$ 上の確率測度とする. $\alpha = \min\{0, c_0/(d_0-a_0), c_1/b_1\}$, $\beta = \max\{0, c_0/(d_0-a_0), c_1/b_1\}$, $\gamma = 1/\Phi(A_0;1)$, $p_0(x) = (x+1)/(x+\gamma)$ とおく.

Theorem 1. (1) ある *Borel* 集合 K_0 について, $\mu_f(K_0) = 1$ かつ $\dim_H(K_0) \leq \max\{s(p_0(y)); y \in [\alpha,\beta]\}$.
(2) $\dim_H(K) < \min\{s(p_0(y)); y \in [\alpha,\beta]\}$ となる任意の *Borel* 集合 K に対し, $\mu_f(K) = 0$.

Theorem 2. (1) (i) $(c_0+d_0-2a_0)(d_0-a_0) = a_0c_0$, (ii) $(a_1-2c_1)(d_1-2b_1) = b_1c_1$ が共に成立すれば, $\mu_f(dx) = (1+2c_0)/(-2c_0x+1+2c_0)^2dx$. とくに μ_f は絶対連続.
(2) (i) が不成立, または, (ii) が不成立ならば, ある *Borel* 集合 K_1 について、$\mu_f(K_1) = 1$ かつ $\dim_H(K_1) < 1$. とくに μ_f は特異.

この定理の特徴は, μ_f は必ずしも $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx [0,1)$ 上の直積測度でないことである. 一方, μ_f が直積測度になることもある. $A_0 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $p \in (0,1)$, のときに定理を適用して, 先に述べた Fact が従う.

$X_n(x)$ を $x \in [0,1)$ の 2 進展開の小数第 n 位として, $\begin{pmatrix} p_n(x) & q_n(x) \\ r_n(x) & s_n(x) \end{pmatrix} = A_{X_1(x)} \cdots A_{X_n(x)}$ とおく. 証明のポイントは $r_n(x)/s_n(x)$ の解析である.

最後に, de Rham の関数方程式と定常測度の関わりを述べる.

G を半群とし, μ をその上の確率測度とする. G が位相空間 M に作用しているとする. 具体的には, $(g,x) \in G \times M$ から $g \cdot x \in M$ への写像で, (1) $(g_1g_2)\cdot x = g_1\cdot(g_2\cdot x)$, $g_1, g_2 \in G, x \in M$. (2) 任意の $g \in G$ に対し, $x \mapsto g \cdot x$ が M 上可測写像. をみたすものが与えられているとする. M 上の確率測度 ν が μ-定常測度であるとは, 任意の $B \in \mathcal{B}(M)$ に対し, $\nu(B) = \int_G \int_M 1_B(g \cdot x)\nu(dx)\mu(dg)$ であることとする. M がコンパクト距離空間ならば μ-定常測度が存在する ([3]).

$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2;\mathbb{R}) : ad > bc, b \geq 0, d > 0, 0 < a+b \leq c+d \right\}$, $M = [0,1]$ とおく. G の M への作用を $A \cdot z = \Phi(A;z)$ で定義する. (A_0, A_1) は (A1)-(A3) をみたすとする. G 上確率測度 μ を、$\mu(\{A_0\}) = \mu(\{A_1\}) = 1/2$ であるものとする. このとき, μ-定常測度について, 以下が成り立つ.

Theorem 3. 条件 (i), (ii) を *Theorem 2* のものとする. ν を μ-定常測度とする. このとき, ν は一意に定まり,
(1) ν が絶対連続であることと, (i), (ii) 共に成立することは同値.
(2) ν が特異であることと, (i) が不成立または (ii) が不成立であることは同値.

これは Theorem 2 を用いて示される.

参考文献

[1] G. de Rham, Sur quelques courbes définies par des équations fonctionalles, Rend. Sem. Mat. Torino 16 (1957), 101-113.

[2] K. Falconer, Techniques in fractal geometry, John Wiley and Sons, 1997.

[3] H. Furstenberg, Noncommuting random products, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 377-428.

2乗可積分性をもつレヴィ過程に対するマリアバン解析とその応用

鈴木良一*

The Clark-Ocone formula is an explicit stochastic integral representation for random variables in terms of Malliavin derivatives that turns to be central in the application to mathematical finance. On the other hand, a Stroock formula is an explicit representation for chaos expansion by using Malliavin derivative. In this talk, we introduce a Clark-Ocone type formula under change of measure for Lévy processes with L^2-Lévy measure ([6]). As an application of the theorem, we are also preparing a paper concerning the local risk minimization problem ([1]). We also introduce a Stroock type formula for L^2-Lévy functionals ([5]).

Throughout this talk, we consider Malliavin calculus for Lévy processes, based on, [4] and [2]. Let $X = \{X_t; t \in [0,T]\}$ be a centered square integrable Lévy process with representation

$$X_t = \sigma W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} z\tilde{N}(ds,dz)$$

on a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]})$, where $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ is the augmented filtration generated by X and σ is a constant number. Furthermore, we assume that $\{W_t; t \in [0,T]\}$ is a standard Brownian motion and that N is a Poisson random measure independent of W defined by

$$N(A,t) = \sum_{s\le t} \mathbf{1}_A(\Delta X_s), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0), \Delta X_s := X_s - X_{s-},$$

where $\mathbb{R}_0 := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. In addition, we will denote by $\tilde{N}(dt,dz) = N(dt,dz) - \nu(dz)dt$ the compensated Poisson random measure, where $dt\nu(dz) = \lambda(dt)v(dz)$ is the compensator of N, $\nu(\cdot)$ the Lévy measure of X and λ the Lebesgue measure on $\mathbb{R}$. Since X is square integrable, the Lévy measure satisfies $\int_{\mathbb{R}_0} z^2\nu(dz) < \infty$. Now we consider a finite measure q defined on $[0,T] \times \mathbb{R}$ by

$$q(E) = \sigma^2 \int_{E(0)} dt\delta_0(dz) + \int_{E'} z^2 dt\nu(dz), \quad E \in \mathcal{B}([0,T] \times \mathbb{R}),$$

where $E(0) = \{(t,0) \in [0,T] \times \mathbb{R}; (t,0) \in E\}$ and $E' = E - E(0)$, and the random measure Q on $[0,T] \times \mathbb{R}$ by

$$Q(E) = \sigma \int_{E(0)} dW_t\delta_0(dz) + \int_{E'} z\tilde{N}(dt,dz), \quad E \in \mathcal{B}([0,T] \times \mathbb{R}).$$

Let $L^2_{T,q,n}(\mathbb{R})$ denote a set of product measurable, deterministic functions $f : ([0,T] \times \mathbb{R})^n \to \mathbb{R}$ satisfying

$$\|f\|^2_{L^2_{T,q,n}} := \int_{([0,T]\times\mathbb{R})^n} |f((t_1,z_1),\cdots,(t_n,z_n))|^2 q(dt_1,dz_1)\cdots q(t_n,z_n) < \infty.$$

For $n \in \mathbb{N}$ and $f_n \in L^2_{T,q,n}(\mathbb{R})$, a multiple two-parameter integral with respect to the random measure Q can be defined as

$$I_n(f_n) := \int_{([0,T]\times\mathbb{R})^n} f_n((t_1,z_1),\cdots,(t_n,z_n))Q(dt_1,dz_1)\cdots Q(dt_n,dz_n).$$

In this setting, we introduce the following chaos expansion (see Theorem 2 in [3], Section 2 of [4]).

*Department of Mathematics, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi Kohoku-ku, Yokohama, 223-8522, Japan, reicesium@gmail.com

Proposition 1 *Any $\mathcal{F}$-measurable square integrable random variable F has a unique representation*

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), \mathbb{P}-\text{a.s.}$$

with functions $f_n \in L^2_{T,q,n}(\mathbb{R})$ that are symmetric in the n pairs $(t_i, z_i), 1 \le i \le n$ and we have the isometry

$$\mathbb{E}[F^2] = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|^2_{L^2_{T,q,n}}.$$

We next define the follows:

Definition 1 *1.*

2. *Let $\mathbb{D}^{k,2}(\mathbb{R}), k \ge 1$ denote the set of $\mathcal{F}$ -measurable random variables $F \in L^2(\mathbb{P})$ with the representation $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(h_n)$ satisfying*

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)n! \|h_n\|^2_{L^2_{T,q,n}} < \infty.$$

3. *For $F \in \mathbb{D}^{k,2}(\mathbb{R}), k \ge 1$, we define the k-th Malliavin derivative as follows:*

$$D^k_{t_1,z_1,\cdots,t_k,z_k} F = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) I_{n-k}(h_n((t_1,z_1),\cdots,(t_k,z_k),\cdot)),$$

$(t_k, z_k) \in [0,T] \times \mathbb{R}, k \ge 1.$

Now, we assume the following.

Assumption 1 *Let $\theta(s,x) < 1, s \in [0,T], x \in \mathbb{R}_0$ and $u(s), s \in [0,T]$, be predictable processes such that*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \{|\log(1-\theta(s,x))| + \theta^2(s,x)\} \nu(dx) ds < \infty, \text{ a.s.,}$$
$$\int_0^T u^2(s) ds < \infty, \text{ a.s.}$$

Moreover we denote

$$\begin{aligned} Z(t) \quad := \quad & \exp\left(-\int_0^t u(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t u(s)^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} \log(1-\theta(s,x))\tilde{N}(ds,dx)\right. \\ & \left. + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} (\log(1-\theta(s,x)) + \theta(s,x))\nu(dx)ds\right), t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Define a measure $\mathbb{Q}$ on $\mathcal{F}_T$ by

$$d\mathbb{Q}(\omega) = Z(\omega, T) d\mathbb{P}(\omega),$$

and we assume that $Z(T)$ satisfies the Novikov condition. Furthermore we denote

$$\tilde{N}_{\mathbb{Q}}(dt,dx) := \theta(t,x)\nu(dx)dt + \tilde{N}(dt,dx)$$

and

$$dW_{\mathbb{Q}}(t) := u(t)dt + dW(t).$$

We next introduce a Clark-Ocone type formula under change of measure for Lévy processes.

Theorem 1 *Let $F \in \mathbb{D}^{1,2}(\mathbb{R})$. Then, under Assumption 1 with some conditions, we have*

$$\begin{aligned} F &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F] + \sigma \int_0^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[D_{t,0}F - FK(t) \middle| \mathcal{F}_{t-} \right] dW_{\mathbb{Q}}(t) \\ &\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F(\tilde{H}(t,z)-1) + z\tilde{H}(t,z)D_{t,z}F|\mathcal{F}_{t-}]\tilde{N}_{\mathbb{Q}}(dt,dz), \end{aligned}$$

where,

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t,z) &:= \exp\left(-\int_0^T zD_{t,z}u(s)dW_{\mathbb{Q}}(s) - \frac{1}{2}\int_0^T (zD_{t,z}u(s))^2 ds \right. \\ &\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \left[zD_{t,z}\theta(s,x) + \log\left(1 - z\frac{D_{t,z}\theta(s,x)}{1-\theta(s,x)}\right)(1-\theta(s,x)) \right] \nu(dx)ds \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \tilde{N}_{\mathbb{Q}}(ds,dx) \right), \end{aligned}$$

and

$$K(t) := \int_0^T D_{t,0}u(s)dW_{\mathbb{Q}}(s) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \frac{D_{t,0}\theta(s,x)}{1-\theta(s,x)}\tilde{N}_{\mathbb{Q}}(ds,dx).$$

Finaly, we introduce a Stroock type formula for L^2-Levy functionals.

Theorem 2 *Let $F \in \cap_{k=1}^{\infty}\mathbb{D}^{k,2}(\mathbb{R})$. Then, we have*

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n),$$

where,

$$f_k((t_1,z_1),\cdots,(t_k,z_k)) = \frac{\mathbb{E}[D^k_{t_1,z_1,\cdots,t_k,z_k}F]}{k!}$$

for all $k \geq 1$.

References

[1] T. Arai and R. Suzuki, *Local risk-minimization for Lévy markets*. Preprint.

[2] C. Geiss and E. Laukkarinen, *Denseness of certain smooth Lévy functionals in $\mathbb{D}_{1,2}$*. Probab. Math. Statist. (2011) 1–15.

[3] K. Itô, *Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments*. Trans. Amer. Math. Soc. (1956) 253–263.

[4] J.L. Solé, F. Utzet and J. Vives, *Canonical Lévy process and Malliavin calculus*. Stochastic Process. Appl. (2007) 165–187.

[5] N. Sakuma and R. Suzuki, *A Stroock type formula for Lévy processes*. Preprint.

[6] R. Suzuki, *A Clark-Ocone type formula under change of measure for Lévy processes with L^2-Lévy measure*. Submitted.

Tunneling for spatially cut-off $P(\phi)_2$-Hamiltonians

Shigeki Aida
Tohoku University

Let $-L$ be the second quantization operator of $\sqrt{m^2-\Delta}$, where m is a positive number. Let $\lambda = 1/\hbar$ be a large positive parameter. Let us consider an interaction potential function V_λ which is given by a Wick polynomial

$$V_\lambda(w) = \lambda \int_{\mathbb{R}} : P\left(\frac{w(x)}{\sqrt{\lambda}}\right) : g(x)dx, \tag{1}$$

where g is a non-negative smooth function with compact support and $P(x) = \sum_{k=1}^{2M} a_k x^k$ is a polynomial bounded from below. The operator $-L + V_\lambda$ is called a spatially cut-off $P(\phi)_2$-Hamiltonian. Formally, $-L + V_\lambda$ is unitarily equivalent to the infinite dimensional Schrödinger operator:

$$-\Delta_{L^2(\mathbb{R})} + \lambda U(w/\sqrt{\lambda}) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(m^2-\Delta)^{1/2} \quad \text{on } L^2(L^2(\mathbb{R}), dw) \tag{2}$$

where dw is an infinite dimensional Lebesgue measure. The function U is a potential function such that

$$U(w) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} w'(x)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{m^2}{4} w(x)^2 + : P(w(x)) : g(x)\right) dx$$

and $\Delta_{L^2(\mathbb{R})}$ denotes the "Laplacian" on $L^2(\mathbb{R}, dx)$. Hence, by the analogy of Schrödinger operators in finite dimensions, it is natural to expect that asymptotic behavior of lowlying eigenvalues of $-L + V_\lambda$ in the semiclassical limit $\lambda \to \infty$ is related with the properties of global minimum points of U. In view of this, we consider the following assumptions.

Assumption 1. Let P be the polynomial in (1) and U be the function on H^1 which is given by

$$U(h) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} h'(x)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{m^2}{4} h(x)^2 + P(h(x))g(x)\right) dx \qquad \text{for } h \in H^1. \tag{3}$$

(A1) The function U is non-negative and the zero point set

$$\mathcal{Z} := \{h \in H^1 \mid U(h) = 0\} = \{h_1, \ldots, h_n\} \tag{4}$$

is a finite set.
(A2) For all $1 \le i \le n$, the Hessian $\nabla^2 U(h_i)$ is non-degenerate. That is, there exists $\delta_i > 0$ for each i such that

$$\begin{aligned}\nabla^2 U(h_i)(h,h) &:= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} h'(x)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{m^2}{2} h(x)^2 + P''(h_i(x))g(x)h(x)^2\right) dx \\ &\ge \delta_i \|h\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \qquad \text{for all } h \in H^1(\mathbb{R}).\end{aligned} \tag{5}$$

(A3) For all x, $P(x) = P(-x)$ and $\mathcal{Z} = \{h_0, -h_0\}$, where $h_0 \neq 0$.

Let $E_1(\lambda)$ be the lowest eigenvalue of $-L + V_\lambda$. The first main result is as follows.

Theorem 2. Assume that (A1) and (A2) hold. Let $E_1(\lambda) = \inf \sigma(-L + V_\lambda)$. Then

$$\lim_{\lambda\to\infty} E_1(\lambda) = \min_{1\le i\le n} E_i, \tag{6}$$

where

$$E_i = \inf \sigma(-L + Q_i) \tag{7}$$

and Q_i is given by

$$Q_i(w) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} : w(x)^2 : P''(h_i(x))g(x)dx. \tag{8}$$

Remark 3. In the case of finite dimensional Schrödinger operators, there exist eigenvalues near the approximate eigenvalues E_i when λ is large. In Theorem 2, if $E_i < m + \min_{1\le i\le n} E_i$, then the same results hold by the result of Hoegh-Krohn and Simon (J.Funct.Anal. Vol.9, 1972). However, if it is not the case, it is not clear and they may be embedded eigenvalues in the essential spectrum. Under the assumptions in Theorem 5, $E_2(\lambda)$ is an eigenvalue for large λ. Simon(Proc.Amer.Math.Soc. Vol.35, 1972) gave an example of $P(\phi)_2$-Hamiltonian for which an embedded eigenvalue exists.

Let

$$E_2(\lambda) = \inf \{\sigma(-L + V_\lambda) \setminus \{E_1(\lambda)\}\}.$$

We can prove that $E_2(\lambda) - E_1(\lambda)$ is exponentially small when U is a symmetric double well potential function. The exponential decay rate is given by the Agmon distance which is defined below.

Definition 4. Let $0 < T < \infty$ and $h, k \in H^1(\mathbb{R})$. Let $AC_{T,h,k}(H^1(\mathbb{R}))$ be the set of all absolutely continuous paths $c : [0,T] \to H^1(\mathbb{R})$ satisfying $c(0) = h, c(T) = k$. Let U be the potential function in (3). Assume U is non-negative. We define the Agmon distance between h, k by

$$d_U^{Ag}(h,k) = \inf \left\{\ell_U(c) \mid c \in AC_{T,h,k}(H^1(\mathbb{R}))\right\}, \tag{9}$$

where

$$\ell_U(c) = \int_0^T \sqrt{U(c(t))}\|c'(t)\|_{L^2} dt. \tag{10}$$

The following estimate is the second main result.

Theorem 5. Assume that U satisfies (A1),(A2),(A3). Then it holds that

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \frac{\log\left(E_2(\lambda) - E_1(\lambda)\right)}{\lambda} \le -d_U^{Ag}(h_0, -h_0). \tag{11}$$

Remark 6. (1) Agmon distance can be extended to a continuous distance function on $H^{1/2}(\mathbb{R})$. Moreover the topology defined by the Agmon distance coincides with the one defined by the Sobolev norm of $H^{1/2}(\mathbb{R})$.
(2) We can prove the existence of minimal geodesic between h_0 and $-h_0$ with respect to the Agmon metric. The uniqueness of the geodesics is not clear at the moment.
(3) The Agmon distance $d_U^{Ag}(h_0, -h_0)$ is equal to an Euclidean action integral of an instanton solution. This is an infinite dimensional example corresponding to the result of instanton in the case of Schrödinger operator which is due to Carmona and Simon(Comm.Math.Phys. Vol.80,1981).

Inverse Problems for Stochastic Transport Equations

乙部厳己* （信州大学理学部）

2012 年 12 月 20 日

本講演では線形：

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial_x u(x,t) + (q(x) + \dot{w})u(x,t), \\ u(x,0) = \phi(x), \end{cases} \tag{1}$$

および線形非斉次：

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_x u(t,x) + q(x)u(t,x) + \dot{w}, \\ u(x,0) = \phi(x). \end{cases} \tag{2}$$

の輸送方程式に対する、初期値 ϕ と観測データ $f(t) := u(t,a)$ を既知量としたときに未知関数 q を求める問題を考察する。

1 動機

数理物理学の第一段階では、方程式を立て、その解の挙動を調べて、それが実際の現象をモデル化したものとして相当かどうかを議論する。例えば

$$\begin{cases} \partial_{tt} u(x,t) = \partial_{xx} u(x,t) + q(x)u(x,t) \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases} \tag{3}$$

は密度が q で表される媒質を伝播する波動現象を記述する。一方第二段階では、例えば波動現象が (3) で記述されることは既知として、その観測データ $f(a,t) := u(a,t)$ から媒質 $q(x)$ を追求することがある。例えば人体／ピラミッドの外から電磁波をあてて内部の様子を探る、海面上の船から超音波を照射して海水中の様子を探るなどがその例である。これらは非破壊検査と呼ばれ、最も典型的な**逆問題**である。

一方で容易に分かるように、(3) 自身は線形方程式であるがその逆問題 $f \mapsto q$ はきわめて非線形度の高い問題であり、解は一意に存在するが、Hadamard の意味では適切ではない。すなわち、観測値 f に対して q は連続に変化せず、非適切（ill-posed）な問題である [1]。そして、この問題においては**観測誤差**は避けられない前提であるから、これはきわめて深刻であり、連続性の問題は中心課題の一つである。本講演では、観測その他の理由による誤差は避けられないものであるから、方程式そのものに誤差項を導入してこの問題を議論する。ただし、問題を明確にするために扱う確率偏微分方程式としては考え得る限り易しい線形 1 次元の輸送方程式とする。

*Dan Crisan (Imperial College London) および Symon Peszat (Polish Academy of Sciences) との共同研究

2　順問題

方程式 (1) と (2) において、雑音項 $\dot{w}$ は時間に依存する場合 $\dot{w}(t)$ と空間に依存する場合 $\dot{w}(x)$ の 2 種類を考え、それぞれガウス型白色雑音とする（$w(t)$ あるいは $w(x)$ をブラウン運動として $\dot{w}(t) = dw(t)/dt$ または $\dot{w}(x) = dw(x)/dx$ とする)。時空間白色雑音は考えない。直観的には、$\dot{w}(t)$ の場合は観測データが激しく攪乱されている場合、$\dot{w}(x)$ の場合は媒質が一様に不純物を含んでいる場合と思って差し支えない。

我々の目的は逆問題であるが、実際にはそれらの確率偏微分方程式に解の定義を与え、その解について議論するところから始めなければならない。(1) と (2) は、雑音が $\dot{w}(t)$ の場合は通常の伊藤の意味でこの方程式を理解し、$\dot{w}(x)$ の場合には超関数解として理解する（この差は後で影響する)。それら（4 種）をここで記すことは控えるが、いずれも一意な強解が存在する。すなわちこのことから、まず初めに確率空間を固定して $\dot{w}$ を与え、そのもとで方程式を議論してよい。その結果、考える物理系（方程式）を固定したもとで、我々は写像 $(\phi, q, w) \mapsto u$ を構成できることになる。

3　逆問題

我々は (1) と (2) で与えられる方程式の順問題が解 $(\phi, q, w) \mapsto u$ を持つという前提で、観測値 $f(a,t) := u(a,t)$ が与えられたと仮定する。

本講演における**逆問題**とは、写像 $(\phi, f) \mapsto q$ が構成できるかという問題として定義する。このとき、確率空間および雑音は順問題が一意な強解を持つことから固定したものとする。重要なことは、我々は $f(a,t)$ は本来 $u(a,t;w)$ なのであるが、f が与えられるごとに関数 $q(x)$（w に依存しない）を（w によらず）求めることができるかという問題を設定していることである。すなわち、観測データがただ 1 つだけ得られるとしたときに、いかなる条件下で q が復元できるかということを問題にする。

講演において、むしろ線形（乗法的雑音）の場合 (1) の方が易しく、非斉次（加法的雑音）の場合 (2) の方が困難が生じて、現状では推定できる q には大きな制限が伴っていることを述べる。これは順問題とは逆である。

その理由を感覚的に理解するには、次のことを考えればよい。線形系 (1) においては、雑音は解 u の影響を伴っている。従ってある意味で雑音部を解析することから u の情報を取り出すことができ、その中に q の情報が含まれている。一方で、加法的な場合 (2) には、雑音は解と独立に加えられている。そのため雑音部の解析から解の情報を取り出すことができない。この事情は次の SDE からもすぐに分かる。$dX_t = aX_t\,dt + dB_t$ の解（の 1 つの標本路）$X_t(w)$ を知っても、a を取り出すことは自明ではない。なぜなら a がどんな値であってもその分布は（有限時間区間 $[0,T]$ 上では）それぞれ絶対連続であり、従って、標語的にいえばその標本路 $X_t(w)$ は $B_t(w')$ として現れうる。その差を見るには $T \to \infty$ とする必要がある。

講演ではこれらのそれぞれの場合について現在得られている q の条件と、それを再現する具体的な公式について述べる。

参考文献

[1] V. G. Romanov, *Inverse problems of mathematical physics*, VNU Science Press, 1987.

Perturbation of Dirichlet forms and stability of fundamental solutions

東北大学理学研究科 D2　和田正樹

2012 年 12 月 20 日

1　問題

$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の飛躍型ディリクレ形式 $(\mathscr{E},\mathscr{D}(\mathscr{E}))$ を次のように定める。

$$\mathscr{E}(u,u) = \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}(u(y)-u(x))^2 J(x,y)dxdy, \qquad \mathscr{D}(\mathscr{E}) = \overline{\{C_c(\mathbb{R}^d)\}}^{\mathscr{E}_1^{1/2}}, \tag{1}$$

ただし、ここで $J(x,y)$ は対称な関数であり、適切な正定数 κ_1 と κ_2、及び関数 ϕ により

$$\frac{\kappa_1}{|x-y|^d\phi(|x-y|)} \le J(x,y) \le \frac{\kappa_2}{|x-y|^d\phi(|x-y|)} \tag{2}$$

と評価されるものとする。特に $\phi(r)$ が $\phi(r)=r^\alpha$ $(0<\alpha<2)$ を満たすときには対応するマルコフ過程 $\{X_t\}$ を α-stable like process、$\phi(r)=r^\alpha(1\vee\exp(n(r-1)))$ $(0<\alpha<2,\ n>0)$ を満たすときには relativistic α-stable like process という。これらのマルコフ過程における熱核 (あるいは対応する生成作用素 $\mathscr{L}$ を用いた方程式 $\partial u/\partial t=\mathscr{L}u$ の基本解)$p(t,x,y)$ の上下からの評価は、Z.-Q. Chen, P. Kim 及び熊谷 [2, 3] により次のように与えられている。

命題 1. *(Z.-Q. Chen, 熊谷 2003)*
α-stable like process の熱核は C_1 及び C_2 を正定数として以下のように評価される。

$$C_1\left(t^{-\frac{d}{\alpha}}\wedge\frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}}\right) \le p(t,x,y) \le C_2\left(t^{-\frac{d}{\alpha}}\wedge\frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}}\right),$$

命題 2. *(Z.-Q. Chen, P. Kim, 熊谷 2011)*
relativistic α-stable like process の熱核は $c_i(i\in\mathbb{N})$ を正定数として t と $|x-y|$ の大小に応じて以下のように評価される。

$$\begin{aligned}
c_1\left(t^{-\frac{d}{\alpha}}\wedge\frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}}\right) \le p(t,x,y) &\le c_2\left(t^{-\frac{d}{\alpha}}\wedge\frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}}\right) \quad (0<t,|x-y|\le 1)\\
c_3t^{-\frac{d}{2}}\exp\left(-\frac{c_4|x-y|^2}{t}\right) \le p(t,x,y) &\le c_5t^{-\frac{d}{2}}\exp\left(-\frac{c_6|x-y|^2}{t}\right) \quad (1\vee|x-y|\le t)\\
c_7t^{-\frac{d}{2}}\exp(-c_8|x-y|) \le p(t,x,y) &\le c_9t^{-\frac{d}{2}}\exp(-c_{10}|x-y|) \quad (1\le t\le|x-y|)\\
c_{11}t\exp(-c_{12}|x-y|) \le p(t,x,y) &\le c_{13}t\exp(-c_{14}|x-y|) \quad (0<t\le 1\le|x-y|)
\end{aligned}$$

いずれの場合も、評価式は正定数の選び方を除けば上下とも全く同じになることが云える。以上の結果を踏まえて、以下では過渡的なディリクレ形式においてグリーン緊密な正値ラドン測度 μ による摂動、即ちシュレディンガー形式

$$\mathscr{E}^{\mu}(u,u) = \mathscr{E}(u,u) - \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu \tag{3}$$

を考える。ただし、測度 μ がグリーン緊密である ($\mu \in \mathscr{K}_{\infty}$) とは加藤クラスに属し、任意の $\varepsilon > 0$ に対して或る $\delta > 0$ とコンパクト集合 K が存在して $\mu(B) < \delta$ 及び $B \subset K$ となるとき、グリーン核 $G(x,y)$ に対して $\int_{B \cup K^c} G(x,y)\mu(dy) < \varepsilon$ を満たすような測度のことである。更に $\mathscr{E}^{\mu}$ に対応する生成作用素を $\mathscr{L}^{\mu}$ で表す。本講演では $\mathscr{L}^{\mu}$ を用いた方程式 $\partial u/\partial t = \mathscr{L}^{\mu} u$ の基本解 $p^{\mu}(t,x,y)$ が正定数の選び方を除けば $p(t,x,y)$ と同様の評価を持つ (この現象を、基本解の安定性という) ために μ に課すべき必要十分条件について論ずる。尚これは、基となるマルコフ過程が過渡的なブラウン運動の場合を扱った竹田 [6] の先行結果を飛躍型マルコフ過程の場合に拡張したものである。

2 主結果及び証明の概略

主結果は以下の通りである。

定理 3. *(W. 2012)*
ディリクレ形式 $(\mathscr{E}, \mathscr{D}(\mathscr{E}))$ は過渡的で、$\mu \in \mathscr{K}_{\infty}$ は

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} G(x,y)\mu(dx)\mu(dy) < \infty \tag{4}$$

を満たしているとする。このとき、基本解の安定性が成立するための必要十分条件は

$$\inf\{\mathscr{E}(u,u) \mid u \in \mathscr{D}(\mathscr{E}),\ \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1\} > 1 \tag{5}$$

が成立することである。

式 (5) は、測度 μ のディリクレ形式 $(\mathscr{E}, \mathscr{D}(\mathscr{E}))$ に対する小ささを表している。必要性の証明には、以下の 2 つの命題がカギになる。

命題 4. *(竹田 2002)*
過渡的なディリクレ形式 $(\mathscr{E}, \mathscr{D}(\mathscr{E}))$ と、$\mathscr{S}_{\infty}$ に属す測度 μ に対して以下の 3 点は互いに同値である。

- *(i)* $\int_0^{\infty} p^{\mu}(t,x,y)dt =: G^{\mu}(x,y) < \infty$ が全ての $x \neq y$ に対して成立する。
- *(ii)* $\inf\{\mathscr{E}(u,u) \mid u \in \mathscr{D}(\mathscr{E}),\ \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1\} > 1$
- *(iii)* μ はゲージアブルである。すなわち、μ にルヴューズ対応するような連続正値加法的汎関数を A_t^{μ} とすると $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x[\exp(A_{\infty}^{\mu})] < \infty$ となる。

ただし、μ が $\mathscr{S}_{\infty}$ に属すとは、加藤クラスに属し任意の $\varepsilon > 0$ に対して或る $\delta > 0$ 及びコンパクト集合 K が存在して $\mu(B) < \delta$ 及び $B \subset K$ のとき $\int_{B \cup K^c} G(x,y)G(y,z)/G(x,z)\mu(dy) < \infty$ が成立することである。

命題 5. *(W. 2012)*
$\{X_t\}$ のグリーン核 $G(x,y)$ が、正定数 C_1 と C_2 で以て、$C_1 \leq g(r)/g(2r) \leq C_2 \quad (r > 0)$ となるような $g(r)$ 及び正定数 C_3, C_4 により、$C_3 g(|x-y|) \leq G(x,y) \leq C_4 g(|x-y|)$ を満たすとする。このとき $\mathscr{K}_{\infty} = \mathscr{S}_{\infty}$ が成立する。

命題 5 は、いわゆる 3G-Theorem が適用可能な十分条件を与えており、本講演での枠組みでは $\mathscr{S}_\infty$ は $\mathscr{K}_\infty$ と何ら変わりがないことがわかる。$\mu \in \mathscr{K}_\infty$ に対して基本解の安定性を仮定すると、命題 4 の (i) が成立するので、結論である命題 4 の (ii) も成立し、必要性の証明ができる。

十分性の証明には、命題 4 と以下の命題がカギになる。

命題 6. *(Z.-Q. Chen, T.-S. Zhang 2002)*
$h(x)$ が拡大ディリクレ空間 $\mathscr{D}_e(\mathscr{E})$ に属す有界関数 v でもって $h(x) = \exp(v(x))$ と表されるとき、$L^2(h^2dx)$ 上のディリクレ形式 $(\tilde{\mathscr{E}}, \mathscr{D}(\tilde{\mathscr{E}}))$ が以下で定まる。

$$\tilde{\mathscr{E}}(u,u) = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (u(y) - u(x))^2 J(x,y) h(x) h(y) dxdy, \qquad \mathscr{D}(\tilde{\mathscr{E}}) = \mathscr{D}(\mathscr{E}) \tag{6}$$

まず、命題 4 より μ はゲージアブルなので、$h(x) = \mathbb{E}_x[\exp(A_\infty^\mu)]$ と定めると或る正定数 C_1 でもって $1 \le h(x) \le C_1$ を満たす。このような $h(x)$ を用いて命題 6 の証明を辿れば $(\tilde{\mathscr{E}}, \mathscr{D}(\tilde{\mathscr{E}}))$ に対応するような $L^2(h^2dx)$ 上の強連続半群 $\{Q_t\}$ が

$$Q_t f(x) = \mathbb{E}_x[\frac{h(X_t)}{h(X_0)} \exp(A_t^\mu) f(X_t)] \tag{7}$$

で与えられることもわかり、その積分核はルベーグ測度に対して $h(x)p^\mu(t,x,y)h(y)$ に等しい。一方で、$1 \le h(x) \le C_1$ となることから $L^2(h^2dx)$ 上のディリクレ形式 (6) は飛躍測度 $J(x,y)h(x)h(y)$ をもつ $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のディリクレ形式と見なすことができる。$J(x,y)h(x)h(y)$ は正定数の選び方を除けば、元のディリクレ形式の飛躍測度 $J(x,y)$ と同様の評価式 (2) をもつため、Z.-Q. Chen, P. Kim 及び熊谷の先行結果より、$h(x)p^\mu(t,x,y)h(y)$、ひいては $p^\mu(t,x,y)$ も $p(t,x,y)$ と同様の評価式を満たすことが云える。尚、主定理における条件 (4) は、命題 6 を $h(x) = \mathbb{E}_x[\exp(A_\infty^\mu)]$ で適用する上で十分にするために課したものであり、弱められる可能性があることを付け加えておく。

参考文献

[1] Albeverio, S., Blanchard, P., Ma, Z.-M.: Feynman-Kac semigroups in terms of signed smooth measures, Inter. Series of Num. Math. 102, 1-31, (1991).

[2] Chen, Z.-Q., Kumagai, T.: Heat kernel estimates for stable-like processes on *d*-sets, Stoc. Proc. Appli. 108, 27-62, (2003).

[3] Chen, Z.-Q., Kim, P., Kumagai, T.: Global heat kernel estimates for symmetric jump processes, Trans. Amer. Math. Soc. 363, 5021-5055, (2011).

[4] Chen, Z.-Q., Zhang, T.-S.: Girsanov and Feynman-Kac type transformations for symmetric Markov processes, Ann. I. H. Poincarè 38, 475-505, (2002).

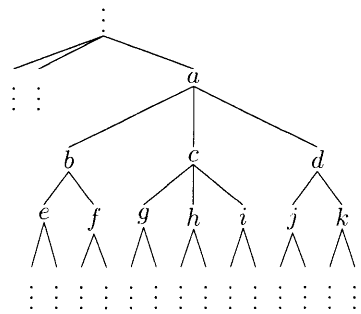
[5] Takeda, M.: Gaugeability for Feynman-Kac functionals with applications to symmetric α-stable processes, Proc. Amer. Math. Soc. 134, 2729-2738, (2006).

[6] Takeda, M.: Gaussian bounds of heat kernels for Schrödinger oeprators on Riemannian manifolds, Bull. London Math. Soc. 39, 85-94, (2007).

A Dirichlet space on ends of tree and Dirichlet forms with a nodeswise orthogonal property

Hiroshi KANEKO, Tokyo University of Science

We take the set $T = \{\cdots, a, b, c, \cdots\}$ of countably many nodes (vertices) which admits such hierarchical structure as representated in the following figure:

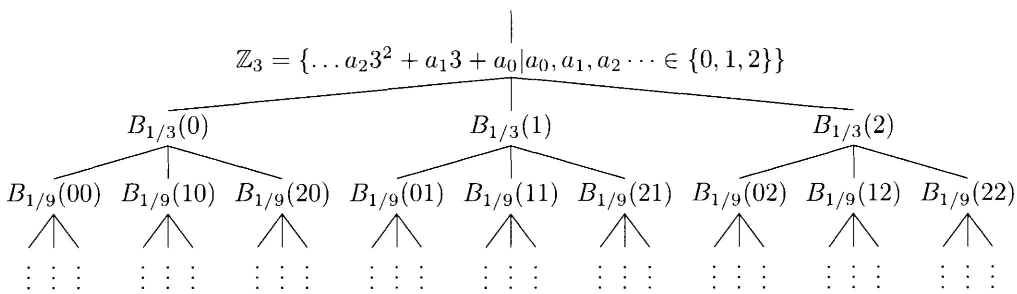


Then T is described as the disjoint union of its subsets $\{T_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, where each T_m stands for a set of nodes in identical hierarchical level as

$$T_0 = \{\cdots, a, \cdots\},$$
$$T_1 = \{\cdots, b, c, d, \cdots\},$$
$$T_2 = \{\cdots, e, f, \cdots, j, k, \cdots\}.$$

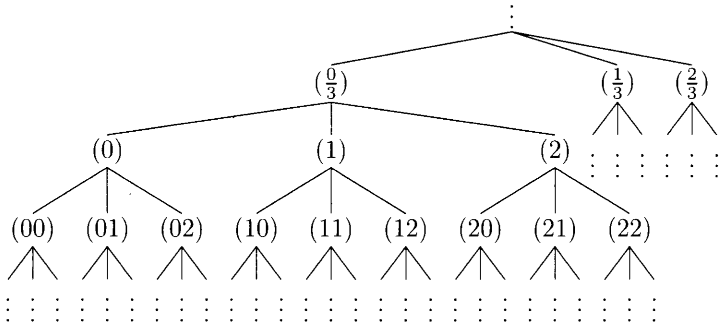
The map $\pi : T \to T$ is defined by $\pi(y) = x$ for any $y \in T$, where x stands for the node which can be traced back by a single edge" —" from y, e.g., $\pi(b) = a$.

A tree for $T_{\mathbb{Z}_3}$ the ring $\mathbb{Z}_3$ of 3-adic integers is described as



where $B_{1/3}(a_0) = \{\dots a_2 3^2 + a_1 3 + a_0 | a_1, a_2 \dots \in \{0,1,2\}\}$, $B_{1/9}(a_1 a_0) = \{\dots a_2 3^2 + a_1 3 + a_0 | a_2 \dots \in \{0,1,2\}\}$. This shows that we may drop off $B, 1/3$ and $1/9$ in denoting those balls.

Accordingly, we can draw the tree associated with the field $\mathbb{Q}_3 = \{\dots a_2 3^2 + a_1 3 + a_0 + \frac{a_{-1}}{3} + \dots \frac{a_{-m}}{3^m} | a_{-m}, \cdots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2 \cdots \in \{0,1,2\}$ for some integer $m\}$ of 3-adic numbers as



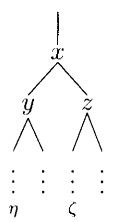
We regard sequence $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ of nodes in T as an end of the tree if $\pi(a_{i+1}) = a_i$ is satisfied for any i and denote the set of all ends by Σ^+.

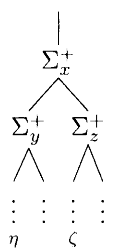
Example (Tree $T_{\mathbb{Q}_p}$ associated with the field $\mathbb{Q}_p$ of p-adic numbers). Let $T_{\mathbb{Q}_p}$ be the set consisting of all balls in $\mathbb{Q}_p$ and denote the volume of ball B by $\mathrm{V}ol(B)$. Then we can define the relationship B—B' for $B, B' \in T_{\mathbb{Q}_p}$ by

$$B\text{—}B' \text{ if either } B \subset B', p\mathrm{V}ol(B) = \mathrm{V}ol(B') \text{ or } B' \subset B, p\mathrm{V}ol(B') = \mathrm{V}ol(B).$$

The map π is defined by $\pi(B) = B'$ with the ball B' characterized by $B \subset B'$ and $p\mathrm{V}ol(B) = \mathrm{V}ol(B')$ and in addition a homeomorphism between Σ^+ and $\mathbb{Q}_p$ is obtained. In fact, any end $\xi \in \Sigma^+$ is representedby a sequence $\{B_0, B_1, \cdots\}$ of balls satisfying$B_0 \supsetneqq B_1 \supsetneqq \dots$, which determines a singleton $\{a\} \subset \mathbb{Q}_p$ by $\{a\} = \cap_i B_i$. The map $\xi \mapsto a$ gives a bijection from Σ^+ to $\mathbb{Q}_p$ which is viewed as a homeomorphism.

Let us define $S_x = \{y \in T \mid \pi^k(y) = x$ for some non-negative integer $k\}$ and $\Sigma_x^+ = \{\xi \in \Sigma^+ \mid \xi$ admits a representative sequence $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ of x satsfying $a_0, a_1, \cdots \in S_x\}$ for any $x \in T$. The set Σ_x^+ is called a branch for each $x \in T$. Instead of connecting nodes by edges as the figure on the left, we may connect branches by edges as the figure on the right for comprehending support of functions or domain for integrations.





We will introduce the following notations:

- $\mathcal{C}^m(\Sigma^+) = \{$functions taking constant on every Σ_y^+ with $y \in T_{m+1}\}$,
- $\mathcal{C}(\Sigma_x^+) = \{$functions vanishing outside $\Sigma_x^+\}$ for every $x \in T$,

- $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}(\Sigma_x^+) \cap \mathcal{C}^m(\Sigma^+)$ for any $x \in T_m$,

- $\mathcal{C}^x_{\pi^k(x)} = \{$the linear span of $\mathcal{C}_{\pi^k(x)} \cup \cdots \cup \mathcal{C}_x\}$ for any positive integer k.

We assume that Σ^+ admits a Radon measure μ with support Σ^+ and that there exists a complete orthonormal system Φ of $L^2(\Sigma^+;\mu)$ satisfying

(i) $\Phi = \cup_{x \in T} \Phi_x$,

(ii) $\Phi_x = \{\varphi \in \Phi \cap \mathcal{C}_x \mid (\varphi, 1_{\Sigma^+})_{L^2(\Sigma^+;\mu)} = 0\}$ and $\#\Phi_x = \#\{y \in T \mid \pi(y) = x\} - 1$.

In [1], an intuitively acceptable class of Markov processes was introduced relying on a construction method based on Kolmogorov's equation. It turned out that any Markov process in the class admits Dirichlet space whose eigenfunctions are given as the system Φ and each $\mathcal{C}_x$ is spanned by Φ_x and $1_{\Sigma_x^+}$. In contrast, it has been suggested that one may start with a family $\{(\mathcal{E}_x, \mathcal{C}_x)\}_{x \in T}$ of nodewise given Dirichlet spaces satisfying $\Phi_x \subset \mathcal{C}_x$ for constructing Markov processes. In fact, a Markov process characterized by the family is constructed in [4] and related probabilistic phenomena are studied based mainly on such potential theoretic notions as Dirichlet space in the article. In accordance with these studies, we assume that $\Phi \subset \mathcal{F}$, whenever $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ is dealt with as a regular Dirichlet space on $L^2(\Sigma^+;\mu)$.

We are going to reveal a relationship between the Dirichlet space $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ and nodewise given Markov processes through the orthogonal projection P_x to the linear subspace $\mathcal{C}_{x,0}$ spanned by Φ_x. For the purpose, we will focus on the orthogonal property $\mathcal{E}(\phi, \psi) = 0$ for any $\phi \in \Phi_x, \psi \in \Phi_y$ with distinct $x, y \in T$ which is involved coherently in the existing formalisms as in the previously mentioned studies. The objective of the present talk is paying a close attention to a characteristic property implied by the orthogonality and paving the way to a general formalism complied with the characteristic property.

In our observations, we define an element $(u)_{\mu,x}$ of $\mathcal{C}_x$ by $(u)_{\mu,x} = \left(\frac{1}{\mu(\Sigma_x^+)} \int_{\Sigma_x^+} u(\eta)\mu(d\eta)\right) 1_{\Sigma_x^+}$ for locally integrable function u on Σ^+. By starting with the Dirichlet space $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ with the orthogonal property, we will give a decomposition into the family $\{\mathcal{E}_x\}_{x \in T}$ of nodewise given Dirichlet forms, due to the explicit expression $P_x u = u - (u)_{\mu,x}$ for $u \in \mathcal{C}_x$. We will give a sufficient condition on the family $\{\mathcal{E}_x\}_{x \in T}$ of nodewise given Dirichlet forms for building a class of Markov processes each of which is associated with Dirichlet space on $L^2(\Sigma^+;\mu)$ with the characteristic property.

References

[1] S. Albeverio and W. Karwowski, Jump processes on leaves of multibranching trees, J. Math. Phys. 49 (2008), 093503, 20pp.

[2] Z.-Q. Chen and M. Fukushima, Symmetric Markov processes, time changes, and boundary-theory, Princeton Univesirty Press, Princeton, (2012).

[3] J..Kigami, Dirichlet forms and associated kernels on the Cantor set induced by random walks ontrees, Advances in Math. 225 (2010) 2674-2730.

[4] J. Kigami, Transitions on a noncompact Cantor set and random walks on its defining tree, preprint (2011).

On a stochastic differential equation for SLE on multiply connected planar domains

Masatoshi Fukushima

In 2000, Oded Schramm [**S**] formulated the *stochastic Loewner evolution* (SLE) on the upper half plane $\mathbb{H}$ with a finding that the possible candiates of the driving processes are $\xi(t) = \sqrt{\kappa} B_t$, where B_t is the standard Brownian mtion on $\partial\mathbb{H}$ and κ is a positive constant. In this talk, we show that, for a corresponding evolution for a multiply connected domain, the possible candidates of the driving processes are given by the solution $(\xi(t), \mathbf{s}(t))$ of a specific Markov type stochastic differential equation, where $\xi(t)$ is a motion on $\partial\mathbb{H}$ and $\mathbf{s}(t)$ is a motion of slits. When no slit is present, it reduces to $\sqrt{\kappa} B_t$ as above. This is a joint work with Z.-Q. Chen.

A domain of the form $D = \mathbb{H} \setminus \bigcup_{k=1}^N C_k$ is called a *standard slit domain*, where $\{C_k\}$ are mutually disjoint horizontal line segments. The collection of standard slit domains is denoted by $\mathcal{D}$. We fix $D \in \mathcal{D}$ and consider a Jordan arc

$$\gamma : [0, t_\gamma] \to \overline{D}, \quad \gamma(0) \in \partial\mathbb{H}, \quad \gamma(0, t_\gamma] \subset D.$$

For each $t \in [0, t_\gamma]$, let g_t be the unique conformal map from $D \setminus \gamma(0, t]$ onto some $D_t = \mathbb{H} \setminus \bigcup_{k=1}^N C_k(t) \in \mathcal{D}$ satisfying the *hydrodynamic normalization*

$$g_t(z) = z + \frac{a_t}{z} + o(1), \qquad z \to \infty,$$

for some constant a_t strictly increasing in t with a_0, which is called the *half-plane capacity.* Define

$$\xi(t) = g_t(\gamma(t)) \ (\in \partial\mathbb{H}), \quad 0 \le t \le t_\gamma.$$

The following facts have been proved in [**CFR**]:

- a_t, $\xi(t)$ and $D_t \in \mathcal{D}$ are continuous in t.
  In particular, the arc γ can be reparametrized in a way that $a_t = 2t$, $0 \le t \le t_\gamma$ (*half-plane capacity parametrization*).

- Under this parametrization of γ, the family $g_t(z)$ satisfies the *chordal Komatu-Loewner equation*

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = -2\pi\Psi_t(g_t(z), \xi(t)), \quad g_0(z) = z \in D, \quad 0 < t \le t_\gamma,$$

  where $\Psi_t(z, \zeta), z \in D_t, \zeta \in \partial\mathbb{H}$, is the complex Poisson kernel of the *Brownian motion with darning* (BMD) on the standard slit domain D_t.

- The endpoints $z_j(t) = x_j(t) + iy_j(t),\ z'_j(t) = x'_j(t) + iy_j(t)$, of the slits $C_j(t)$ of D_t satisfy the *Bauer-Friedrich equation*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y_j(t) = -2\pi \Im \Psi_t(z_j(t), \xi(t)), \\ \frac{d}{dt} x_j(t) = -2\pi \Re \Psi_t(z_j(t), \xi(t)), \\ \frac{d}{dt} x'_j(t) = -2\pi \Re \Psi_t(z'_j(t), \xi(t)), \end{cases}$$

We define an open subset S of the Euclidean space $\mathbb{R}^{3N}$ by

$$S = \{(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \mathbb{R}^{3N} : \mathbf{y} > \mathbf{0},\ \mathbf{x} < \mathbf{x}', \\ \text{either } x'_j < x_k \text{ or } x'_k < x_j \text{ whenever } y_j = y_k,\ j \neq k\}.$$

By the correspondence $z_k = x_k + iy_k,\ z'_k = x'_k + iy_k,\ 1 \le k \le N$, the space $\mathcal{D}$ can be identified with S as a topological space. The point in S (resp. $\mathcal{D}$) correspondigy to $D \in \mathcal{D}$ (resp. $\mathbf{s} \in S$) will be denoted by $\mathbf{s}(D)$ (resp. $D(\mathbf{s})$). $\mathbf{s}(D_t)$ is designated by $\mathbf{s}(t)$. Then

$$\mathbf{W}_t = (\xi(t), \mathbf{s}(t)) \in \mathbb{R} \times S\ (\subset \mathbb{R}^{3N+1}), \quad t \in [0, t_\gamma),$$

is determined by the Jordan arc γ with half-plane capacity parametrization and becomes a continuous random process if γ is randomized as follows.

We let $\widehat{\mathcal{D}} = \{\widehat{D} = D \setminus F : D \in \mathcal{D},\ F$ compact $\mathbb{H}$-hull, $F \cap \mathbb{H} \subset D\}$. For $\widehat{D} \in \widehat{\mathcal{D}}$, let

$$\begin{aligned} \Omega(\widehat{D}) \quad &= \quad \{\gamma = \{\gamma(t) : 0 \le t < t_\gamma\} : \text{Jordan arc}, \\ &\qquad \gamma(0, \infty) \subset \widehat{D},\ \gamma(0) \in \partial(\mathbb{H} \setminus F),\ 0 < t_\gamma \le \infty \Big\}. \end{aligned}$$

Two curves $\gamma,\ \widetilde{\gamma} \in \Omega(\widehat{D})$ are regarded to be equivalent if $\widetilde{\gamma}$ is obtained from γ by a reparametrization. $\dot{\Omega}(\widehat{D})$ will designate the family of the equivalence classes of $\Omega(\widehat{D})$. Each $\dot{\gamma} \in \dot{\Omega}(\widehat{D})$ can be represented by a curve belonging to this class parametrized by half-plane capacity. We then introduce σ-fields $\dot{\mathcal{G}}_t(D),\ t \ge 0$, and $\dot{\mathcal{G}}(D)$ of subsets of $\dot{\Omega}(\widehat{D})$ using the coordinate maps.

For each $\widehat{D} = D \setminus F \in \widehat{\mathcal{D}}$ and $z \in \partial(\mathbb{H} \setminus F)$, we consider a probability measure $\mathbb{P}_{\widehat{D},z}$ on $(\dot{\Omega}(\widehat{D}), \dot{\mathcal{G}}(\widehat{D}))$ satisfying $\mathbb{P}_{\widehat{D},z}(\{\dot{\gamma}(0) = z\}) = 1$, and further **(DMP)** (domain Markov property) and **(CI)** (conformal invariance) defined analogously to **[S]**. For $\xi \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{s} \in S$, define a probability measure $\mathbb{P}_{(\xi,\mathbf{s})}$ on $(\dot{\Omega}(D(\mathbf{s})), \dot{\mathcal{G}}(D(\mathbf{s})))$ by $\mathbb{P}_{(\xi,\mathbf{s})} = \mathbb{P}_{D(\mathbf{s}),(\xi,0)}$.

It can then be shown that $(\mathbf{W}_t, \mathbb{P}_{(\xi,\mathbf{s})})$ is a time homogeneous Markov process satisfying the Brownian scaling property: For $\mathbf{s} \in S,\ \xi \in \mathbb{R}$ and any $c > 0$, $\{c^{-1}\mathbf{W}_{c^2 t},\ t \ge 0\}$ under $\mathbb{P}_{(c\xi, c\mathbf{s})}\ \sim\ \{\mathbf{W}_t,\ t \ge 0\}$ under $\mathbb{P}_{(\xi,\mathbf{s})}$.

We write $\mathbf{w} = (\xi, \mathbf{s}) \in \mathbb{R} \times S$. A real valued function $u(\mathbf{w})$ of $\mathbf{w}$ is said to be *homogeneous with degree* 0 (resp. -1) if $u(c\mathbf{w}) = u(\mathbf{w})$ (resp. $u(c\mathbf{w}) = c^{-1}u(\mathbf{w})$) for every $c > 0$.

Theorem *The diffusion $\mathbf{W}_t = (\xi(t), \mathbf{s}(t))$ satisfies under $\mathbb{P}_{(\xi,\mathbf{s})}$ the following stochastic differential equation:*

$$\begin{aligned}
\xi(t) &= \xi + \int_0^t \alpha(\mathbf{W}_s)dB_s + \int_0^t d(\mathbf{W}_s)ds \\
\mathbf{s}_j(t) &= \mathbf{s}_j + \int_0^t d_j(\mathbf{W}_s)ds, \quad t \geq 0, \quad 1 \leq j \leq 3N,
\end{aligned}$$

for a non-negative homogeneous function $\alpha(\mathbf{w})$ of degree 0, a homogeneous function $d(\mathbf{w})$ of degree -1. Here B_t is a one-dimensional standard Brownian motion and the function $d_j(\mathbf{w}) = d_j((\mathbf{s}, \xi))$, $1 \leq j \leq 3N$, are defined by

$$d_j(\mathbf{w}) = \begin{cases} -2\pi\Im\Psi_{\mathbf{s}}(z_j, \xi), & 1 \leq j \leq N, \\ -2\pi\Re\Psi_{\mathbf{s}}(z_j, \xi), & N+1 \leq j \leq 2N, \\ -2\pi\Re\Psi_{\mathbf{s}}(z_j', \xi), & 2N+1 \leq j \leq 3N. \end{cases}$$

in terms of the complex Poisson kernel $\Psi_{\mathbf{s}}(z, \xi)$ of the BMD on $D(\mathbf{s}) \in \mathcal{D}$.

Conversely, for given homogeneous functions $\alpha(\mathbf{w})$, $d(\mathbf{w})$ of degree 0, -1, respectively, both being assumed to be locally Lipschitz continuous, the above SDE admits a unique strong solution $\mathbf{W}_t = (\xi(t), \mathbf{s}(t))$ because $d_j(w)$ are also locally Lipschitz continuous by virtue of **[CFR]**.

We then substitute $\mathbf{W}_t = (\xi(t), \mathbf{s}(t))$ into the Komatu-Loewner equation

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = -2\pi\Psi_{\mathbf{s}(t)}(g_t(z), \xi(t)), \quad g_0(z) = z \in D(\mathbf{s}(0)),$$

to produce random conformal maps $\{g_t(z)\}$ and random growing hulls $\{K_t\}$ analogously to the SLE for the simply connected domain $\mathbb{H}$.

References

[BF] R.O. Bauer and R.M. Friedrich, On chordal and bilateral SLE in multiply connected domains, *Math. Z.* **258**(2008), 241-265

[CFR] Z.-Q. Chen, M. Fukushima and S. Rhode, On the chordal Komatu-Loewner equation and Brownian motion with darning in multply connected domains, Preprint

[S] Oded Schramm, Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* **118**(2000), 221-288

自由確率論での無限分解可能性

長谷部高広　(京都大学)

自由確率論においては, 確率論の場合の類似として自由無限分解可能分布が定義される. ある種のランダム行列の固有値分布を考えると, 行列を大きくしていった極限で自由無限分解可能分布が現れることが知られている. このクラスの分布ついては, 確率密度関数が具体例に書ける例があまり知られていない. そこで, ベータ分布 $B(1-a, 1+a)$ を含む確率測度の族 $\mu_{s,r}^{\alpha}$ を導入する. $\beta(p,q)$ とは密度関数が $\frac{1}{B(p,q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ $(0<x<1)$ と表される分布のことである. ここで $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ である.

$\mu_{s,r}^{\alpha}$ はスチルチェス変換を用いて次のように定義される:

$$G_{s,r}^{\alpha}(z)=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{z-x}\mu_{s,r}^{\alpha}(dx)=-r^{1/\alpha}\left(\frac{1-(1-s(-\frac{1}{z})^{\alpha})^{1/r}}{s}\right)^{1/\alpha}.$$

この式の右辺でもって $\mu_{s,r}^{\alpha}$ が定義されていると理解するのだが, 確率測度として存在するためには以下のような条件が必要である.

定理 1. $1\le r<\infty$, $0<\alpha\le 2$ とする. さらに以下の条件のいずれかが成り立つとき, $\mu_{s,r}^{\alpha}$ は確率測度になる:

(1) $0<\alpha\le 1$, $(1-\alpha)\pi\le\arg s\le\pi$;

(2) $1<\alpha\le 2$, $0\le\arg s\le(2-\alpha)\pi$.

$\mu_{-1,r}^{1}$ はベータ分布 $\beta(1-1/r, 1+1/r)$ と一致することが分かる. また確率分布 $\mu_{s,r}^{\alpha}$ に従う確率変数を $X_{s,r}^{\alpha}$ とすると, これは次の自己相似性を満たすことが分かる:

$$X_{cs,r}^{\alpha}\overset{\mathrm{d}}{=}c^{1/\alpha}X_{s,r}^{\alpha}.$$

自由無限分解可能性を調べるためにはスチルチェス変換の逆関数が必要である. 今の場合, $G_{s,r}^{\alpha}$ の逆関数は容易に計算することができる. このことを用いて, 色々な自由無限分解可能分布の例を得ることができた.

より一般のベータ分布 $\beta(p,q)$ のスチルチェス変換は超幾何関数を用いて表すことができる. 時間があればこちらも議論したい.

ランダム環境中の分枝ランダムウォークと測度値確率過程

中島誠 *
筑波大学数理物質系

1 Introduction

次の形の SPDE(Heat equation with noise) を考える.

$$\partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u(t,x) + a(u)\dot{W}(t,x). \tag{1.1}$$

ここで $a(u)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数. $\dot{W}(t,x)$ は時空間パラメータのホワイトノイズ.

このSPDEの解に対応する確率モデルとしてスーパーブラウン運動 (super Brownian motion, SBM) などの測度値確率過程などがある.

1.1 スーパーブラウン運動

$\mathbb{R}^d$ 上の有界測度全体の集合を $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$ とする (位相は弱収束の位相を入れる). スーパーブラウン運動 $\{X_t(\cdot) : t \geq 0\}$ は $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$ の値をとる確率過程であり, 次のマルチンゲール問題の一意解として特徴付けられる.

$$\begin{cases} \text{任意の有界 2 階微分可能な関数 } \varphi \text{ に対して} \\ Z_t(\varphi) = X_t(\varphi) - X_0(\varphi) - \int_0^t X_s(\frac{1}{2}\Delta\varphi)ds \\ \text{が } \mathcal{F}_t^X\text{-マルチンゲールであり} \\ \langle Z(\varphi)\rangle_t = \int_0^t \gamma X_s(\varphi^2)ds, \end{cases} \tag{1.2}$$

ここで $X_s(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)X_s(dx)$, $\gamma > 0$

スーパーブラウン運動の確率モデルとしての捉え方は後に回し, 上の SPDE と関連する先行結果を挙げる.

Theorem 1.1. *[2, 5, 6]* $X_t(\cdot)$ をスーパーブラウン運動とする.

(i) $(d = 1)$ $X_t(\cdot)$ は確率 *1* で任意の $t \in (0,\infty)$ で *Lebesgue* 測度に対して絶対連続であり, その密度を $u(t,x)$ とすると $(X_t(dx) = u(t,x)dx)$, 次の *SPDE* を満たす.

$$\partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u(t,x) + \sqrt{\gamma u(t,x)}\dot{W}(t,x).$$

(ii) $(d \geq 2)$ $X_t(dx)$ は $X_t(1) \neq 0$ であるとき *Lebesgue* 測度に対して特異な測度であり, 特にその台 *supp*(X_t) の *Hausdorff* 次元は 2 である *(Hausdorff* 測度も具体的に知られている*)*

(i) より $d = 1$ のとき $a(u) = \sqrt{\gamma u}$ とした (1.1) に対応していることがわかった.

このように (1.1) に対応する確率モデルがいくつか知られており, 代表的なものとして以下のものがある.

$$a(u) = \lambda u,\ \lambda \in \mathbb{R} \Leftarrow \text{KPZ 方程式の Cole-Hopf 解 [1]}$$
$$a(u) = \sqrt{u - u^2} \Leftarrow \text{Stepping-stone モデルの連続極限 [7]}$$

そこで別の $a(u)$ に対応する測度値確率過程を構成することを考える.

*nakamako@math.tsukuba.ac.jp

1.2 ランダム環境中のスーパーブラウン運動

Mytnik が [3] でランダム環境中の分枝ブラウン運動の極限としてランダム環境中のスーパーブラウン運動 (SBMRE) を構成した. SBMRE$\{X_t(\cdot):t\geq 0\}$ は次のマルチンゲール問題の一意解として特徴付けられる.

$$\begin{cases} \text{任意の有界 2 階微分可能な関数 } \varphi \text{ に対して} \\ Z_t(\varphi)=X_t(\varphi)-X_0(\varphi)-\int_0^t X_s(\frac{1}{2}\Delta\varphi)ds \\ \text{が } \mathcal{F}_t^X\text{-マルチンゲールであり} \\ \langle Z(\varphi)\rangle_t=\int_0^t X_s(\varphi^2)ds \\ \qquad\qquad +\int_0^t\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\varphi(x)g(x,y)\varphi(y)X_s(dx)X_s(dy)ds. \end{cases}$$

ただし $g(x,y)$ は対称正定値有界連続関数で無限遠点で極限をもつ.

特に論文の Remark で「$g(x,y)=\delta_{x-y}$ と置き換えて解が存在すればそれはランダムな密度関数 $u(t,x)$ を持ち SPDE

$$\partial_t u(t,x)=\frac{1}{2}\Delta u(t,x)+\sqrt{u+u^2}\dot{W}(t,x)$$

の解になる.」と述べている.

これをふまえて, $a(u)=\sqrt{u+u^2}$ とした (1.1) の解となるような新たな確率モデルをランダム環境中の分枝過程の連続極限と構成することを試みた.

2 SBM,SBMRE の構成

2.1 SBM

SBM は臨界的な分枝ブラウン運動の連続極限として得られる.

ここでは分枝ブラウン運動を次のように定義する.

Definition 2.1. 分枝ブラウン運動 (BBM)

(i) 時刻 0 で N 個の粒子が原点に存在.

(ii) 時刻 $t\in[\frac{k}{N},\frac{k+1}{N})$ で各粒子は独立にブラウン運動をし, 時刻 $t=\frac{k+1}{N}$ で独立に分裂する. 分裂は確率 $\frac{1}{2}$ で *2* 個, または確率 $\frac{1}{2}$ で *0* 個に分裂する.

BBM に対して次のように測度値確率過程の列を構成する.

$$X_0^N=\delta_0,\ X_t^N=\sum_{i=1}^{B_t^N}\frac{1}{N}\delta_{x_t^i}$$

ここで B_t^N は時刻 t での総粒子数, x_t^i は時刻 t での i 番目の粒子のいる位置. つまり $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して $X_t^N(A)=\frac{\text{時刻 } t \text{ で } A \text{ 内にいる粒子の数}}{N}$. このとき $N\to\infty$ で収束することが知られている.

Theorem 2.2. $\{X_t^N(\cdot):t\geq 0\}\Rightarrow\{X_t(\cdot):t\geq 0\}$. ここで $X_t(\cdot)$ は *(1.2)* の一意解 *(*$\gamma=1$*)*

2.2 SBMRE

Mytnik は次のような BBMRE の連続極限として SBMRE を構成した.

$\xi=\{\xi(x):x\in\mathbb{R}^d\}$ を random field で次を満たすとする.

$$P(\xi(x)>z)=P(\xi(x)<-z),x\in\mathbb{R}^d,z\in\mathbb{R},E[\xi(x)\xi(y)]=g(x,y),E[\xi(x)^3]<\infty.$$

$\{\xi_k:k\in\mathbb{N}\}$: ξ と独立同分布な確率場. このとき BBMRE を次で定義する.

Definition 2.3. ランダム環境中の分枝ブラウン運動 (BBMRE)

(i) 時刻 0 で原点に N 粒子.

(ii) 時刻 $t\in[\frac{k}{N},\frac{k+1}{N})$ で各粒子は独立にブラウン運動する. 時刻 $t=\frac{k+1}{N}$ で粒子は独立に分裂する. ただし確率 $\frac{1}{2}+\frac{(\xi(x)\wedge\sqrt{N})\vee(-\sqrt{N})}{2N^{1/2}}$ で 2 個, 確率 $\frac{1}{2}-\frac{(\xi(x)\wedge\sqrt{N})\vee(-\sqrt{N})}{2N^{1/2}}$ で 0 個に分裂する. ここで x は各粒子が時刻 $t=\frac{k+1}{N}$ で到達した点.

このように BBMRE を定義し測度値確率過程 X_t^N を BBM の時と同じように定義すると $N \to \infty$ とした極限として SBMRE がえられる.

注意: $g(x,y)$ を δ_{x-y} で置き換えるということは確率場 $\xi(x)$ が空間に関するホワイトノイズになるということを意味している. Mytnik の構成法に対して $g(x,y)$ を置き換えた BBMRE を考えると分裂の際に各粒子は確率 1 で異なる位置にいるため互いに影響を与えない (環境の影響もない). このため極限操作を行っても目的の SBMRE は得られない.

3 Result

目的の SBMRE を得るために次のような $\mathbb{Z}^d$ 上のランダム環境中の分枝ランダムウォークを考える.

Definition 3.1. ランダム環境中の分枝ランダムウォーク (BRWRE)

(i) 時刻 0 で原点に N 個の粒子.

(ii) 時刻 n で点 x にいる粒子は時刻 $n+1$ で隣接点を独立に確率 $\frac{1}{2d}$ で選んで移動する. 移動した後独立に分裂する. 分裂の仕方は確率 $p^{(N)}(n,x)$ で 2 個, 確率 $q^{(N)}(n,x) = 1 - p^{(N)}(n,x)$ で 0 個に分裂する. ただし $\{p^{(N)}(n,x) : (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d\}$ は $[0,1]$ に値をとる独立同分布な確率変数.

測度値確率過程として BRWRE を定義する. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d$ に対して,

$$X_0^N = \delta_0,\ X_t^N(A) = \frac{\sharp\{\text{ 時刻 } \lfloor tN \rfloor \text{ で } \sqrt{N}A \text{ の中にある粒子 }\}}{N}$$

また $\{\xi(n,x) : (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d\}$ を $\{1,-1\}$-値独立同分布な確率変数の列で $P(\xi(n,x)=1) = \frac{1}{2}$ を満たすものとする. このとき次のことが成り立つ.

Theorem 3.2. *[4] $d=1$, $p^{(N)}(n,x) = \frac{1}{2} + \frac{\beta\xi(n,x)}{2N^{1/4}}$ ($\beta \in \mathbb{R}$) とすると, $\{X_t^N(\cdot) : t \geq 0\}$ は tight で, その極限点 $\{X_t(\cdot) : t \geq 0\}$ は確率 1 で全ての $t \in (0,\infty)$ で Lebesgue 測度に対して絶対連続であり, その密度 $u(t,x)$ は次の SPDE を満たす.*

$$\partial u(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u(t,x) + \sqrt{u + \frac{\beta^2 u^2}{2}}\dot{W}(t,x)$$

References

[1] L. Bertini and G. Giacomin. Stochastic Burgers and KPZ equations from particle systems. Vol. 183, No. 3, pp. 571–607, 1997.

[2] N. Konno and T. Shiga. Stochastic partial differential equations for some measure-valued diffusions. *Probab. Theory Related Fields*, Vol. 79, No. 2, pp. 201–225, 1988.

[3] L. Mytnik. Superprocesses in random environments. *Ann. Probab.*, Vol. 24, No. 4, pp. 1953–1978, 1996.

[4] M. Nakashima. Super-brownian motion in random environment as a limit point of critical branching random walks in random environment. *arXiv preprint arXiv:1207.1755*, 2012.

[5] E. A. Perkins. A space-time property of a class of measure-valued branching diffusions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 305, No. 2, pp. 743–795, 1988.

[6] M. Reimers. One-dimensional stochastic partial differential equations and the branching measure diffusion. *Probab. Theory Related Fields*, Vol. 81, No. 3, pp. 319–340, 1989.

[7] T. Shiga. Stepping stone models in population genetics and population dynamics. In *Stochastic Processs in Physics and Engineering*, pp. 345–355. D. Reidel, 1988.

Quenched large deviations for multidimensional random walk in random environment with holding times

久保田　直樹 (日大理工)*

ランダムな待ち時間を持つランダム媒質中のランダムウォーク (以下，RWREHT と表す) とは，各格子点上に推移確率と待ち時間をそれぞれランダムに与え，それに従い格子上をランダムウォークする粒子のモデルである．今回この RWREHT に対し，ランダムウォークの平均から大きく離れた "稀な事象" の確率の漸近的な振る舞いを評価する大偏差原理と呼ばれる極限定理の研究を行った．各格子点での待ち時間が常に 1 の場合 (すなわち，後述の単にランダム媒質中のランダムウォーク) の大偏差原理については，近年，積極的に研究されている (例えば，[2, 4])．一方，RWREHT の場合は Dembo，Gantert，Zeitouni らの結果 [1] のみであった．そこではランダムな推移確率・待ち時間についてかなり一般のエルゴード性を仮定するのみであるが，状態空間は一次元格子 $\mathbb{Z}$ で，かつランダムな推移確率と待ち時間それぞれに対しある種の下からの一様評価を必要とする．今回の結果では，独立性を仮定をした場合ではあるが，[1] の結果を多次元へ拡張し，さらにランダムな推移確率・待ち時間に対する一様評価を弱めることに成功した．同時に，大偏差原理の評価の指標である rate function についても比較的明確な表現を得ることができた．

以下では，RWREHT のより詳しい設定と結果について説明する．まず，ランダム媒質中のランダムウォーク (以下，RWRE と表す) を定義する．$d \geqslant 1$ とする．$\mathcal{P}_1$ を $\mathcal{E}_d := \{e \in \mathbb{Z}^d; |e| = 1\}$ 上の確率測度全体の集合とし，$\Omega := \mathcal{P}_1^{\mathbb{Z}^d}$ とする．Ω に標準的な直積 σ-加法族 $\mathcal{G}$ と直積測度 $\mathbb{P} := \mu^{\otimes \mathbb{Z}^d}$ (μ は $\mathcal{P}_1$ 上の確率測度) を与え確率空間 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ を考える．各 $\omega = (\omega(x, \cdot))_{x \in \mathbb{Z}^d} \in \Omega$ に対し，次の $\mathbb{Z}^d$ 上のマルコフ連鎖 $((X_n)_{n=0}^{\infty}, (P_\omega^x)_{x \in \mathbb{Z}^d})$ によって RWRE を定義する: $P_\omega^x(X_0 = x) = 1$，かつ

$$P_\omega^x(X_{n+1} = y + e | X_n = y) = \omega(y, e), \qquad n \in \mathbb{N}_0,\ y \in \mathbb{Z}^d,\ e \in \mathcal{E}_d.$$

次に，ランダムな待ち時間を定義する．$\mathcal{P}_2$ を $(0, \infty)$ 上の確率測度全体の集合とする．$\Sigma := \mathcal{P}_2^{\mathbb{Z}^d}$ とし，これに標準的な直積 σ-加法族 $\mathcal{S}$ と直積測度 $\mathbf{P} := \nu^{\otimes \mathbb{Z}^d}$ (ν は $\mathcal{P}_2$ 上

* kubota@grad.math.cst.nihon-u.ac.jp

の確率測度) を与え確率空間 $(\Sigma, \mathcal{S}, \mathbf{P})$ を考える．Σ の要素を $\sigma = (\sigma_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ と表し，$(\tau_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0, x\in\mathbb{Z}^d} \in (0,\infty)^{\mathbb{N}_0\times\mathbb{Z}^d}$ を独立な確率変数列で，各 $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して $\tau_n(x)$ の法則が σ_x であるものとする．この確率変数 $\tau_n(x)$ をランダムな待ち時間と呼び，それらの列 $(\tau_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0, x\in\mathbb{Z}^d}$ に対する法則を P_σ^{HT} で表すことにする．

上で定義した RWRE とランダムな待ち時間に対して RWREHT を定義する．RWRE $(X_n)_{n=0}^\infty$ とランダムな待ち時間 $(\tau_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0, x\in\mathbb{Z}^d}$ に対して，$\mathbb{Z}^d$ 上の連続時間ランダムウォーク $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ を次のように定義し，それを RWREHT と呼ぶ:

$$Z_t := X_n, \qquad \text{if } \sum_{m=0}^{n-1} \tau_m(X_m) \leqslant t < \sum_{m=0}^{n} \tau_m(X_m).$$

ここで，$\sum_{m=0}^{-1} \tau_m(X_m) := 0$. また，$\widetilde{P}_{\omega,\sigma}^x := P_\omega^x \otimes P_\sigma^{\mathrm{HT}}$ とし，これに対応する期待値を $\widetilde{E}_{\omega,\sigma}^x$ で表すことにする．同様に，P_ω^x, P_σ^{HT} に対応する期待値を E_ω^x, E_σ^{HT} とする．

以下，全体を通して次の 2 つの条件を仮定する:

(A1) $\log \min_{|e|=1} \omega(0,e) \in L^d(\mathbb{P})$ かつ $\int_0^\infty s\, \sigma_0(ds) \in L^d(\mathbf{P})$.

(A2) $\mathrm{supp}\Big(\mathrm{law}\big(\sum_{|e|=1} \omega(0,e)e\big)\Big)$ の convex hull に原点 0 が含まれる．

以上の設定の下で，次の定理が今回の結果である．

Theorem 1. 法則 $\widetilde{P}_{\omega,\sigma}^0(Z_t/t \in \cdot)$ に対して大偏差原理が成立する: $\mathbb{R}^d$ 上のすべてのボレル集合 Γ に対して，$\mathbb{P}\otimes\mathbf{P}$-a.s. で

$$-\inf_{x\in\Gamma^o} I(x) \leqslant \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \widetilde{P}_{\omega,\sigma}^0(Z_t/t \in \Gamma) \leqslant -\inf_{x\in\overline{\Gamma}} I(x)$$

が成立する．ここで，rate function I は後述の Lyapunov exponent $\alpha_\lambda(\cdot)$ を用いて

$$I(x) = \sup_{\lambda\geqslant 0} (\alpha_\lambda(x) - \lambda)$$

で与えられる．

最後に上の定理に現れる Lyapunov exponent $\alpha_\lambda(\cdot)$ について簡単に説明する．これは大雑把に言えば，ランダムウォークに対する出発点からある点への traveling cost を表すもので，エルゴード定理を用いることにより次のように定められる量である:

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n} \log \widetilde{E}_{\omega,\sigma}^0 \left[\exp\{-\lambda H^Z(ny)\} \mathbb{1}_{\{H^Z(ny)<\infty\}} \right] \right) = \alpha_\lambda(y). \tag{1}$$

ここで，$H^Z(ny)$ はランダムウォーク $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ の点 ny への初到達時刻である．(1) の左辺の期待値は，フビニの定理とランダムな待ち時間の独立性を用いることにより

$$\begin{aligned}&E_\omega^0\left[E_\sigma^{\mathrm{HT}}\left[\exp\left\{-\lambda\sum_{m=0}^{H^X(ny)-1}\tau_n(X_n)\right\}\mathbb{1}_{\{H^X(ny)<\infty\}}\right]\right]\\&=E_\omega^0\left[\exp\left\{-\sum_{m=0}^{H^X(ny)-1}\theta_{\lambda,\sigma}(X_m)\right\}\mathbb{1}_{\{H^X(ny)<\infty\}}\right].\end{aligned} \tag{2}$$

と変形できる．ここで，$H^X(ny)$ は RWRE $(X_n)_{n=0}^\infty$ の点 ny への初到達時刻で，

$$\theta_{\lambda,\sigma}(z) := -\log\int_0^\infty e^{-\lambda s}\sigma_z(ds).$$

(2) より，$\theta_{\lambda,\sigma}(\cdot)$ をランダムポテンシャルとして持つ RWRE $(X_n)_{n=0}^\infty$ の traveling cost として，RWREHT に対する traveling cost を捉えることができる．これにより，大偏差原理について研究が進んでいるランダムポテンシャル中のシンプルランダムウォーク (例えば，[3]) の技術を RWRE の場合へ拡張させることができれば，RWREHT の解析に繋がることが分かり，それが今回の結果を得るためのポイントとなっている．

References

[1] Amir Dembo, Nina Gantert, and Ofer Zeitouni. Large deviations for random walk in random environment with holding times. *Ann. Probab.*, Vol. 32, No. 1B, pp. 996–1029, 2004.

[2] S.R.S. Varadhan. Large deviations for random walks in a random environment. *Communications on Pure and Applied mathematics*, Vol. 56, No. 8, pp. 1222–1245, 2003.

[3] Martin P. W. Zerner. Directional decay of the Green's function for a random nonnegative potential on $\mathbf{Z}^d$. *Ann. Appl. Probab.*, Vol. 8, No. 1, pp. 246–280, 1998.

[4] Martin P. W. Zerner. Lyapounov exponents and quenched large deviations for multidimensional random walk in random environment. *Ann. Probab.*, Vol. 26, No. 4, pp. 1446–1476, 1998.

最大値半自己分解可能分布

西郷達彦　山梨大学医学工学総合研究部

1　概要

無限分解可能分布は確率変数列の和の極限分布からつくられる (Sato(99)) が、この和の代わりに最大値をとった極限分布からつくられるクラスが極値分布 (Resnick(87)) である。無限分解可能分布の理論と極値理論には次表で示す通り顕著に相似した構造がある。

無限分解可能 （特性関数）	確率変数列の和 $\hat{\mu}(z) = \hat{\mu}_n(z)^n$	最大値無限分解可能 （分布関数）	確率変数列の最大値 $F(x) = F_n(x)^n$
自己分解可能 （特性関数）	独立確率変数列の和 $\hat{\mu}(z) = \hat{\mu}(bz)\hat{\rho}(z)$	最大値自己分解可能 （分布関数）	独立確率変数列の最大値 $F(x) = F(T_\beta x)F_\beta(x)$
安定 （特性関数）	i.i.d. 確率変数列の和 $\hat{\mu}(z)^a = \hat{\mu}(bz)e^{i\langle c,z\rangle}$	最大値安定 （分布関数）	i.i.d. 確率変数列の最大値 $F^t(x) = F(T_t(x))$

和に関する自己分解可能分布は極限定理もしくは特性関数の満たす方程式によって決まるが、同様に最大値自己分解可能分布も極限定理もしくは特性関数の満たす方程式により決定する。最大値自己分解可能分布は Gerritse(86) および Pancheva(90) で導入された。今回は最大値半自己分解可能分布について和の枠組における Maejima Sato Watanabe(99) の論文を参考にその表現と性質を明らかにした。

2　諸定義

$\overline{\mathbb{R}}^d (= [-\infty,\infty)^d)$ 値確率ベクトルの列 $\mathbb{X}_k = \left(X_k^{(i)},\ i = 1,\ldots,d\right),\ k = 1,\ldots,n$ に対し、最大値ベクトルを

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{X}_1 \vee \ldots \vee \mathbb{X}_n = \left(\max_{1\le j\le n} X_j^{(i)},\ i = 1,\ldots,d\right)$$

とおき、$\overline{\mathbb{R}}^d$ 上の連続 $\vee-$ 自己同型写像 L（$L(x \vee y) = L(x) \vee L(y)$ で逆像あり）の集合を $\mathrm{GMA}\left(\overline{\mathbb{R}}^d\right)$ と書く。

定義 1 (最大値無限分解可能)　$\mathbb{Z}_n = \mathbb{X}_{n1} \vee \ldots \vee \mathbb{X}_{nk(n)}$ なる列について $P(\mathbb{Z}_n < x) \xrightarrow{\mathrm{w}} F(x)$ となり、また $F(x) > 0$ なる F の連続点 x で無限小の条件

$$\max_{1\le j\le k_n} P\left(\mathbb{X}_{nj} > x\right) \to 0, \quad n \to \infty$$

を満たすとする。ただし不等号は d 個の各要素について考える。このとき極限分布を最大値無限分解可能分布と言い、そのクラスを MID と表す。$F \in \mathrm{MID}$ ならば、任意の自然数 n について分布 F_n が存在し $F(x) = F_n(x)^n$ となる。

定義 2 (最大値自己分解可能)　独立な列 $\{\mathbb{X}_k\}$ から作る $\mathbb{Z}_n$ を基準化した分布関数の列 $\{F_n\}$ が非退化の分布関数 F に弱収束する、すなわち次式を満たすものとする。

$$F_n(x) := P(L_n^{-1}\mathbb{Z}_n < x) \xrightarrow{\mathrm{w}} F(x), \quad n \to \infty,\ L_n \in \mathrm{GMA}\left(\overline{\mathbb{R}}^d\right)$$

さらに $F(x) > 0$ なる F の連続点 x で無限小の条件 $\max_{1\le j\le n} P\left(L_n^{-1}\mathbb{X}_j > x\right) \to 0,\quad n \to \infty$ を満たすとき、極限分布 F を最大値自己分解可能と言い、そのクラスを MSD と書く。$\mathbb{X}_{nj} = L_n^{-1}\mathbb{X}_j$ とすれば、$\mathrm{MSD} \subset \mathrm{MID}$ がわかる。またこのとき任意の $\beta \in (0,1]$ に対し $T_\beta(x) = \lim L_{[n\beta]}^{-1} \cdot L_n(x)$ として、$F_\beta \in \mathrm{MID}$ が存在し、$F(x) = F(T_\beta x)F_\beta(x)$ と分解できる。また $\mathcal{T} = \left\{T_\beta : \beta \in (0,1]\right\}$ は半群 $T_\alpha(T_\beta x) = T_{\alpha\cdot\beta}(x),\ \alpha,\beta \in (0,1]$ となる。

以上の知られている事実を和に関する半自己分解可能と同様の枠組みで捉えなおすことを考える。

定義 3（最大値半自己分解可能） 独立な列 $\{\mathbb{X}_k\}$ から作る $\mathbb{Z}_n$ を基準化した分布関数の部分列 $\{F_n\}$ が非退化の分布関数 F に弱収束する、すなわち以下を満たすものとする。

$$F_n(x) := P(L_n^{-1}\mathbb{Z}_{k_n} < x) \xrightarrow{\mathrm{w}} F(x), \quad n \to \infty, L_n \in \mathrm{GMA}$$

ここで無限小の条件を仮定する。このとき極限分布 F は最大値半自己分解可能と言い、そのクラスを MSSD と表す。クラス MSD は MSSD の部分集合である。MSD と同様にある $\beta \in (0,1]$ に対して次の分解がある。

$$F(x) = F(T_\beta x)F_\beta(x),\ F_\beta \in \mathrm{MID},$$

ここで $\mathcal{T} = \left\{T_\beta\right\} \subset \mathrm{GMA}\left(\overline{\mathbb{R}}^d\right)$ は 1 パラメータの半群である。

ある分布が MID となることは、次のような exponential measure が存在することと同値であることが知られている。(Resnick(87)) すなわち $\overline{\mathbb{R}}^d$ 上の測度 μ が $q = -\infty$ 以外で σ-有限であり、$F(x) = \exp(-\mu(A_x^c))$ と表される。ただし $x = (x_1, \ldots, x_d), A_x = [-\infty, x_1] \times \ldots \times [-\infty, x_d]$ である。

最大値無限分解可能分布の表現の準備をする。$S_\beta = \{x \in \mathbb{R}^d; \max|x| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\} \le 1,\ \max|T_\beta x| > 1\}$ おく。定義 3 で $\beta \in (0,1)$ について $T_\beta x > x$ を満たすことから、$m \neq n$ のとき $T_\beta^m S_\beta \cap T_\beta^n S_\beta =$ となり、さらに $\mathbb{R}^d = \bigcup_{k=0}^\infty T_\beta^k S_\beta$ と全空間を分割できる。

3 結果

命題 (最大値無限分解可能分布の表現) μ を $F \in \mathrm{MID}$ の exponential measure とする。このとき S_β 上の有限測度 μ_0 と各 $n \in \mathbb{Z}$ でボレル可測な関数 $g_n : S_\beta \to [0,\infty)$ が存在し以下を満たす。また逆にこのような条件を満たすように作った測度は $F \in \mathrm{MID}$ の exponential measure となる。

(a) $A \in \mathcal{B}(S_\beta)$ について $\mu_0(A) = 0$ のとき、またその時に限り $\mu(T_\beta^n A) = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}$,

(b) 任意のコンパクト集合 A について $\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n(x)\mathbf{1}_A(T_\beta^n x) < \infty$.

(c) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n(x) > 0,\ \mu_0 - a.e.$,

(d) $\mu(A) = \displaystyle\int_{S_\beta} \mu_0(dx) \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n(x)\mathbf{1}_A(T_\beta^n x),\ \forall A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d)$.

このような $\{\mu_0, g_n, n \in \mathbb{Z}\}$ は次のような意味で一意に決まる。すなわち $\{\mu_0, g_n, n \in \mathbb{Z}\}$ と $\{\tilde{\mu}_0, \tilde{g}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ が上の条件を満たすなら、ボレル可測な関数 $h(x)$ で $0 < h(x) < \infty$ なるものが存在し、以下を満たす。

$$\tilde{\mu_0}(dx) = h(x)\mu_0(dx), \quad g_n(x) = h(x)\tilde{g}_n(x),\ \mu_0 - a.e., \forall n \in \mathbb{Z}.$$

定理 (最大値半自己分解可能分布の特徴づけ) F が最大値半自己分解可能分布であることと、上の表現の関数 $g_n(x)$ が $g_n(x) - g_{n+1}(x) \ge 0$ を満たすことは同値である。

4 参考文献

- Gerritse, G. (1986) Supremaum self-decomposable random vectors *Prob. Theory Relat. Fields* **72** 17–33.
- Maejima, M., Sato, K. and Watanabe, T.(1999) Operator Semi-Selfdecomposability, (C, Q)- Decomposablity and Related Nested Classes Tokyo J. Math **22** No.2 473–509.
- Pancheva, E. I.(1990) Selfdecomposable Distributions for Maxima of Independent Random Vectors *Prob. Theory Relat. Fields* **84** 267–278
- Resnick, S. I. (1987) *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes* Springer-Verlag.
- Sato, K. (1999) *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions* Cambridge University Press.

多重ゼータ関数の確率論への応用

青山崇洋 (東京理科大学理工学部)
(中村隆氏 (東京理大) との共同研究)

1. 多変数関数と多次元離散分布

ある多変数関数が与えられた際, それが特性関数であるか否かを判定することは, 対応する測度が確率分布となることが自明でない場合には困難である. 確率論において 1 次元の連続, 離散分布及び多次元の連続分布は多くの例が存在する. また, それら自身と対応する関数の性質が確率論への有用性を示していることは周知の事実である. しかし, 多次元の離散分布に限っては他に比べて取り扱える関数の例が非常に少ない. 本講演は, 多重ゼータ関数を用いることにより無限個の点に重みを持つ多次元の離散分布を新たに導入することを目的としている. 更に確率論への応用を見据え, それらが無限分解可能となるのがいつなのかについても議論する.

2. ゼータ関数

ゼータ関数は 18 世紀の L. Euler による特殊値の研究に端を発し, 幅広く数学に関わる分野の研究対象となっている関数である. 現在様々なゼータ関数が存在するが, 最も基本となるのは次である.

定義 2.1 (リーマン・ゼータ関数 ([5] 参照))**.** $z = \sigma + \mathrm{i}t,\ \sigma > 1,\ t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

をリーマン・ゼータ関数という.

リーマン・ゼータ関数は関数等式等を用いて $\mathbb{C}$ 上に解析接続可能であることは良く知られている. また, $\sigma > 1$ であるとき ζ は絶対収束し, 零点を持たない. これを非零絶対収束領域と呼ぶことにする. この時 ζ は以下の無限積の形で書き表せられる.

命題 2.2 ([5] 参照)**.** $z = \sigma + \mathrm{i}t,\ \sigma > 1,\ t \in \mathbb{R}$ のとき,

$$\zeta(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - p^{-z}\right)^{-1} \tag{1}$$

と書ける. ここで $\mathbb{P}$ は素数全体である.

(1) の右辺はオイラー積と呼ばれ, この命題は同時に素数が無限個存在することを示している.

3. リーマン・ゼータ分布

ゼータ関数と確率論の関係は様々あるが, その中に以下のリーマン・ゼータ分布と呼ばれる $\mathbb{R}$ 上の確率分布が存在する. 非零絶対収束領域 $\sigma > 1$ において次の関数 f を用意する.

$$f_\sigma(t) := \frac{\zeta(\sigma + \mathrm{i}t)}{\zeta(\sigma)},\ t \in \mathbb{R}.$$

この ζ を正規化した関数 f は特性関数になることが知られている. 以下, μ を $\mathbb{R}$ 上の確率分布, $\widehat{\mu}$ をその特性関数とする.

定義 3.1 (リーマン・ゼータ分布 ([6] 参照))**.** $\sigma > 1$ に対して,

$$\widehat{\mu}_\sigma(t) = f_\sigma(t),\ t \in \mathbb{R}$$

と書けるとき μ_σ をリーマン・ゼータ分布という.

このリーマン・ゼータ分布は最も古い文献として [7] に記されているが, その性質は以下に挙げることを除いてほぼ知られていない.

命題 3.2 ([6] 参照)**.** $\mathbb{R}$ 上のリーマン・ゼータ分布は複合ポアソン分布ある. また, そのレヴィ測度 N_σ は有限かつ次のように書ける.

$$N_\sigma(dx) = \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{p^{-r\sigma}}{r} \delta_{r\log p}(dx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. 多重ゼータ関数の構成と多次元のゼータ分布の導入

整数論の分野において多重ゼータ関数の研究が 1990 年代以降盛んに行われ, 現在も新たな多重ゼータ関数が導入されている. しかし, その研究内容には確率論の観点はない. 一方, ゼータ関数とその零点の関係はリーマン予想を代表とする最も重要な研究課題の一つである. 3 節において $\mathbb{R}$ 上のリーマン・ゼータ分布は複合ポアソンであると述べたが, それは同時に無限分解可能であることを意味する. また, 無限分解可能分布の特性関数は零点を持たない. これらの事実を踏まえて我々はこれまで 1 次元, 非零絶対収束領域でしか考えられていなかったゼータ分布を多次元, 絶対収束領域に拡張する為, [3], [4] において以下の新谷型多重ゼータ関数を新たに導入している.

定義 4.1 (多次元新谷ゼータ関数, $Z_S(\vec{s})$, ([3], [4]))**.** $d, m, r \in \mathbb{N}$, $\vec{s} \in \mathbb{C}^d$, $(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ とする. このとき $\lambda_{lj}, u_j > 0$, $\vec{c}_l \in \mathbb{R}^d$ $(1 \leq j \leq r,\ 1 \leq l \leq m)$ 及び, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $|\theta(n_1, \ldots, n_r)| = O((n_1 + \cdots + n_r)^\varepsilon)$ を満たす複素数値関数 $\theta(n_1, \ldots, n_r)$ に対し, $Z_S(\vec{s})$ が多次元新谷ゼータ関数とは,

$$Z_S(\vec{s}) := \sum_{n_1, \ldots, n_r = 0}^{\infty} \frac{\theta(n_1, \ldots, n_r)}{\prod_{l=1}^{m} (\lambda_{l1}(n_1 + u_1) + \cdots + \lambda_{lr}(n_r + u_r))^{\langle \vec{c}_l, \vec{s} \rangle}}, \quad \min_{1 \leq l \leq m} \Re\langle \vec{c}_l, \vec{s} \rangle > r/m.$$

この多次元新谷ゼータ関数は単に確率分布を定義する, またそのモーメントを計算することは容易であるが, その無限分解可能性を示すことは困難である. そこで, [2] において更に無限分解可能性を得る為, 以下の多重オイラー積を新たに導入した.

定義 4.2 (多次元多重オイラー積, $Z_E(\vec{s})$, ([2]))**.** $d, m \in \mathbb{N}$, $\vec{s} \in \mathbb{C}^d$ とする. ここで $-1 \leq \alpha_{lp} \leq 1$, $\vec{a}_l \in \mathbb{R}^d$ $(1 \leq l \leq m)$ に対し, $Z_E(\vec{s})$ が多次元多重オイラー積とは,

$$Z_E(\vec{s}) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \prod_{l=1}^{m} \left(1 - \alpha_{lp} p^{-\langle \vec{a}_l, \vec{s} \rangle}\right)^{-1}, \quad \min_{1 \leq l \leq m} \Re\langle \vec{a}_l, \vec{s} \rangle > 1. \tag{2}$$

以下, $\vec{s} := \vec{\sigma} + \mathrm{i}\vec{t}$, $\vec{\sigma}, \vec{t} \in \mathbb{R}^d$ に対し,

$$f_{\vec{\sigma}}\left(\vec{t}\right) := \frac{Z_E\left(\vec{\sigma} + \mathrm{i}\vec{t}\right)}{Z_E(\vec{\sigma})}.$$

定理 4.3 ([2])**.** (2) において $\vec{a}_1 = \cdots = \vec{a}_m := \vec{a}$, $\alpha_{lp} = 0, \pm 1$ を満たすとする. このとき $f_{\vec{\sigma}}$ が特性関数となる必要十分条件は, 任意の $p \in \mathbb{P}$ に対し, $\sum_{l=1}^{m} \alpha_{lp} \geq 0$. 更にこのとき $f_{\vec{\sigma}}$ は $\mathbb{R}^d$ 上の複合ポアソンとなり, そのレヴィ測度 $N_{\vec{\sigma}}^{(\vec{a})}$ は有限かつ次のように書ける.

$$N_{\vec{\sigma}}^{(\vec{a})}(dx) = \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{r} \alpha_{lp}^r p^{-r\langle \vec{a}, \vec{\sigma} \rangle} \delta_{\log p^r \vec{a}}(dx), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

以下, $\vec{a} \in \mathbb{R}^d$ に対し, $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^d$ が線形従属であるが有理数 ($\mathbb{Q}$) 上一次独立であるとは, $\mathbb{Q}$ 上一次独立な代数的数 ψ_l $(1 \leq l \leq m)$ が存在し, $\vec{a}_l = \psi_l \vec{a}$ と書けることとする. また, 線形独立 (LI), 線形従属であるが $\mathbb{Q}$ 上一次独立 (LR) とする.

定理 4.4 ([2])**.** (2) において $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ が (LI) または (LR) を満たすとする．このとき $f_{\vec{\sigma}}$ が特性関数となる必要十分条件は，任意の $1 \leq l \leq m$, $p \in \mathbb{P}$ に対し，$\alpha_{lp} \geq 0$. 更にこのとき $f_{\vec{\sigma}}$ は $\mathbb{R}^d$ 上の複合ポアソンとなり，そのレヴィ測度 $N_{\vec{\sigma}}$ は有限かつ次のように書ける．

$$N_{\vec{\sigma}}(dx) = \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{r} \alpha_{lp}^r p^{-r\langle \vec{a}_l, \vec{\sigma} \rangle} \delta_{\log p^r \vec{a}_l}(dx), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

定理 4.3 は $\mathbb{R}$(実際には $\mathbb{Q}$) 上の数の一次独立性, 定理 4.4 は $\mathbb{R}^d$ 上のベクトルの線形独立性から成る基底の上に各々リーマンゼータ分布を貼り合わせていることを示している．そこでそれらを併せ持った形として以下の多重オイラー積を用意する．

定義 4.5 (η 重 φ 階オイラー積, $Z_E^{\eta,\varphi}(\vec{s})$, ([2]))**.** $d, \varphi, \eta \in \mathbb{N}$, $\vec{s} \in \mathbb{C}^d$ とする．ここで $-1 \leq \alpha_{lk}(p) \leq 1$, $\vec{a}_l \in \mathbb{R}^d$, $1 \leq l \leq \varphi$, $1 \leq k \leq \eta$ に対し, $Z_E^{\eta,\varphi}(\vec{s})$ が η 重 φ 階オイラー積とは,

$$Z_E^{\eta,\varphi}(\vec{s}) := \prod_p \prod_{l=1}^{\varphi} \prod_{k=1}^{\eta} \left(1 - \alpha_{lk}(p) p^{-\langle \vec{a}_l, \vec{s} \rangle}\right)^{-1}, \quad \min_{1 \leq l \leq \varphi} \Re \langle \vec{a}_l, \vec{s} \rangle > 1. \tag{3}$$

注 4.6. $m = \varphi \times \eta$ とすると, $Z_E^{\eta,\varphi}$ は多次元多重オイラー積である．

このとき, 定理 4.3, 4.4 を融合した形として以下を得る．

定理 4.7 (主定理, [2])**.** (3) において $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_\varphi$ が *(LI)* または *(LR)*, $\alpha_{lk}(p) = 0, \pm 1$ を満たすとする．このとき $f_{\vec{\sigma}}$ が特性関数となる必要十分条件は，任意の $1 \leq l \leq \varphi$, $p \in \mathbb{P}$ に対し，$\sum_{k=1}^{\eta} \alpha_{lk}(p) \geq 0$. 更にこのとき $f_{\vec{\sigma}}$ は $\mathbb{R}^d$ 上の複合ポアソンとなり，そのレヴィ測度 $N_{\vec{\sigma}}^{\eta,\varphi}$ は有限かつ次のように書ける．

$$N_{\vec{\sigma}}^{\eta,\varphi}(dx) = \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\varphi} \sum_{k=1}^{\eta} \frac{1}{r} \alpha_{lk}(p)^r p^{-r\langle \vec{a}_l, \vec{\sigma} \rangle} \delta_{\log p^r \vec{a}_l}(dx).$$

多次元多重オイラー積の最も簡単な例として, 2 次元有限積の場合を [1] において取り扱っている．本講演では [2] を中心に [1], [3], [4] においてこれまで得られた結果及び互いの関連性の概要を述べる予定である．

参考文献

[1] Aoyama, T. and Nakamura, T., Behaviors of multivariable finite Euler products in probabilistic view, submitted, (2012), http://arxiv.org/abs/1204.4043.

[2] Aoyama, T. and Nakamura, T., Multidimensional polynomial Euler products and infinitely divisible distributions on $\mathbb{R}^d$, submitted, (2012), http://arxiv.org/abs/1204.4041.

[3] Aoyama, T. and Nakamura, T., Multidimensional Shintani zeta functions and zeta distributions on $\mathbb{R}^d$, submitted (2012) http://arxiv.org/abs/1204.4042.

[4] Aoyama, T. and Nakamura, T., Zeros of zeta functions and zeta distributions on $\mathbb{R}^d$, Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects – Kyoto 2010 RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B34** (2012), 39–48.

[5] Apostol, T. M., *Introduction to Analytic Number Theory, Undergraduate Texts in Mathematics*, Springer, 1976.

[6] Gnedenko, B. V. and Kolmogorov, A. N., *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables.* Translated from the Russian by Kai Lai Chung, MA: Addison-Wesley, 1968.

[7] Khinchine, A. Ya., *Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables (in Russian)*, Moscow and Leningrad, 1938.

自由確率論における
非減少レヴィ過程の分布について

佐久間紀佳（愛知教育大）

平成 24 年 12 月 21 日（金）10:30〜11:00

本講演では自由確率論における非減少レヴィ過程 (subordinator) の分布の性質について報告する. 以下すべて分布は 1 次元のものを考える. $\mathcal{P}_+$ で $[0,\infty)$ 上のボレル確率測度全体の集合とする.

確率論において非減少レヴィ過程 (subordinator) の分布の性質については次のことが知られている. 詳細については Sato[2] や Steutel and van Harn[3] を参照してほしい.

命題 1. (1) 非減少レヴィ過程 $(X_t)_{t \geqq 0}$ の分布族を $(\mu_t)_{t \geqq 0}$ とする. レヴィ-ヒンチン表現が次の形である: $\eta' \geqq 0$ と $\nu((-\infty,0])) = 0$ かつ $\int_{(0,\infty)} \min(1,x)\nu(dx) < \infty$ をみたす $\mathbb{R}$ 上の測度 ν が存在し

$$\mathcal{C}^*_{\mu_t}(z) := \log\left(\int_{\mathbb{R}} e^{izx}\mu_t(dx)\right) = it\eta' z + t\int_{(0,\infty)} (e^{izx}-1)\nu(dx)$$

である

(2) 任意の $t \geqq 0$ に対して, $\mathrm{supp}(X_t) \subset [0,\infty)$

(3) $\inf(\mathrm{supp}(X_1)) = b$ ならば $\inf(\mathrm{supp}(X_t)) = bt$

(4) 二つの独立な非減少レヴィ過程 $(X_t)_{t \geqq 0}$ $(Y_t)_{t \geqq 0}$ の積は $(Z_t = X_tY_t)_{t \geqq 0}$ は必ずしもレヴィ過程にならない

この命題の (2) は非減少レヴィ過程の保存的な性質「分布が非負の領域に集中している」ということである. 他方, (4) は保存的でない性質, 確率過程の積というものを考えたときにその分布の無限分解可能性は保存されない, というものである. このような非減少レヴィ過程の分布の性質をみながら自由確率論におけるその対応物をドイツ Saarlandes 大学 Octavio Arizmendi 氏, 京都大学の長谷部高広氏と考察した.

自由確率論の基本的設定については講演の初めで解説する. (前日の長谷部氏の講演でも一部触れられることと思う.) ここでは簡潔にどういうものかだけ述べておく. 通常の測度論に基づく確率論における「独立性」の概念を変形して確率変数が「確率変数の積」について非可換な場合の自然な独立性の一つとして「自由独立性」というものが Voiculescu により提唱された. その独立性の元での畳み込みなどの基本的な確率論の概念が整備された. それぞれ確率分布 μ,ν に従う自由独立な確率変数の和の分布を $\mu \boxplus \nu$ と表し, 同様に自由独立な確率変数の積の分布を $\mu \boxtimes \nu$ と表す. これらはランダム行列の解析に応用されている.

無限分解可能性の概念は $\boxplus$ の概念を用いて自由確率論でも同様に考えられている. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してある確率分布 μ_n が存在して次が成立するとき μ は自由無限分解可能分布という:

$$\mu = \underbrace{\mu_n \boxplus \cdots \boxplus \mu_n}_{n\text{ 個}}$$

確率分布 μ が自由無限分解可能ならば確率論のときと同様 $\mu^{\boxplus t}$ が任意の $t \geqq 0$ に対して定義される.

確率論のときと同様に自由無限分解可能分布に対して, レヴィ-ヒンチン表現が知られている. 自由確率論においては特性関数（フーリエ変換）を用いる代わりに R-変換と呼ばれる変換が用いられる. 確率分布 μ の R-変換とは次で定義される:

$$R_\mu = zG_\mu^{(-1)}(z) - 1$$

ここで $G_\mu^{(-1)}(z)$ は確率分布 μ のコーシー変換 $G_\mu(z) = \int \frac{\mu(dx)}{z-x}$ $(z \in \mathbb{C}^+)$ の合成についての右逆元とする. μ が自由無限分解可能分布であるとき $a \geqq 0, \eta \in \mathbb{R}$ とレヴィ測度 ν（すなわち $\nu(\{0\}) = 0$ と $\int \min(1, x^2)\nu(dx) < \infty$ をみたす $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上の測度）が存在して次を満たす:

$$R_\mu(z) = az^2 + \eta z + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1-zx} - 1 - xz\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \right) \nu(dx), \quad z \in \mathbb{C}^-. \tag{1}$$

また逆に, 確率分布 μ の R 変換が上の表現を持てば μ は自由無限分解可能である.

この表現は確率論における無限分解可能分布のレヴィ-ヒンチン表現に対応している. μ が無限分解可能であれば $a \geqq 0, \eta \in \mathbb{R}$ とレヴィ測度 ν が存在して次を満たす:

$$\mathcal{C}_\mu^*(z) := \log\left(\int_{\mathbb{R}} e^{izx}\mu(dx) \right) = -\frac{az^2}{2} + i\eta z + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{izx} - 1 - izx\mathbb{1}_{[-1,1]} \right) \nu(dx)$$

したがって無限分解可能の研究の中でこれらの無限分解可能分布, 自由無限分解可能分布を特徴付ける (a, ν, η) が同じもの同士を対応させる写像 Bercovici-Pata 写像 $\Lambda : I^* \to I^{\boxplus}$ が提唱された. ここで $I^*, I^{\boxplus}$ は無限分解可能分布全体の集合および自由無限分解可能分布全体の集合とする.

ここで非減少レヴィ過程の自由確率論における対応物を Bercovici-Pata 写像により定義する.

自由非減少レヴィ過程 (free subordinator)

分布族 $(\rho_t)_{t \geqq 0}$ に対して, ある分布族が $(\mu_t)_{t \geqq 0}$ をもつ非減少レヴィ過程 $(X_t)_{t \geqq 0}$ が存在して, $(\rho_t = \Lambda(\mu_t))_{t \geqq 0}$ であるとき, この $(\rho_t)_{t \geqq 0}$ から構成される自由レヴィ過程を自由減少レヴィ過程 (free subordinator) と呼ぶことにする. $I_{r+}^{\boxplus}$ を自由非減少レヴィ過程の分布全体の集合とし, 自由正則無限分解可能分布のクラスと呼ぶ.

I_{r+}^* を減少レヴィ過程の分布全体の集合とする. $I_{r+}^* = I^* \cap \mathcal{P}_+$ であることに気をつけよ.

結論

自由非減少レヴィ過程の分布の性質を解説する. Bercovici-Pata 写像の定義より自由非減少レヴィ過程の分布のレヴィ-ヒンチン表現は類似の形で成り立つ. また時間発展の

元で「分布が非負の領域に集中している」ということも成立する. ところが分布の台の下限は確率論の場合のときのように単純に変化しない. そのためか,「分布が非負の領域に集中している無限分解可能分布を時刻 1 の分布として構成されるレヴィ過程は必ず非減少レヴィ過程である」ということがいえなくなる. そして確率過程の積の分布の無限分解可能性については確率論のときより強い事実が成立する.

定理 2. $\mu, \nu \in I_{r+}^{\boxplus}$, $\sigma \in I^{\boxplus}$ とする. このとき以下が成立する.

(1) $\mu \boxtimes \nu \in I_{r+}^{\boxplus}$.

(2) $\mu^{\boxtimes t} \in I_{r+}^{\boxplus}$ が $t \geqq 1$ のとき成立.

(3) $\mu^{\uplus t} \in I_{r+}^{\boxplus}$ が $0 \leqq t \leqq 1$ のとき成立.

(4) $\mu \boxtimes \sigma \in I^{\boxplus}$.

ここで $\uplus$ は Boolean 畳み込みと呼ばれる非可換確率論における別の独立性の元での畳み込みである.

複合自由ポアソン分布

複合測度 ν, パラメータ $\lambda > 0$ の複合自由ポアソン分布 $\pi_{\lambda,\nu}$ は

$$\mu_n = \left(\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\delta_0 + \frac{\lambda}{n}\nu\right)^{\boxplus n}$$

の極限分布として定義される.

定理 3. μ を対称な確率分布, m を次の密度をもつ自由ポアソン分布とする: $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4-x}{x}}$.

(1) $\mu \in I^{\boxplus}$ ならばある $\sigma \in I_{r+}^{\boxplus}$ が存在して $\mu^2 = \mathrm{m} \boxtimes \sigma$. とくに, $\mu^2 \in I_{r+}^{\boxplus}$. 逆に, $\sigma \in I_{r+}^{\boxplus}$ ならば $\mathrm{Sym}\left((m \boxtimes \sigma)^{1/2}\right) \in I^{\boxplus}$. ここで, $\mathrm{Sym}(\nu)$ は $\nu \in \mathcal{P}_+$ の対称化である: $\mathrm{Sym}(\nu)(dx) := \frac{1}{2}\left(\nu(dx) + \nu(-dx)\right)$.

(2) μ がパラメータ λ をもつ複合自由ポアソン分布で複合測度として ν をもつならば, (1) の σ もまたパラメータ λ をもつ複合自由ポアソン分布で複合測度として ν^2 をもつ.

この定理と正規分布が自由無限分解可能であるということ [1] やコーシー分布が自由無限分解可能であることから χ^2-分布や $F(1,1)$-分布が自由無限分解可能であることが従う.

References

[1] S. T. Belinschi, M. Bożejko, F. Lehner, and R. Speicher. The normal distribution is $\boxplus$-infinitely divisible. *Adv. Math.*, 226(4):3677–3698, 2011.

[2] K. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, volume 68 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Translated from the 1990 Japanese original, Revised by the author.

[3] F. W. Steutel and K. van Harn. *Infinite divisibility of probability distributions on the real line*, volume 259 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, 2004.

Strong solutions of infinite-dimensional SDEs and random matrices

2012/12/21/金　長田博文 (九州大学)・種村秀紀 (千葉大学)

$S=\mathbb{R}^d,\mathbb{C},(0,\infty)$ その他のユークリッド空間の適当な部分集合とする。この講演では、S 内の無限個のラベルをつけた粒子の運動を表す SDE、つまり、S^N 上の SDE の一意的強解を構成する新しい方法を述べる。それを用いて、特に、Airy 点過程を平衡分布とする干渉ブラウン運動を表現する SDE の一意的強解の存在を示す。従来知られていた、時空間の相関関数による確率力学による構成と一致することを示す。

1　SDE の強解の新しい同値概念

SDE の強解を構成する手法は、汎用性を持つので、一般の非マルコフ型の SDE の場合について述べる。

Let $W(S^{\mathbb{N}})=C([0,T);S^{\mathbb{N}})$, where $0<T<\infty$. Let W_{sol} be a Borel subset of $W(S^{\mathbb{N}})$. Let $\sigma^i,b^i: W_{\mathrm{sol}}\to W(S^{\mathbb{N}})$. Let $\mathbf{S}_0$ be a Borel subset of $S^{\mathbb{N}}$.

We consider a quadruplet $(\{\sigma^i\},\{b^i\},W_{\mathrm{sol}},\mathbf{S}_0)$ and the ISDE on $S^{\mathbb{N}}$ of the form

$$dX_t^i=\sigma^i(\mathbf{X})_t dB_t^i+b^i(\mathbf{X})_t dt \quad (i\in\mathbb{N}) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{X}_0=\mathbf{s}=(s_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathbf{S}_0 \tag{1.2}$$

$$\mathbf{X}\in W_{\mathrm{sol}}. \tag{1.3}$$

Here $\mathbf{X}=\{\mathbf{X}_t\}_{t\in[0,T)}=\{(X_t^i)_{i\in\mathbb{N}}\}_{t\in[0,T)}\in W_{\mathrm{sol}}$, $\{B^i\}$ $(i\in\mathbb{N})$ is the $S^{\mathbb{N}}$-valued standard Br motion.

(P1) The ISDE (1.1) has a solution $(\mathbf{X},\mathbf{B})\in W(S^{\mathbb{N}})\times W^{\mathbf{0}}(S^{\mathbb{N}})$ for each $\mathbf{s}\in\mathbf{S}_0$.

For a prob meas $\bar{P}_{\mathbf{s}}$ on $W(S^{\mathbb{N}})\times W^{\mathbf{0}}(S^{\mathbb{N}})$ we denote by $\bar{P}_{\mathbf{s},\mathbf{B}}$ the regular conditional prob

$$\bar{P}_{\mathbf{s},\mathbf{B}}=\bar{P}_{\mathbf{s}}(\mathbf{X}\in\cdot|\mathbf{B}),\quad \mathbf{P}_{\mathbf{s}}=\bar{P}_{\mathbf{s}}(\mathbf{X}\in\cdot),\quad P_{\mathrm{Br}}^{\infty}=\bar{P}_{\mathbf{s}}(\mathbf{B}\in\cdot) \tag{1.4}$$

For a path $\mathbf{X}=(X_t^i)_{i\in\mathbb{N}}\in W(S^{\mathbb{N}})$ and $m\in\mathbb{N}$, consider $\mathbf{X}^{m*}=(0,\dots,0,X_t^{m+1},X_t^{m+2},\dots)\in W(S^{\mathbb{N}})$. For $\mathbf{X}\in W_{\mathrm{sol}}$, $\mathbf{s}\in\mathbf{S}_0$, and $m\in\mathbb{N}$, we introduce a new SDE (1.5) on $\mathbf{Y}^m=(Y_t^1,\dots,Y_t^m)$.

$$dY_t^i=\sigma^i(\mathbf{Y}^m+\mathbf{X}^{m*})_t dB_t^i+b^i(\mathbf{Y}^m+\mathbf{X}^{m*})_t dt \quad (i=1,\dots,m) \tag{1.5}$$

$$\mathbf{Y}_0^m=(s_1,\dots,s_m)\in S^m,\quad \text{where } \mathbf{s}=(s_i)_{i=1}^{\infty},$$

$$\mathbf{Y}^m+\mathbf{X}^{m*}\in W_{\mathrm{sol}}. \tag{1.6}$$

Here $\mathbf{X}^{m*}$ is interpreted as a part of the coefficients of the SDE (1.5), and we set

$$\mathbf{Y}^m+\mathbf{X}^{m*}=(Y_t^1,\dots,Y_t^m,X_t^{m+1},X_t^{m+2},\dots). \tag{1.7}$$

(P2) For each $\mathbf{s}\in\mathbf{S}_0$ and $\mathbf{X}\in W_{\mathrm{sol}}^{\mathbf{s}}$, the SDE (1.5) has a unique, strong solution for each $m\in\mathbb{N}$.

Let $\mathit{Tail}\,(W(S^{\mathbb{N}}))$ be the tail σ-field of $W(S^{\mathbb{N}})$, and for a probability measure $\mathbf{P}$ on $W(S^{\mathbb{N}})$ we set

$$\mathit{Tail}\,(W(S^{\mathbb{N}}))=\bigcap_{m=1}^{\infty}\sigma[\mathbf{X}^{m*}],\quad \mathit{Tail}^{[1]}(\mathbf{P})=\{A\in\mathit{Tail}\,(W(S^{\mathbb{N}}))\,;\,\mathbf{P}(A)=1\}. \tag{1.8}$$

(P3) For each $\mathbf{s}\in\mathbf{S}_0$, the tail σ-field $\mathit{Tail}\,(W(S^{\mathbb{N}}))$ is $\mathbf{P}_{\mathbf{s}}$-trivial.

We state the main theorems in this section.

Theorem 1. (1) *Assume* (P1)-(P3). *Then ISDE* (1.1)-(1.3) *has a strong solution for each* $\mathbf{s}\in\mathbf{S}_0$.
(2) *Assume* (P2). *Let* $\mathbf{Y}_{\mathbf{s}}$ *and* $\mathbf{Y}'_{\mathbf{s}}$ *be strong solutions of ISDE* (1.1)-(1.3) *starting at* $\mathbf{s}\in\mathbf{S}_0$ *defined on the same space of Brownian motions* $\mathbf{B}$. *Then* $\mathbf{Y}_{\mathbf{s}}=\mathbf{Y}'_{\mathbf{s}}$ *a.s. if and only if*

$$\mathit{Tail}^{[1]}(\mathrm{Law}(\mathbf{Y}_{\mathbf{s}}))=\mathit{Tail}^{[1]}(\mathrm{Law}(\mathbf{Y}'_{\mathbf{s}})). \tag{1.9}$$

2 Tail theorems

上述の仮定 (P1)-(P3)のうち、最初の二つは、[1], [2], [3] の一般論で、確かめることができる。(P3)は**ラベル**パス空間上の確率測度の tail 自明性を要求するものだが、この章では、これが**配置**空間の点過程の tail 自明性から導くことができることを示す。ここでも、一般的な枠組みで述べる。

Let S be the configuration space over S. Set $S_r = \{s \in S\,;\, |s| < r\}$. Let $\mathit{Tail}\,(\mathsf{S}) = \bigcap_{r=1}^{\infty} \sigma[\pi_{S_r^c}]$ be the tail σ-field of S. Let μ be a prob measure on S.

(Q1) $\quad \mathit{Tail}\,(\mathsf{S})$ is μ-trivial.

Let $W(\mathsf{S}) = C([0,T];\mathsf{S})$ and write $\mathsf{X} = \{\mathsf{X}_t\}_{0\le t\le T} \in W(\mathsf{S})$. We lift the μ-triviality of $\mathit{Tail}\,(\mathsf{S})$ to a triviality of the labeled path spaces $W(S^{\mathbb{N}})$. For this we equip S with a subset S_0 and a family of probability measures $\{\mathsf{P}_{\mathsf{s}}\}_{\mathsf{s}\in\mathsf{S}_0}$ on $W(\mathsf{S})$. We call $\{\mathsf{P}_{\mathsf{s}}\}_{\mathsf{s}\in\mathsf{S}_0}$ **a lift dynamics**.

(Q2) There exists a Borel set S_0 and a family of prob meas $\{\mathsf{P}_{\mathsf{s}}\}_{\mathsf{s}\in\mathsf{S}_0}$ on $W(\mathsf{S})$ satisfying (2.1)–(2.3).

$$\mu(\mathsf{S}_0) = 1,, \quad \mathsf{P}_{\mathsf{s}}(\mathsf{X}_0 = \mathsf{s}) = 1 \quad \text{for all } \mathsf{s} \in \mathsf{S}_0 \tag{2.1}$$

$$\mathsf{P}_{m\mu}^{\mathsf{X}_t} \prec \mu \text{ for all } 0 \le t \le T,\ m \in L^2(\mu). \tag{2.2}$$

$$\text{The density } p(t,\mathsf{s},\mathsf{t}) \text{ is } \mathcal{B}([0,T]) \times \mathcal{B}(\mathsf{S}) \times \mathcal{B}(\mathsf{S})\text{-measurable.} \tag{2.3}$$

Here $\mathsf{P}_{m\mu}^{\mathsf{X}_t} = \mathsf{P}_{m\mu} \circ \mathsf{X}_t^{-1}$, $\mathsf{P}_{m\mu} = \int_{\mathsf{S}} \mathsf{P}_{\mathsf{s}} m(\mathsf{s})\mu(d\mathsf{s})$, and $p(t,\mathsf{s},\mathsf{t}) = \mathsf{P}_{\mathsf{s}} \circ \mathsf{X}_t^{-1}(d\mathsf{t})/d\mu$.

(Q3) $\quad \mathsf{P}_{\mathsf{s}}(W(\mathsf{S}_{\mathrm{s.i.}})) = 1$ for all $\mathsf{s} \in \mathsf{S}_0$, where $\mathsf{S}_{\mathrm{s.i.}} = \{\mathsf{s}\,;\, \mathsf{s}(S) = \infty,\ \mathsf{s}(\{x\}) \le 1 \text{ for all } x \in S\}$.

Let $\mathfrak{l}(\mathsf{s}) = (\mathfrak{l}_n(\mathsf{s}))_{n\in\mathbb{N}}$ be a label. Let $\mathfrak{l}_{\mathrm{path}}$ be the map $\mathfrak{l}_{\mathrm{path}} : W(\mathsf{S}_{\mathrm{s.i.}}) \to W(S^{\mathbb{N}})$ such that $\mathfrak{l}_{\mathrm{path}}(\mathsf{X})_0 = \mathfrak{l}(\mathsf{X}_0)$. By definition $\mathsf{X}_t = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{X_t^n}$ and $\mathbf{X}_t = (X_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ for all t.

(Q4) There exists an increasing sequence $\{\mathsf{K}^i\}$ of compact sets in S such that

$$\lim_{i\to\infty} \mathsf{P}_{m\mu}(W(\mathsf{K}^i)) = 1, \quad \mathsf{M}_r^i < \infty \text{ for all } i, r \in \mathbb{N} \tag{2.4}$$

Here we set $\mathsf{M}_r^i = \inf\{m \in \mathbb{N}\,;\, X^n \in W(S_r^c) \text{ for all } m \le n \in \mathbb{N},\ \mathsf{X} \in W(\mathsf{K}^i)\}$.

Theorem 2. *Assume* (Q1)–(Q4). *Let* $\mathbf{P}_{\mathbf{s}} = \mathsf{P}_{\mathsf{s}} \circ \mathfrak{l}_{\mathrm{path}}^{-1}$, $\mathbf{s} = \mathfrak{l}(\mathsf{s})$, *and* $\mu^{\mathfrak{l}} = \mu \circ \mathfrak{l}^{-1}$. *Let* $\mathcal{G}$ *be a sub* σ*-field of* $\mathcal{T}_{\mathrm{path}}(S^{\mathbb{N}})$. *Assume that* $\mathcal{G}$ *is countably determined under* $\{\mathbf{P}_{\mathbf{s}}\}_{\mathbf{s}\in\mathbf{S}_0}$. *Then*
(1) $\mathcal{G}$ *is* $\mathbf{P}_{\mathbf{s}}$*-trivial for* $\mu^{\mathfrak{l}}$*-a.s.* $\mathbf{s}$.
(2) *For* $\mu^{\mathfrak{l}}$*-a.s.* $\mathbf{s}$, *the set* $\mathcal{T}_{\mathrm{path}}^{[1]}(S^{\mathbb{N}}, \mathcal{G}; \mathbf{P}_{\mathbf{s}}) = \{\mathbf{A} \in \mathcal{G}\,;\, \mathbf{P}_{\mathbf{s}}(\mathbf{A}) = 1\}$ *is independent of* $\mathbf{s}$ *and the particular choice of* $\{\mathsf{P}_{\mathsf{s}}\}_{\mathsf{s}\in\mathsf{S}_0}$ *in* (Q2).

3 干渉ブラウン運動の一意的強解

この章では、今までの結果を干渉ブラウン運動に適用する。

We begin by introducing the ISDE. Let H be a measurable subset in S. Let $\mathfrak{u}$ be the unlabel map, and set $\mathbf{H} = \mathfrak{u}^{-1}(\mathsf{H})$. Let $\sigma^i : S \times \mathsf{H} \to (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ and $\mathsf{b}^i : S \times \mathsf{H} \to (\mathbb{R}^{d^2})^{\mathbb{N}}$ be measurable functions. Let $\mathbf{X} = (X_t^i)_{i\in\mathbb{N}} \in W(S^{\mathbb{N}})$ and set $\mathsf{X}_t = \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_{X_t^i}$, $\mathsf{X}_t^{i*} = \sum_{j\in\mathbb{N},\, j\ne i} \delta_{X_t^j}$. Consider the ISDE.

$$dX_t^i = \sigma(X_t^i, \mathsf{X}_t^{i*})dB_t^i + \mathsf{b}(X_t^i, \mathsf{X}_t^{i*})dt \tag{3.1}$$

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{s} \in \mathbf{H} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{X}_t \in \mathbf{H} \quad \text{for all } t \in [0,T]. \tag{3.3}$$

We set $\mathsf{a}(x,\mathsf{y}) = \sigma(x,\mathsf{y})^t \sigma(x,\mathsf{y})$ and assume

(R1) μ has a log derivative $\mathsf{d}_\mu(x,\mathsf{y})$ and $\mathsf{b}(x,\mathsf{y}) = \frac{1}{2}\{\nabla_x \mathsf{a}(x,\mathsf{y}) + \mathsf{a}(x,\mathsf{y})\mathsf{d}_\mu(x,\mathsf{y})\}$.

(R2) μ is a (Φ,Ψ)-quasi Gibbs measure, and (Φ,Ψ) is upper semicontinuous.

(R3) $(\mathcal{E}^\mu, \mathcal{D}^\mu)$ is a quasi-regular Dirichlet form on $L^2(\mathsf{S},\mu)$.

(R4) H is a subset of $\mathsf{S}_{\mathrm{s.i.}}$ satisfying $\mathrm{Cap}^\mu(\mathsf{H}^c) = 0$. Here $\mathsf{H} = \mathfrak{u}(\mathbf{H})$.

(R5) Each tagged particles are non-explosive.

(R6) The coefficients a and b satisfy "local Lipschitz conditions".

Let μ_{t} be the regular conditional probability defined by $\mu_{\mathsf{t}} = \mu(\cdot \,|\, \mathit{Tail}\,(\mathsf{S}))(\mathsf{t})$. Then

$$\mu(\mathsf{A}) = \int_{\mathsf{S}} \mu_{\mathsf{t}}(\mathsf{A})\mu(d\mathsf{t}), \text{ and } \mu_{\mathsf{t}}(\mathsf{A}) \text{ is } \mathit{Tail}\,(\mathsf{S})\text{-measurable for each } \mathsf{A} \in \mathcal{B}(\mathsf{S}). \tag{3.4}$$

Lemma 3. *Assume that μ is a quasi-Gibbs measure. Then $\mathit{Tail}\,(\mathsf{S})$ is μ_{t}-trivial for μ-a.s. t.*

Theorem 4. *Assume* (R1)–(R6). *Then there exists $\mathbf{S}_0$ such that $\mu(\mathsf{S}_0) = 1$ satisfying the following:*
(1) *The ISDE* (3.1)–(3.3) *has a strong solution $(\mathbf{X}, \mathbf{P}_{\mathbf{s}})$ for each $\mathbf{s} \in \mathbf{S}_0$ such that $\{(\mathbf{X}, \mathbf{P}_{\mathbf{s}})\}_{\mathbf{s}\in\mathbf{S}_0}$ is a $\mathbf{S}_0$-valued diffusion. The associated unlabeled processes $\{(\mathsf{X}, \mathsf{P}_{\mathsf{s}})\}_{\mathsf{s}\in\mathsf{S}_0}$ is a S_0-valued, μ-reversivle diffusion. Here $\mathsf{S}_0 = \mathfrak{u}(\mathbf{S}_0)$.*
(2) *$\mathbf{S}_0$ can be decomposed as a disjoint sum $\mathbf{S}_0 = \sum_{\mathsf{t}\in \mathit{Tail}\,(\mathsf{S})/\sim} \mathbf{S}_{0,\mathsf{t}}$ such that $\mu_{\mathsf{t}}(\mathsf{S}_{0,\mathsf{t}}) = 1$, where $\mathsf{S}_{0,\mathsf{t}} = \mathfrak{u}(\mathbf{S}_{0,\mathsf{t}})$, and that the subcollection $\{(\mathsf{X}, \mathsf{P}_{\mathsf{s}})\}_{\mathsf{s}\in\mathsf{S}_{0,\mathsf{t}}}$ are $\mathsf{S}_{0,\mathsf{t}}$-valued, μ_{t}-reversivle diffusion satisfying*

$$\mathsf{P}_{\mu_{\mathsf{t}}} \circ \mathsf{X}_t^{-1} \prec \mu_{\mathsf{t}} \quad \textit{for all } t \quad \textit{for } \mu\textit{-a.s. } \mathsf{t}. \tag{3.5}$$

(3) *A family of strong solutions $\{(\mathbf{X}, \mathbf{P}_{\mathbf{s}})\}_{\mathbf{s}\in\mathbf{S}_0}$ of* (3.1)–(3.3) *satisfying* (3.5) *is unique for $\mu^{\mathfrak{l}}$-a.s. $\mathbf{s}$.*

Remark 1. (1)以上の定理は、(自明な制約を除く) すべての Ruelle クラスポテンシャルを持つ Gibbs 測度、Dyson model ($\beta = 1,2,4$), Airy 点過程 ($\beta = 1,2,4$), Bessel 点過程 ($\beta = 2$), Ginibre 点過程 ($\beta = 2$) に適用できる。また、これらを満たす様々な例が、今後も見つかっていくと思われる。
(2) 強解の一意性から、Dirichlet 形式の一意性の問題も、あるレベルで、解決できる。特に、Lang による構成と、長田による構成が (tail が自明な場合は) 等しいことが分かる。
(3) 「準 Gibbs 性」、「対数微分」、「相関関数の局所有界性」、「微小変動」、「非衝突」、「非爆発」の 6 つの確率幾何的性質を確認すれば、以上の一般論を適用できる。目標とすべきクラスの例は、Airy, Sine, Bessel の β ensemble や Gaussian analytic function の零点である。

Lemma 5. *The Airy point process with $\beta = 2$ has a trivial tail.*

Theorem 6. *The Airy dynamics given by the space-time correlation functions is the unique strong solution of the ISDE*

$$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{r\to\infty}\{(\sum_{j\neq i,\ |X_t^j|<r} \frac{1}{X_t^i - X_t^j}) - \int_{|x|<r} \frac{\varrho(x)}{-x}dx\}dt \quad (i \in \mathbb{N})$$

Here $\varrho(x) = \frac{\sqrt{-x}}{\pi} 1_{(-\infty,0)}(x)$.

参考文献

[1] Osada, H., *Tagged particle processes and their non-explosion criteria*, J. Math. Soc. Japan, **62**, No. **3** (2010), 867-894.

[2] Osada, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices*,, Probability Theory and Related Fields, Vol 153, pp 471-509.

[3] Osada, H., *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials*, (to appear in AOP) available at "http://arxiv.org/abs/0902.3561" (arXiv:0902.3561v2 [math.PR]).

ROTATION INVARIANT PROCESS から導かれる SDE のオイラー丸山近似の収束について

TAKAHIRO TSUCHIYA

Abstract

まず次の以下の確率微分方程式を考える:

$$dX(t) = (2\beta X(t) + \delta(t))\,dt + g(X(t))dW(t), \tag{1}$$

ただし $(W(t))_{t\geq 0}$ は Wiener 過程で, $X(0) \geq 0, \beta \leq 0$. また δ は非負な 2 乗可積分な Adapted measurable 関数, $\int_0^t \delta^2(s)ds < +\infty$ a.s. for all $t \geq 0$ であり, g は Hölder 連続性を持つとする:

$$|g(x) - g(y)| \leq K|x-y|^{\frac{1}{2}},$$

ここで K は正の定数. この解は一意的で強解となり, また比較定理が成り立つので解は $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ を離れることはない. この確率微分方程式は数理ファイナンスにおいて瞬間金利を記述する際に重要な役割を果たす.

さて $n \in \mathbb{N}$ とし, 区間 $[0, T]$ に関する分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ を考え, これを Δ_n と書く. 特に等間隔に T/n 分割する場合は $\Delta_{\bar{n}}$ とし, $\|\Delta_n\| := \max_k(t_{k+1} - t_k)$ とおく. Delbaen et. al. [1] に従って確率微分方程式 (1) の解をについて次の離散近似, Euler-丸山近似 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える. $X_n(0) = X(0)$ として,

$$X_n(t) = X_n(t_k) + 2\beta X_n(t_k)(t - t_k) + \delta(t_k)(t - t_k) + g_+(X_n(t_k))(W(t) - W(t_k))$$

または $t_k \leq t < t_{k+1}$ であるとき $\eta_n(t) = t_k$ とする関数 η_n を導入して,

$$X_n(t) = X_n(0) + \int_0^t (2\beta X_n(\eta_n(s)) + \delta(\eta_n(s)))\,ds + \int_0^t g_+(X_n(s))dW(s)$$

として定める. g の定義域が正であることから Euler-丸山近似が定義されるために $g_+(x) := g(x1_{(x>0)})$ とした. ここで拡散項の定義域に制限がなく, かつリプシッツ連続性を有すれば自然に Euler-丸山近似等が考えられ, それらの収束の速さまでわかっている (例えば [3]) ことに注意する. 彼らは [1] において全ての $\omega \in \Omega$ に対し $\sup_u \delta(u)(\omega) \in L^1$ であれば上記の意味での Euler-丸山近似 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の解の収束は L^1-supnorm, すなわち強収束し, 加えてその収束のオーダーは山田-渡邉の定理 [2] に導入された関数を用いて $\|\Delta_n\|^{\frac{1}{2}}$ と上から評価できることを示した.

そして Gyongy et. al. によって以下のように整理された.

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \tag{2}$$

ここで b はリプシッツ連続関数 f および単調減少関数 g によって $b = f + g$ となり, σ は $(1/2 + \gamma)$-Hölder 連続性を満たするとする:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K|x-y|, \;\; |g(t,x) - g(t,y)| \leq K|x-y|^{\theta}, \;\; |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|^{\frac{1}{2}+\gamma}.$$

ただし $K > 0$ であり $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$. そして確率微分方程式 (2) に対し $\Delta_{\bar{n}}$ における Euler-丸山近似 $(X_{\bar{n}})_{\bar{n}\in\mathbb{N}}$ を考える.

$$dX_{\bar{n}}(t) = b(t, X_{\bar{n}}(\eta_n(t))dt + \sigma(t, X_{\bar{n}}(\eta_n(t))dW(t)$$

彼らは [4] において L^1-norm における収束の速さが上から

$$E[|X_{\bar{n}}(t) - X(t)|] \le \begin{cases} C/(\log n), & \gamma = 0 \\ C/(n^\gamma + n^{\frac{\theta}{2}}), & \gamma > 0 \end{cases} \tag{3}$$

C は正の定数として評価できることを示した．これによって，その L^p-supnorm の評価を得ている．これは拡散項の連続性が 1/2-Hölder であり，ドリフト項 b が拡散項に比較して小さい場合は収束が遅くなることは数値計算によって知られており [5]，それと整合性がある結果となっている．

0.1. 中尾-LeGall 条件 (Wiener driven SDEs). 本講演では，この Euler-丸山近似の収束の速さについて，弱解の存在が知られている重要なクラス，中尾-LeGall 条件の下で考える．

Definition 1. 中尾-*LeGall* 条件とは以下を満たすこと，

(1) 正の数 ϵ と K があって任意の $x \in \mathbb{R}$ で次が成立する:

$$\epsilon \le \sigma(x) \le K.$$

(2) 有界な増加関数 f が存在し，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ で次が成り立つ:

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \le |f(x) - f(y)|^{\frac{1}{2}}.$$

ところが上記した Delbaen et. al. や Gyongy et. al の議論に加えて，局所時間の議論をあわせることで収束の速さを評価することが出来ることを示す．

0.2. Hölder 条件 (Jump-type SDEs). Rotation invariant 過程 $(Z(t))_{t\ge0}$ から導かれる確率微分方程式

$$dX(t) = \sigma(t, X(t-))dZ(t), \tag{4}$$

に焦点を当てて考える．確率積分の意味は [6] に従うものとする．そして Δ_n における Euler-丸山近似 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$dX_n(t) = \sigma(t, X_n(\eta_n(t))dZ(t).$$

と書くことにする．まず次の Hölder 連続性条件が満たされるとする．

Definition 2 (Hölder)**.** 正の数 $K > 0$ および $\gamma \in \left[0, 1 - \frac{1}{\alpha}\right]$ があって，

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \le |x - y|^{\frac{1}{\alpha} + \gamma}.$$

が成立するときに σ は $(\frac{1}{\alpha} + \gamma)$-*Hölder* 連続，もしくは誤解のないときは単に *Hölder* 連続という．

この下で Euler-丸山近似 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考えると確率微分方程式 (4) の解の存在して強解になることが (厳密にはもう少し一般的なクラスで)[7] において示される．その収束の速さを調べる Delbaen et. al. が用いた山田-渡邉の関数を少し修正したものを考える．具体的には $\int_{\epsilon\delta^{-1}}^{\epsilon} y^{-1}dy = \log\delta$ を念頭にして次のような関数 $u_{\delta\epsilon}$ を構成する．

Lemma 1. $\epsilon > 0$, $\delta > 1$ に対して滑らかな関数 $\varphi_{\delta\epsilon}$ を以下が満たされるように満たすように選ぶ，

$$\varphi_{\delta\epsilon}(x) = \begin{cases} 0 & : |x| \ge \epsilon \\ \text{between 0 and } (x\log\delta)^{-1} & : \epsilon\delta^{-1} < |x| < \epsilon \\ 0 & : |x| \le \epsilon\delta^{-1} \end{cases},$$

そして $u_{\delta\epsilon} = u * \varphi_{\delta\epsilon}$ と定義する．ここで $u(x) = |x|^{\alpha-1}$．すると全ての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|x|^{\alpha-1} \leq u_{\delta\epsilon}(x) + \epsilon^{\alpha-1}, \ \left|u'_{\delta\epsilon}(x)\right| \leq \frac{\delta}{\log\delta}\epsilon^{\alpha-2} \tag{5}$$

が成立する．

これらと伊藤公式および Emery の不等式を用いることで (3) に対応する $L^{(\alpha-1)}$-norm の評価を得ることができることを示す．

References

[1] G. Deelstra, F. Delbaen, *Convergence of discretized stochastic (interest rate) processes with stochastic drift term*, Appl. Stochastic Models Data Anal. 14 (1998) 77-84.

[2] T. Yamada, S. Watanabe, *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations*, J. Math. Kyoto Univ. **11** (1971), 155-167.

[3] P. E. Kloeden and E. Platen, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.

[4] I. Gyongy and M. Rasonyi, *A note on Euler approximations for SDEs with Hölder continuous diffusion coefficients*, Stochastic Processes and their Applications, **121** (2011), 2189-2200.

[5] A. Alfonsi, *On the discretization schemes for the CIR (and Bessel squared) processes*, Monte Carlo Methods Appl. **11** (2005), 355-384.

[6] R. F. Bass, *Stochastic differential equations driven by symmetric stable processes*, Séminaire de Probabilités, XXXVI, 302-313, Lecture Notes in Math., 1801, Springer, Berlin, 2003. (CMP 1 971 592) MR1971592.

[7] H. Hashimoto, *Approximation and stability of solutions of SDEs driven by a symmetric α stable process with non-Lipschitz coefficients.*, to appear in seminaire de probabilites (2012).

E-mail address: `suci@probab.com`

Dept. of Computer Science, Aizu University,

ガウス型べき級数の実零点過程の相関関数とパフィアン

松本 詔 (名古屋大・多元数理),　白井朋之（九州大 IMI）

Kac [2] は実確率変数を係数にもつランダム多項式 $f_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ ($\{a_k\}_{k=0}^n$ は i.i.d. な実標準正規分布をもつ確率変数列) の実零点の個数の期待値について，その積分表示を与えることにより Littlewood-Offord らの得た結果を精密化した．さらに，Shepp-Vanderbei [4] は $f_n(t)$ の複素零点の分布を調べている．本講演では，Kac の多項式 f_n において $n = \infty$ としたべき級数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (|z| < 1)$$

の零点過程についての結果を述べる．関連する研究として, Peres-Virág [3] は $f_{\mathbb{C}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k z^k$ ($\{\zeta_k\}_{k=0}^{\infty}$ は i.i.d. な複素標準正規分布をもつ確率変数列) の零点が，Bergman 核に付随する複素単位円板上の行列式点過程を定めることを示している．

まず，$f(z)$ の実零点について述べる．以下，$I = (-1, 1)$ とする．$\{f(t)\}_{t \in I}$ は実ガウス過程でその共分散核は $\sigma(s,t) := \mathbb{E}[f(s)f(t)] = \frac{1}{1-st}$ となる．結果を述べるためにパフィアンの定義を思い出しておこう．$2n \times 2n$ 交代行列 $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le 2n}$ のパフィアン $\mathrm{Pf}\, B$ は

$$\mathrm{Pf}\, B = \sum_{\eta \in \mathcal{F}_n} \epsilon(\eta) b_{\eta(1)\eta(2)} b_{\eta(3)\eta(4)} \cdots b_{\eta(2n-1)\eta(2n)}$$

と定義される．ただし，$\epsilon(\eta)$ は置換 η の符号，また

$$\mathcal{F}_n := \{\eta \in \mathcal{S}_{2n} \mid \eta(2i-1) < \eta(2i) (i = 1, 2, \ldots, n),\ \eta(1) < \eta(3) < \cdots < \eta(2n-1)\}.$$

次の定理 1 は，f の実零点過程がパフィアン点過程となることを述べている．

定理 1. f の実零点過程のルベーグ測度に関する n 点相関関数 $\rho_n(t_1, \ldots, t_n)$ は，次のようにパフィアンで与えられる．$t_1, t_2, \ldots, t_n \in I$ に対し，

$$\rho_n(t_1, \ldots, t_n) = \pi^{-n}\, \mathrm{Pf}(\mathbb{K}(t_i, t_j))_{1 \le i,j \le n}.$$

各 $\mathbb{K}(s,t)$ は 2×2 行列で以下で与えられ，$(\mathbb{K}(t_i, t_j))_{1 \le i,j \le n}$ は $2n \times 2n$ 交代行列となる．

$$\mathbb{K}(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\mathbb{K}_{22}(s,t) & \frac{\partial}{\partial s}\mathbb{K}_{22}(s,t) \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{K}_{22}(s,t) & \mathbb{K}_{22}(s,t) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{K}_{22}(s,t) = \mathrm{sgn}(t-s) \arcsin \frac{\sigma(s,t)}{\sqrt{\sigma(s,s)\sigma(t,t)}}$$

ただし，$\mathrm{sgn}\, t$ は $t > 0$ で $\mathrm{sgn}\, t = +1$，$t < 0$ で $\mathrm{sgn}\, t = -1$，$t = 0$ のときは $\mathrm{sgn}\, 0 = 0$ と定める．$\mathbb{K}(s,t)$ の成分を具体的に書き下すと，

$$\mathbb{K}_{11}(s,t) = \frac{s-t}{\sqrt{(1-s^2)(1-t^2)(1-st)^2}}, \qquad \mathbb{K}_{12}(s,t) = \sqrt{\frac{1-t^2}{1-s^2}} \frac{1}{1-st},$$

$$\mathbb{K}_{21}(s,t) = -\sqrt{\frac{1-s^2}{1-t^2}} \frac{1}{1-st}, \qquad \mathbb{K}_{22}(s,t) = \mathrm{sgn}(t-s) \arcsin \frac{\sqrt{(1-s^2)(1-t^2)}}{1-st}.$$

RIMS 研究集会「確率論シンポジウム」, Dec. 18-21, 2012.

定理 1 の証明は，次の絶対値のモーメント $E[|f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)|]$ を求める問題に帰着される．

定理 2. $t_1, t_2, \ldots, t_n \in I$ が互いに異なるとき，

$$E[|f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)|] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} (\det\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Pf}(\mathbb{K}(t_i,t_j))_{1\le i,j\le n}$$

が成り立つ．ここで，$\Sigma = (\sigma(t_i,t_j))_{1\le i,j\le n}$ とした．

また，次のように $f(t)$ の符号の偶数次モーメント $E[\operatorname{sgn} f(t_1)\cdots \operatorname{sgn} f(t_{2n})]$ もパフィアンで書ける．なお，n が奇数の場合，$E[\operatorname{sgn} f(t_1)\cdots \operatorname{sgn} f(t_n)]$ は恒等的に零である．

定理 3. $t_1, t_2, \ldots, t_{2n} \in I$ が互いに異なるとき，

$$E[\operatorname{sgn} f(t_1)\operatorname{sgn} f(t_2)\cdots \operatorname{sgn} f(t_{2n})] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n} \prod_{1\le i<j\le 2n} \operatorname{sgn}(t_j - t_i)\cdot \operatorname{Pf}(\mathbb{K}_{22}(t_i,t_j))_{1\le i,j\le 2n}$$

が成り立つ．

また，$f(z)$ の複素零点もまたパフィアン点過程となる．

定理 4. $z_1, z_2, \ldots, z_n$ は $|z_i| < 1, \Im z_i > 0$ をみたす複素数とする．$f(z)$ の複素零点の n 点相関関数は

$$\rho_n^c(z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{(\pi\sqrt{-1})^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{|1-z_j^2|}\cdot \operatorname{Pf}(\mathbb{K}^c(z_i,z_j))_{1\le i,j\le n}.$$

で与えられる．ただし，$\mathbb{K}^c(z,w)$ は 2×2 行列核で

$$\mathbb{K}^c(z,w) = \begin{pmatrix} \frac{z-w}{(1-zw)^2} & \frac{z-\bar{w}}{(1-z\bar{w})^2} \\ \frac{\bar{z}-w}{(1-\bar{z}w)^2} & \frac{\bar{z}-\bar{w}}{(1-\bar{z}\bar{w})^2} \end{pmatrix}$$

定理 1 と定理 4 については，独立に Forrester [1] がランダム行列の方法で示している．われわれはランダム行列理論を経由せず，ガウス過程の零点の相関関数に関する公式と，石川・川向・岡田によるパフィアンに関する等式を用いた．定理 2 と定理 3 はその副産物である．

参考文献

[1] P. J. Forrester, The limiting Kac random polynomial and truncated random orthogonal matrices, available at `http://arxiv.org/abs/1009.3066`

[2] M. Kac, On the average number of real roots of a random algebraic equation, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 314–320.

[3] Y. Peres and B. Virág, *Zeros of the i.i.d. Gaussian power series: a conformally invariant determinantal process*, Acta Math. **194** (2005), 1–35.

[4] L.A. Shepp and R.J.Vanderbei, The complex zeros of random polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 4365–4384.

確率論シンポジウム予稿　20121221@RIMS

カオスの伝播とカットオフ現象：Ehrenfests模型の場合

東京大学生産技術研究所　高橋陽一郎

1 Propagation of chaos

M.Kac 1956, 1979; H.McKean 1966; H.Tanaka, K.Uchiyama, A.S.Sznitman, $\cdots$
.

Definition 1. *Let S be a Polish space, $\mu \in \mathcal{P}(S)$ and $\mu^{(N)} \in \mathcal{P}(S^N)$ be symmetric for each $N \geq 1$. We say that the sequence $\mu^{(N)}$ is μ-chaotic if the projections of $\mu^{(N)}$ to S^k converges weakly to $\mu^{\otimes k}$ for any fixed $k \geq 1$.*

Example 2 (H.Poincaré). *Let $\mu^{(N)}$ be the uniform measure on $\{x \in \mathbb{R}^N : x_1^2 + \cdots + x_N^2 = N\}$. Then $\mu^{(N)}$ is μ-chaotic with μ the standard Gaussian measure on $\mathbb{R}$.*

The sequence $\mu^{(N)}$ is μ-chaotic if and only if

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} = \mu \quad in\ \mathcal{P}(S) \tag{1}$$

where x_i's are canonical coordinates in S^N(Tanaka, Uchiyama, Sznitman).

Definition 3. *We say a sequence of Markov processes $X^{(N)}$ on S^N propagates chaos if the laws $\mu^N(t)$ of $X^{(N)}$ are $\mu(t)$-chaotic for some $\mu(t) \in \mathcal{P}(S)$ whenever $\mu^{(N)}(0) = \mu^{\otimes N}$ for some $\mu \in \mathcal{P}(S)$.*

Example 4 (T.Shiga and H.Tanaka 1985). *Let $Q(x, x'; \cdot)$, $x, x' \in S$ be bounded nonnegative kernel with $Q(x, x'; \{x\}) = 0$ and let*

$$Q_v\phi(x) = \int_S \int_S \nu(dx')Q(x, x', dy)(\phi(y) - \phi(x)), \quad \phi \in \mathcal{C}_b(S),\ \nu \in \mathcal{P}(S).$$

Consider an interacting N-particle Markov process $X^{(N)}(t) = (X_1^{(N)}(t), \ldots, X_N^{(N)}(t))$ on S^N with generator $Q^{(N)} = \sum_{i=1}^N Q_{\nu_N}^{(i)}$, $\nu_N = \sum_{i=1}^N$. Then, $X^{(N)}(t)$ propagates chaos and μ_t is the solution of

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), \phi\rangle = \langle u(t), Q_{u(t)}\phi\rangle, \quad u(0) = \mu(0).$$

2 Cut-off phenomenon

P.Diaconis-M.Shahshani 1981, D.Adous 1983, Adous-Diaconis 1983, Diaconis-R.L.Graham-J.A.Morrison 1990, Diaconis 1996, A.Hora 1997, $\cdots$

Definition 5 (simple random walk on hypercubes). *Let $N \geq 1$. The simple random walk $X^{(N)}(n)$ on the hypercube $\{0,1\}^N$ is the Markov chain with transition probability*

$$p^{(N)}(x,y) = p^{(N)}(|y-x|) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & |y-x| = 1, \\ 0, & |y-x| \neq 1 \end{cases}$$

where the hypercubes are considered as abelian groups and $|x| = |\{i|\, x_i = 1\}|$ for $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \{0,1\}^N$.

The Ehrenfests' urn of size N is given by $|X^{(N)}(n)|$ which is the Markov chain on $\{0, 1, \ldots, N\}$ induced from $X^{(N)}(n)$ by its symmetry in coordinates x_i's. The n-step transition probabilities satisfy the equation

$$p_{n+1}^{(N)}(j,k) = \frac{k}{N} p_n^{(N)}(j, k-1) + \frac{N-k}{N} p_n^{(N)}(j, k+1).$$

Theorem 6 (Diaconis-Shahshani). *Let $\mu^{(N)}(n)$ be the law of $X^{(N)}(n)$ starting at $x = 0 \in \{0,1\}^N$. If $n = \frac{1}{4} N \log N + cN$ and $N \to \infty$, then,*

$$\|\mu^{(N)}(n) - \pi^{\otimes N}\| \to 2[\Phi(\frac{1}{4} e^{-2c}) - \Phi(0)]$$

where $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$.

3 Cut-off in direct product Markov processes

Assumptions on one particle Markov process:
- stationary law π, initial law $\mu_0 = \mu$.
- law μ_t at time t with density $p_\mu(t,x)$ w.r.t. π.

Assumption (A).

$$\lim_{t \to \infty} \rho_\mu(t) = 0, \quad \rho_\mu(t) = \left(\int_S |p_\mu(t,x) - 1|^2 \pi(dx) \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

$$\int_S |p_\mu(t,x) - 1|^3 \pi(dx) = O(\rho_\mu(t)^3) \quad \text{as } t \to \infty. \tag{3}$$

Assumption (B). There exist constants $t_0 > 0$ and $\delta_0 > 0$ s.t.

$$p_\mu(t,x) \geq \delta_0 \text{ for all } x \in S \text{ and } t \geq t_0. \tag{4}$$

Theorem 7 (Y.T.). *The total variation norm $\|\mu_t^{(N)} - \pi^{(N)}\|$ satisfies*

$$\|\mu_t^{(N)} - \pi^{(N)}\| = \Phi(\frac{1}{2}\sqrt{N}\rho_\mu^+(t)) - \Phi(-\frac{1}{2}\sqrt{N}\rho_\mu^-(t)) + O(\frac{1}{\sqrt{N}}), \tag{5}$$

$$\rho_\mu^\pm(t) = \rho_\mu(t) + O(\rho_\mu(t)^2) \quad \text{as } t \to \infty. \tag{6}$$

Here $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ is uniform in $t \geq t_0$

Example 8. *There exist a constant $\lambda_1 > 0$ and a bounded function $\gamma_\mu(x)$ on S such that*

$$p_\mu(t,x) = 1 + e^{-\lambda_1 t}\gamma_\mu(x) + o(e^{-\lambda_1 t}) \text{ as } t \to \infty \text{ uniformly in } x. \qquad (7)$$

Then, (A) and (B) are satisfied and

$$\rho_\mu(t) = ce^{-\lambda_1 t}(1 + o(1)) \text{ as } t \to \infty, \quad c = \left(\int_S \gamma_\mu(x)^2 \pi(dx)\right)^{1/2}. \qquad (8)$$

4 Trivial propagation of chaos in Ehrenfests' model

Theorem 9. *Let $X^{(N)}(n)$ be the simple random walk on the hypercube $\{0,1\}^N$. Then $X^{(N)}([Nt])$ propagates chaos and the chaos is given by the continuous time simple random walk on $\{0,1\}$*

Indeed, the n-step transition probability of simple random walk on the hypercube is given as

$$p_n^{(N)}(x,y) = 2^{-N} \sum_{\xi \in \{0,1\}^N} \left(1 - \frac{2|\xi|}{N}\right)^n (-1)^{(y-x)\cdot\xi}$$

where $x \cdot \xi = |\{i | x_i = \xi_i = 1\}|$. Hence, its projection to S^k is given by

$$p_n^{(k|N)}(x,y) = 2^{-k} \sum_{\xi \in \{0,1\}^k} \left(1 - \frac{2|\xi|}{N}\right)^n (-1)^{(y-x)\cdot\xi}, \quad x, y \in \{0,1\}^k.$$

Consequently

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} p_{[Nt]}^{(k|N)}(x,y) &= 2^{-k} \sum_{\xi \in \{0,1\}^N} e^{-2|\xi|t}(-1)^{(y-x)\cdot\xi} \\ &= \left(\frac{1+e^{-2t}}{2}\right)^{|y-x|} \left(\frac{1-e^{-2t}}{2}\right)^{k-|y-x|}.\end{aligned}$$

References

[1] P.Diaconis nd M.Shahshahani, *Generating a random permutation with random transpositions.* ZW 57(1981), 157-179.

[2] A.S. Sznitman, *Topics in Propagation of Chaos.* Springer LNM 1464(1991), 165-251.

[3] Y.Takahashi, *Propagation of Chaos and Cut-off in Ehrenfests' model. In memory of Hiroshi Tanaka*, in preparation