数学 III：重積分の変数変換　担当者名：南就将　鈴木由紀

重積分の変数変換公式（教科書　定理 5.2.1）を厳密に証明しきるのはなかなか難しい．この資料では公式にヤコビアン（Jacobian）の絶対値 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ が現れる理由を中心に大まかな説明をする．

1．準備　xy 平面の領域 $D \subset \mathbf{R}^2$ は面積を持ち，D を定義域とする関数 $f(x,y)$ は D において積分可能とする．D を（必ずしも長方形でない）小さな部分領域 $D_1,\ D_2,\ldots,\ D_N$ に分割する．各々の D_i は面積を持つとし，その面積を $m(D_i)$ とおく．また D_i の直径を $|D_i|$ とおく．ただし集合 $A \subset \mathbf{R}^2$ の「直径」$|A|$ とは A に属する任意の 2 点 $\mathrm{P},\mathrm{Q} \in A$ の距離 $\overline{\mathrm{PQ}}$ の上限として定義する：$|A| = \sup\limits_{\mathrm{P},\mathrm{Q}\in A} \overline{\mathrm{PQ}}$．さらに D の分割 $\{D_i\}$ の「幅」δ を $\delta = \max\{|D_1|,|D_2|,\ldots,|D_N|\}$ で定義する．こうすると D_i からの代表点 $(\alpha_i,\beta_i) \in D_i$ の選び方にかかわらず

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{N} f(\alpha_i,\beta_i)m(D_i) = \iint_D f(x,y)dxdy$$

が成り立つ．

2． uv 平面から xy 平面への写像 Φ により uv 平面の部分領域 E は xy 平面の部分領域 D に 1 対 1 に写されるとする．また $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ において $x(u,v)$ と $y(u,v)$ は (u,v) の関数として C^1-級とする．

uv 平面を座標軸に平行な直線群によって小さな長方形に分割する．その典型的な 1 つの四頂点を $\mathrm{P}(u,v)$, $\mathrm{Q}(u+\Delta u,v)$, $\mathrm{R}(u+\Delta u,v+\Delta v)$, $\mathrm{S}(u,v+\Delta v)$ とする．さて，この小長方形を写像 Φ により xy 平面に写して得られる図形は 4 点 $\mathrm{P}'(x(u,v),y(u,v))$, $\mathrm{Q}'(x(u+\Delta u,v),y(u+\Delta u,v))$, $\mathrm{R}'(x(u+\Delta u,v+\Delta v),y(u+\Delta u,v+\Delta v))$, $\mathrm{S}'(x(u,v+\Delta v),y(u,v+\Delta v))$ を $\mathrm{P}' \to \mathrm{Q}' \to \mathrm{R}' \to \mathrm{S}' \to \mathrm{P}'$ の順にある曲線で結んで得られる．ところが Δu, Δv が小さければ $x(u,v)$, $y(u,v)$ が C^1-級, 特に全微分可能であることから

$$x(u+\Delta u,v) \fallingdotseq x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u,\ y(u+\Delta u,v) \fallingdotseq y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u;$$

$$x(u,v+\Delta v) \fallingdotseq x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\ y(u,v+\Delta v) \fallingdotseq y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v;$$

$$x(u+\Delta u,v+\Delta v) \fallingdotseq x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\ y(u+\Delta u,v+\Delta v) \fallingdotseq y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{P'R'}} \fallingdotseq \overrightarrow{\mathrm{P'Q'}} + \overrightarrow{\mathrm{P'S'}}$$

となる．また点 P', Q', R', S' を結ぶ各曲線は Δu, Δv が小さいときはほぼ直線とみなされるから，図形 $\mathrm{P'Q'R'S'}$ は 2 つのベクトル

$$\Delta u\begin{bmatrix} x_u \\ y_u \end{bmatrix},\quad \Delta v\begin{bmatrix} x_v \\ y_v \end{bmatrix}$$

で張られる平行四辺形で近似される.

一般に 2 つの 2 次元ベクトル $\mathbf{a} =^t [a_1, a_2]$, $\mathbf{b} =^t [b_1, b_2]$ で張られる平行四辺形の面積は

$$|a_1b_2 - a_2b_1| = \left|\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\right|$$

であるから, 図形 P′Q′R′S′ の面積は近似的に

$$\Delta u \Delta v \left|\det \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}\right| = \left|\frac{\partial(x,u)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u \Delta v$$

で与えられることになる. $\Delta u \Delta v$ は uv 平面における長方形 PQRS の面積である.

3. さて, uv 平面の部分領域 E を座標軸に平行な直線群により小さな長方形に分割し, E に含まれる長方形 $E_1, E_2, \ldots, E_N$ の写像 Φ による像を $D_1, D_2, \ldots, D_N$ とする. uv 平面の長方形分割を細かくすれば $D_1, D_2, \ldots, D_N$ の直径もいっせいに小さくなる. また D_i のある頂点を $\mathrm{P}'(x_i, y_i)$ とし, 対応する E_i の頂点を $\mathrm{P}(u_i, v_i)$ とすれば

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy &= \lim \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i) m(D_i) \\
&= \lim \sum_{i=1}^{N} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| (u_i, v_i) m(E_i) \\
&= \iint_E f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv
\end{aligned}$$

となって変数変換公式が得られる. ここで lim は長方形分割の幅を小さくした極限を表す.

数学 III：確率母関数について　担当者名：南就将　鈴木由紀

X が非負整数 $i = 0, 1, 2, \ldots$ を値とする確率変数のとき X の分布は数列 $p_i = P(X = i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots,$ で表される．数列 $\{p_i\}$ がわかれば，たとえば X の期待値 $E[X]$ は原理的には有限または無限の和（級数）

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i \tag{1}$$

として求められる．しかし (1) のような和を直接計算するのは難しいことが多い．そこで X の分布 $\{p_i\}$ を数列として直接扱うのではなく，

$$G_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i t^i \tag{2}$$

で定義される確率母関数 (probability generating function) の形に変換しておくと便利である．ここで関数 $G_X(t)$ の独立変数 t は特別な意味を持たない，ただの変数である．t を変化させれば $G_X(t)$ もいろいろな値をとるが，そのことによって $G_X(t)$ からもとの $\{p_i\}$ を復元することができる（下記の定理 1 参照）．

X のとる値が有限個しかないときは，ある n に対して

$$P(X = n) > 0\ , \quad P(X = n+1) = P(X = n+2) = \cdots = 0$$

だから $G_X(t)$ は t について n 次の多項式となるが，一般には (2) は無限和であり，そのとき $G_X(t)$ は t の整級数である．いずれの場合も (2) は

$$G_X(t) = E[t^X] \tag{3}$$

と書くことができる．(2) において $|t| \leq 1$ とすると

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i |t^i| \leq \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1 < \infty$$

だから (2) の右辺の級数は絶対収束し, 従って関数 $G_X(t)$ の定義域は区間 $[-1, 1]$ を必ず含む. いいかえると整級数 (2) の収束半径 r はつねに $r \geq 1$ を満たす．もちろん (2) の右辺が有限和のときは $G_X(t)$ の定義域はすべての実数の全体 $(-\infty, \infty)$ である．

定理 1（確率母関数の性質）

(i) $G_X(1) = 1$.

(ii) $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $G_X^{(n)}(0) = n! p_n$ である， すなわち確率母関数 $G_X(t)$ から $\{p_i\}$ が復元される．ただし $G_X^{(n)}(t)$ は $G_X(t)$ の n 次の導関数である．

(iii) $G'_X(1) = E[X]$ である． より一般に $n = 2, 3, \ldots$ に対して

$$G_X^{(n)}(1) = E[X(X-1)\cdots(X-n+1)]\ .$$

ただし $r = 1$ のときは $G'_X(1) = \lim_{t \to 1-0} G'_X(t)$ と理解する．$G_X^{(n)}(1)$ についても同様.

証明 (i) は $G_X(1) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} P(X = i) = 1$ により明らか.

整級数 (2) を $-r < t < r$ において項別微分して（入門微分積分　定理 6.2.6）

$$G_X^{(n)}(t) = \sum_{i=n}^{\infty} i(i-1)\cdots(i-n+1) p_i t^{i-n}$$

を得る．この式で $t=0$ とおけば (ii) を得, $t=1$ とおけば (iii) を得る．（$r=1$ のとき $G_X(t)$ は $t=1$ において必ずしも定義されず，定義されていても微分可能とは限らないので，$0<t<1$ なる t に対して微分してから $t\to 1-0$ の極限をとる．詳しい議論は少し難しいので省略．）証明終

定理 1(iii) を用いると X の分散は

$$V[X]=E[X^2]-E[X]^2=E[X(X-1)]+E[X]-E[X]^2=G''_X(1)+G'_X(1)-G'_X(1)^2 \tag{4}$$

と計算される．

例 1. X が 2 項分布 $B(n,p)$ $(0<p<1)$ に従うときは $q=1-p$ として

$$G_X(t)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^iq^{n-i}t^i=(pt+q)^n\ .$$

これより $E[X]=np, V[X]=npq$ が得られる．

例 2. X がポアソン分布 $Po(\lambda)$ $(\lambda>0)$ に従うときは

$$G_X(t)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}t^i=e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^i}{i!}=e^{\lambda(t-1)}\ .$$

これより $E[X]=V[X]=\lambda$ を得る．すなわちポアソン分布においては平均と分散が一致する．

離散型の確率変数 X, Y が独立とは，任意の i,j に対して

$$P(X=x_i \text{ かつ } Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

が成り立つことをいう．ただし $x_1,x_2,\ldots,y_1,y_2,\ldots$ はそれぞれ X と Y がとる値である．

定理 2 非負整数値の確率変数 X, Y が独立ならば $G_{X+Y}(t)=G_X(t)G_Y(t)$.

証明 独立性と和の順序交換より

$$\begin{aligned}
G_{X+Y}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}P(X+Y=n)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{n}P(X=i,\ Y=n-i)\Big)t^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{n}P(X=i)P(Y=n-i)\Big)t^it^{n-i}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}P(X=i)t^i\Big(\sum_{n=i}^{\infty}P(Y=n-i)t^{n-i}\Big)\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}P(X=i)t^i\ \sum_{j=0}^{\infty}P(Y=j)t^j=G_X(t)G_Y(t)\ .
\end{aligned}$$

ただし最後の等式において $n-i=j$ とおいた．
証明終

例 3. 例 1 を次のように見直すことは重要である．同じ試行を独立に n 回行い（例えばコインを n 回投げる, あるいは無限とみなされる大きな母集団から n 個体を無作為抽出する等）, 特定の事象 A（例えばコイン

の表が上になる, あるいは抽出された個体がある病気を持つ等）の生起を調べるとき, i 回目の試行に対応する確率変数 Y_i を

$$Y_i = \begin{cases} 1, & （事象\ A\ が生起するとき） \\ 0, & （事象\ A\ が生起しないとき） \end{cases}$$

により定義する．事象 A が生起する確率を p $(0 < p < 1)$ とすると $p_1 = P(Y_i = 1) = p$, $p_0 = P(Y_i = 0) = 1 - p = q$ であり, 容易にわかるように

$$G_{Y_i}(t) = pt + q\ , \quad E[Y_i] = p\ , \quad V[Y_i] = pq\ .$$

さて $X = Y_1 + \cdots + Y_n$ とおくと X は n 回の試行のうち事象 A が生起した回数を表す．明らかに $E[X] = E[Y_1] + \cdots + E[Y_n] = np$ である．また $Y_1, \ldots, Y_n$ の独立性から $V[X] = V[Y_1] + \cdots + V[Y_n] = npq$ かつ

$$G_X(t) = G_{Y_1}(t)G_{Y_2}(t)\cdots G_{Y_n}(t) = (pt+q)^n\ .$$

したがって X は 2 項分布 $B(n,p)$ に従う．

例 4. X, Y は独立でそれぞれポアソン分布 $Po(\lambda_1)$, $Po(\lambda_2)$ に従うとすると $G_X(t) = e^{\lambda_1(t-1)}$, $G_Y(t) = e^{\lambda_2(t-1)}$. 従って

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda_1(t-1)}e^{\lambda_2(t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)}$$

となり, $X+Y$ は再びポアソン分布 $Po(\lambda_1+\lambda_2)$ に従う．この性質をポアソン分布の再生性という．

定理 3 S, $X_1, X_2, \ldots$ は互いに独立な非負整数値確率変数であり, S の母関数は $G_S(t)$, また $X_1, X_2, \ldots$ は共通の母関数 $G_X(t)$ を持つとする．このとき確率変数 $Z = \sum_{k=1}^{S} X_k$ の母関数は $G_Z(t) = G_S(G_X(t))$ で与えられる．この式の両辺を t で微分して $t = 1$ とおいて（あるいは $t \to 1 - 0$ として）関係式 $E[Z] = E[S]E[X]$ が得られる．

証明

$$\begin{aligned} G_Z(t) &= E[t^Z] = E[\prod_{k=1}^{S} t^{X_k}] = \sum_{n=0}^{\infty} P(S=n)E[\prod_{k=1}^{n} t^{X_k}] = \sum_{n=0}^{\infty} P(S=n)\prod_{k=1}^{n} E[t^{X_k}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S=n)G_X(t)^n = G_S(G_X(t))\ . \end{aligned}$$

ただし記号 $\prod_{k=1}^{n} a_k$ は $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の積を表す．

例 5. ある植物はポアソン分布 $Po(\lambda)$ にしたがう個数 S の種子を産み, 各々の種子は互いに独立に確率 p で発芽する． このとき発芽する種子の総数 Z は例 3 の Y_k を用いて $Z = \sum_{k=1}^{S} Y_k$ と表されるから $G_Z(t) = G_S(G_Y(t)) = e^{\lambda(pt+q-1)} = e^{\lambda(pt-p)} = e^{\lambda p(t-1)}$. よって Z はポアソン分布 $Po(\lambda p)$ に従う．

参考：その他の母関数

[1] 積率母関数 (moment generating function)

X を確率変数（離散型でも連続型でもよい）として

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \tag{5}$$

で定義される関数を X の積率母関数という．ただし $M_X(t)$ の定義域は $E[e^{tX}]$ が有限になるような t の範囲とする．$M_X(t)$ は $t = 0$ に対しては常に定義され，明らかに $M_X(0) = 1$ である． 一般に $r = 1, 2, \ldots$ に対して $m_r = E[X^r]$ を X の（原点のまわりの） r 次のモーメントという．(5) の両辺を t で r 回微分すると

$$M_X^{(r)}(t) = E[X^r e^{tX}] \tag{6}$$

となり，$t=0$ とおくと

$$M_X^{(r)}(0) = E[X^r] = m_r \tag{7}$$

が得られる．

X が連続型のとき $f(x)$ をその確率密度関数とすると

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

である．また X が離散型で，その値を $x_1, x_2, \ldots$ とし，確率関数を $f(x_i) = P(X = x_i)$ とすると

$$M_X(t) = \sum_i e^{tx_i} f(x_i)$$

である．特に X が非負整数 $i = 0, 1, 2, \ldots$ を値とするとき $p_i = P(X = i) = f(i)$ とおくと

$$M_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ti} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} p_i (e^t)^i$$

だから X の積率母関数 $M_X(t)$ と確率母関数 $G_X(t)$ の間には $M_X(t) = G_X(e^t)$ の関係がある．

2 つの確率変数のモーメント母関数が一致すれば，それらの分布関数も一致することが知られている．

[2] キュムラント母関数 (cumulant generating function)

確率変数 X の積率母関数を $M_X(t)$ とするとき

$$K_X(t) = \log M_X(t) \tag{8}$$

を X のキュムラント母関数という．また原点 $t=0$ におけるその r 次の微分係数

$$\kappa_r = K_X^{(r)}(0) \tag{9}$$

を X の r 次のキュムラントという．$r = 1, 2$ についてこれを求めると

$$K_X^{(1)}(t) = \frac{d}{dt} \log M_X(t) = \frac{M'_X(t)}{M_X(t)}\ , \quad K_X^{(2)}(t) = \frac{M''_X(t) M_X(t) - M'_X(t)^2}{M_X(t)^2}$$

および (7) より

$$\kappa_1 = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = m_1\ , \quad \kappa_2 = m_2 - m_1^2$$

である．つまり X の 1 次のキュムラントは 期待値，2 次のキュムラントは分散である．$r \geq 3$ に対してはキュムラントとモーメントの関係は複雑である．

[3] 特性関数 (characteristic function)

X を確率変数 i を虚数単位 $(i^2 = -1)$ として

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = E[\cos tX] + iE[\sin tX] \tag{10}$$

で定義される関数 $\varphi_X(t)$ を X の特性関数という． $\varphi_X(t)$ はすべての t に対して定義され，$\varphi_X(t)$ から X の分布関数が復元されるが，複素数値関数であるためその扱いは難しい．

数学 **III**：多次元確率変数

担当者名：南就将　鈴木由紀

２次元確率変数

(X,Y) を２次元確率変数とする．これは以下で定義される同時分布関数により特徴づけられる．

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y), \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

また

$$F_1(x) = F(x,\infty) = P(X \le x), \quad x \in \mathbf{R},$$

を X の周辺分布関数といい,

$$F_2(y) = F(\infty,y) = P(Y \le y), \quad y \in \mathbf{R},$$

を Y の周辺分布関数という．

２次元確率変数は, 離散型と連続型の２種類に分けられる．

(a) 離散型

X,Y のそれぞれがとびとびの値 $x_i, i=1,2,\ldots$, $y_j, j=1,2,\ldots$ のみをとるとき, ２次元確率変数 (X,Y) は離散型であるという．また,

$$f(x_i,y_j) = P(X=x_i, Y=y_j), \quad i,j=1,2,\ldots$$

を (X,Y) の同時確率関数という．これは次の性質をもつ．

$$f(x_i,y_j) \ge 0, \quad \sum_i \sum_j f(x_i,y_j) = 1.$$

$x_1 < x_2 < \ldots, y_1 < y_2 < \ldots$ とするとき, 同時分布関数と同時確率関数は次のようにして互いに他を定義できる．

$$\begin{cases} F(x,y) = \displaystyle\sum_{\{i:x_i \le x\}} \sum_{\{j:y_j \le y\}} f(x_i,y_j) \\ f(x_i,y_j) = F(x_i,y_j) - F(x_{i-1},y_j) - F(x_i,y_{j-1}) + F(x_{i-1},y_{j-1}). \end{cases}$$

(X,Y) の同時確率関数 $f(x_i,y_j)$ が与えられているとき,

$$f_1(x_i) = P(X=x_i) = \sum_j f(x_i,y_j), \quad i=1,2,\ldots$$

を X の周辺確率関数という．同様に

$$f_2(y_j) = P(Y=y_j) = \sum_i f(x_i,y_j), \quad j=1,2,\ldots$$

を Y の周辺確率関数という．

(b) 連続型

同時分布関数 $F(x,y)$ に対して, 非負の関数 $f(x,y)$ があって

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{y} f(u,v)dv$$

と書けるとき, ２次元確率変数 (X,Y) は連続型であるという．このとき $f(x,y)$ を (X,Y) の同時確率密度関数という．これは次の性質をもつ．

$$f(x,y) \ge 0, \quad \int\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)dxdy = 1.$$

また

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F(x,y)$$

であるから同時分布関数と同時確率密度関数は互いに他を定義できる．一般的な証明は難しいが, 任意の $D \subset \mathbf{R}^2$ に対して

$$P((X,Y) \in D) = \iint_D f(x,y)dxdy$$

が成り立つ．例えば $D = \{(x,y) |\ x \le y\}$ とすると

$$P(X \le Y) = P((X,Y) \in D) = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_x^{\infty} f(x,y)dy$$

となる．

(X,Y) の同時確率密度関数 $f(x,y)$ が与えられているとき,

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, \quad x \in \mathbf{R},$$

を X の周辺確率密度関数という．同様に

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx, \quad y \in \mathbf{R},$$

を Y の周辺確率密度関数という．

確率変数の独立性

確率変数 X と Y が独立であるとは, すべての実数 x, y に対して

$$F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$$

が成り立つことをいう．これは

$$P(a < X \le b, c < Y \le d) = P(a < X \le b)P(c < Y \le d)$$

が成り立つことと同値である．さらにこれは (X,Y) が離散型の場合は $f(x_i, y_j) = f_1(x_i)f_2(y_j)$ と同値であり, 連続型の場合は $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ と同値である．

確率変数の平均・分散

定理 $g(x,y)$ を任意の関数とするとき, (X,Y) が離散型であるか連続型であるかに応じて以下が成立する．

$$E[g(X,Y)] = \begin{cases} \displaystyle\sum_i \sum_j g(x_i, y_j) f(x_i, y_j) & (\text{ただし } \displaystyle\sum_i \sum_j |g(x_i, y_j)| f(x_i, y_j) < \infty \text{ とする}), \\ \displaystyle\int\int_{\mathbf{R}^2} g(x,y) f(x,y)dxdy & (\text{ただし } \displaystyle\int\int_{\mathbf{R}^2} |g(x,y)| f(x,y)dxdy < \infty \text{ とする}). \end{cases}$$

上の定理で $g(x,y) = ax + by$ とすることにより

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

が得られる．

定義 (1) $Cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$
を X と Y の共分散という．

(2) $Corr(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V[X]V[Y]}}$ を X と Y の相関係数という．（ρ_{XY} とも書く．）

注　X と Y が独立ならば $Cov(X,Y)=0, Corr(X,Y)=0$ となる．（逆は一般に成り立たない.）

分散については次の定理が成り立つ.

定理　$V[aX+bY]=a^2V[X]+b^2V[Y]+2abCov(X,Y)$.
特に X と Y が独立ならば $V[aX+bY]=a^2V[X]+b^2V[Y]$.

例（２次元正規分布）
２次元確率変数 (X,Y) の同時確率密度関数が

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right\}\right\}$$

（ただし $\sigma_1,\sigma_2>0, |\rho|<1$）で与えられるとき (X,Y) は２次元正規分布に従うといわれる．これについては以下の性質が成り立つ.
(1) X は正規分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ に従い, Y は正規分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ に従う.
(2) $Cov(X,Y)=\sigma_1\sigma_2\rho$ であり $Corr(X,Y)=\rho$ である.
(3) $\rho=0$ ならば X と Y は独立である.

n 次元確率変数
$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ を n 次元確率変数とするとき, その同時分布関数は

$$F(x_1,\ldots,x_n)=P(X_1\leq x_1,\ldots,X_n\leq x_n)$$

で定義され, $i=1,\ldots,n$ に対し X_i の周辺分布関数は

$$F_i(x_i)=F(\infty,\ldots,\infty,x_i,\infty,\ldots,\infty)=P(X_i\leq x_i)$$

で定義される．$X_1,X_2,\ldots,X_n$ が互いに独立であるとは, すべての実数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ に対して

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_n(x_n)$$

が成り立つことをいう.

n 次元確率変数が離散型とは, $X_1,\ldots,X_n$ のそれぞれがとびとびの値のみをとることであり, 連続型であるとは非負の関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ があって

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}du_1\cdots\int_{-\infty}^{x_n}du_nf(u_1,\ldots,u_n)$$

と書けることである．$f(x_1,\ldots,x_n)$ を $(X_1,\ldots,X_n)$ の同時確率密度関数という．これに対して

$$f_i(x_i)=\int_{-\infty}^{\infty}du_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}du_{i-1}\int_{-\infty}^{\infty}du_{i+1}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}du_nf(u_1,\ldots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\ldots,u_n)$$

を X_i の周辺確率密度関数という．$f_i(x_i)$ と $F_i(x_i)$ の間には

$$F_i(x_i)=\int_{-\infty}^{x_i}f_i(u_i)du_i$$

の関係がある．連続型の n 次元確率変数 $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ に対して $X_1,X_2,\ldots,X_n$ が独立であることと, すべての実数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ に対して

$$f(x_1,\ldots,x_n)=f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)$$

が成り立つこととは同値である.

大数の法則と中心極限定理

$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ を同じ分布に従う確率変数の無限列とし, すべての n に対して $X_1, \ldots, X_n$ は独立であるとする. 各 n に対して $S_n = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$ とおく.

定理（大数の弱法則）$E[X_1] = \mu, V[X_1] = \sigma^2$ であるとするとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} P(|S_n - \mu| > \varepsilon) = 0$$

が成り立つ.

各 X_i が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき, 正規分布の再生性により S_n は正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ に従う. しかし正規分布でなくても, $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ が同一の分布に従うならば次の定理が成り立つ.

定理（中心極限定理）$E[X_1] = \mu, V[X_1] = \sigma^2 > 0$ であるとき, 任意の $a, b (a < b)$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} P\left(a < \frac{S_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

が成り立つ.

上の定理で各 X_i が二項分布 $B(1, p)$ $(0 < p < 1)$ に従うとすると次の系が得られる.

系（ドゥ・モアブルーラプラスの定理）確率変数 Y_n は二項分布 $B(n, p)$ に従うとする. このとき任意の $a, b (a < b)$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} P\left(a < \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

が成り立つ.

上の系を用いて二項分布を正規分布で近似する際は, 次のような半整数補正をすると精度がよくなる.

系　確率変数 X は二項分布 $B(n, p)$ に従うとする. このとき任意の $n_1, n_2 (n_1 \leq n_2, n_1, n_2 = 0, 1, \ldots, n)$ に対して

$$P(n_1 \leq X \leq n_2) = P(n_1 - \frac{1}{2} < X < n_2 + \frac{1}{2}) \fallingdotseq \int_{\frac{n_1 - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{n_2 + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

が成り立つ.

数学 III : χ^2 分布, t 分布, F 分布　担当者名：南就将　鈴木由紀

正規分布から派生する重要な３つの確率分布を紹介する.

定理 1 $Z_1,\dots,Z_n$ が互いに独立で, それぞれ標準正規分布 $N(0,1)$ に従うならば $X_n=\sum_{i=1}^n Z_i^2$ は次の $f_n(x)$ を密度関数とする分布に従う：

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & (x>0)\\ 0 & (x\le 0)\ .\end{cases}$$

この分布は**自由度 n の χ^2 分布**とよばれ, χ_n^2 で表される. また分布 χ_n^2 に従う確率変数そのものを χ_n^2 で表すこともある.

証明の概略 n に関する数学的帰納法で示す. まず Z_1 の確率密度関数は $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\dfrac{z^2}{2})$ だから $x>0$ に対して

$$P(X_1\le x)\ =\ P(Z_1^2\le x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{x}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t}{2}}\frac{1}{\sqrt{t}}dt\ .$$

したがって

$$f_1(x)=\frac{1}{2^{1/2}\sqrt{\pi}}\ x^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\quad (x>0)$$

を得るが, $\sqrt{\pi}=\Gamma(\frac{1}{2})$ だから $n=1$ の場合に主張は示された.

次に X_n が表記の確率密度関数を持つと仮定して $X_{n+1}=X_n+Z_{n+1}^2$ の密度関数を求める. X_n と Z_{n+1}^2 は独立でともに正だから, その同時密度関数は $f_n(x)f_1(z)\ (x,z>0)$ であり, これより $X_{n+1}=X_n+Z_{n+1}^2$ の密度関数は $x>0$ に対して

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x)&=\int_0^x f_n(x-z)f_1(z)dz=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)2^{1/2}\Gamma(1/2)}\int_0^x(x-z)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x-z}{2}}z^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{z}{2}}dz\\&=\frac{e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n+1}{2}-1}}{2^{(n+1)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(1/2)}\int_0^1(1-t)^{\frac{n}{2}-1}t^{\frac{1}{2}-1}dt\\&=\frac{1}{2^{(n+1)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(1/2)}B(\frac{n}{2},\frac{1}{2})\,e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n+1}{2}-1}\\&=\frac{1}{2^{(n+1)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(1/2)}\frac{\Gamma(n/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n+1}{2}-1}=\frac{1}{2^{(n+1)/2}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n+1}{2}-1}\end{aligned}$$

となって, $f_{n+1}(x)$ も表記の形であることが示された.

$x\le 0$ に対して $f_n(x)=0$ であることは明らかである.

(注１) $Z\sim N(0,1)$ のとき $E[Z^2]=V[Z]=1$. また $E[Z^4]=3$ だから $V[Z^2]=E[Z^4]-E[Z^2]^2=2$ となる. したがって

$$E[\chi_n^2]=\sum_{i=1}^n E[Z_i^2]=n\ ;\quad V[\chi_n^2]=\sum_{i=1}^n V[Z_i^2]=2n\ .$$

(注 2) $n=2$ のとき χ_2^2 は $\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\ (x>0)$ を密度関数とする指数分布となる.
(注 3) $0<\alpha<1$ に対して $P(\chi_n^2>t)=\alpha$ となる t を上側 α 点といって, $\chi_{n,\alpha}^2$ で表す. $\chi_{n,\alpha}^2$ は数表から求められる.

定理 2 Z と χ_n^2 はそれぞれ標準正規分布 $N(0,1)$, 自由度 n の χ^2 分布 χ_n^2 に従い, かつ互いに独立とすると, $T_n=\dfrac{Z}{\sqrt{\chi_n^2/n}}$ は次の $f_n(t)$ を確率密度関数とする分布に従う：

$$f_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n}B(\frac{1}{2},\frac{n}{2})}\Big(1+\frac{t^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{2}}\ (t\in\mathbb{R})\ .$$

この分布は**自由度 n の t 分布**とよばれ, t_n で表される．また分布 t_n に従う確率変数そのものを t_n で表すこともある．

説明 Z の分布は原点について対称だから T_n の密度関数は明らかに偶関数となる．したがって $t > 0$ についてのみ考えればよいが, このとき

$$\begin{aligned} P(T_n \le t) &= P\Big(Z \le t\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}\Big) = \frac{1}{2} + P\Big(0 \le Z \le t\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}\Big) \\ &= \frac{1}{2} + \iint_D \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}\, dzdx \end{aligned}$$

となる．ただし $D = \{(z,x)|\ 0 \le z \le t\sqrt{\frac{x}{n}}\}$．ここで $u = z/\sqrt{x/n}$, $v = x/n$ と変数変換して上記の重積分を書き換え, $f_n(t) = \frac{d}{dt}P(T_n \le t)$ により $f_n(t)$ を求めると求める式が得られる．

(注 4) $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2$, $E[Z_i^2] = 1$, および大数の法則より n が大きいとき $\dfrac{\chi_n^2}{n} \fallingdotseq 1$ と考えてよい．したがって n が大きいとき $T_n \fallingdotseq Z$ と考えてよく, t_n は $N(0,1)$ にほぼ等しい．

(注 5) $0 < \alpha < 1$ に対して $P(T_n \ge t) = \alpha/2$ となる点 t を $t_{n,\alpha/2}$ で表す．t 分布の対称性から $P(|T_n| \ge t_{n,\alpha/2}) = \alpha$ である．$t_{n,\alpha/2}$ は数表から求められる．

(注 6) t 分布の対称性から $E[t_n] = 0$．また $n > 2$ に対して $V[t_n] = E[(t_n)^2] = \dfrac{n}{n-2}$ であるが, $n \le 2$ に対しては $V[t_n]$ は定義されない．

定理 3 $\chi_{n_1}^2$, $\chi_{n_2}^2$ が互いに独立でそれぞれ自由度 n_1, n_2 の χ^2 分布に従うとき, 確率変数 $F = \dfrac{(\chi_{n_1}^2/n_1)}{(\chi_{n_2}^2/n_2)}$ は次の $f_{n_1,n_2}(x)$ を密度関数とする確率分布に従う：

$$f_{n_1,n_2}(x) = \begin{cases} \frac{(n_1/n_2)^{n_1/2}}{B(n_1/2,n_2/2)}\, x^{\frac{n_1}{2}-1}\Big(1 + \frac{n_1}{n_2}x\Big)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0)\ . \end{cases}$$

この分布は**自由度** (n_1, n_2) **の F 分布**とよばれ, $F_{(n_1,n_2)}$ で表される．また分布 $F_{(n_1,n_2)}$ に従う確率変数そのものを $F_{(n_1,n_2)}$ で表すこともある．

説明 $t > 0$ として重積分

$$P(F \le t) = P\Big(\frac{\chi_{n_1}^2}{\chi_{n_2}^2} \le \frac{n_1}{n_2}\, t\Big) = \frac{1}{2^{n_1/2}\Gamma(n_1/2)\cdot 2^{n_2/2}\Gamma(n_2/2)} \iint_D x^{\frac{n_1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} y^{\frac{n_2}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}\, dxdy\ ,$$

$$D = \Big\{(x,y)|\ 0 < x \le \frac{n_1}{n_2} ty\Big\}$$

を変数変換 $u = x/y$, $v = y$ により変形してから t で微分すれば表記の密度関数が得られる．

(注 7) 確率変数 t が自由度 n の t 分布に従うとき, t^2 は分布 $F_{(1,n)}$ に従う．実際, $t = \dfrac{Z}{\sqrt{\chi_n^2/n}}$ $(Z \sim N(0,1))$ と表すと $t^2 = \dfrac{Z^2}{\chi_n^2/n}$ であり $Z^2 \sim \chi_1^2$．したがって $t^2 \sim F_{(1,n)}$ である．

数学 III：統計的推測　担当者名：南就将　鈴木由紀

I. 母集団と標本　統計的推測とは, 無作為に選ばれた**標本**から**母集団**の性質を推測することである．ここで母集団とは「一国民の成人男子の身長データの全体」,「ある程度広い地域の住人全体」等のように無限集合とみなされる程度に大きな集団 Ω のことをいう．

統計的推測が意味を持つための基本的な前提として, 次のことを仮定する：

仮定　母集団 Ω から無作為に 1 つの個体を抽出して数的データ X を測定すると, X はある定まった確率分布（**母集団分布**）に従う確率変数である．

母集団分布に従う確率変数 X の期待値 $E[X] = \mu$ を**母平均**, 分散 $V[X] = \sigma^2$ を**母分散**という．

例 1. (1) ある地域の住人のうち, 特定の疾患を持つ人の割合（比率）が p $(0 < p < 1)$ であるとする．住人の全体からなる母集団 Ω から 1 人を無作為抽出して, その人が疾患を持てば $Y = 1$, そうでなければ $Y = 0$ と定義すると, Y はベルヌイ分布

$$P(Y = 1) = p\ , \quad P(Y = 0) = 1 - p$$

に従う確率変数である．

(2) ある程度均質な民族の成人男子, または女子を無作為に 1 人選んでその身長 X を測ると X はほぼ正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うことが知られている．このような母集団を**正規母集団**という．

(3) 医学的なデータ X の中には $\log X$ が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとみなされる場合がある．このとき X 自体は**対数正規分布**に従うといい, $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ と書く．

統計的推測には, 正規分布型のように母集団分布の型を仮定して推測を行う方法と, 母集団分布の型を仮定しないで推測を行う方法がある． 理論分布はいくつかのパラメータ（μ と σ がよく知られている）を用いて表されるので, 前者の分布の型を仮定する場合は分布を決めるパラメータの値に関する推測ということになり, この推測方法は**パラメトリック法** (parametric) とよばれる．これに対し, 後者の分布の型を仮定しない推測方法は**ノンパラメトリック法** (non-parametric または distribution-free) とよばれる．

母集団 Ω からの個体の無作為抽出を独立に n 回行い, それぞれについてデータ X を測定すると, **大きさ n の標本** $(X_1, \ldots, X_n)$ が得られる．$X_1, \ldots, X_n$ は独立でそれぞれ同じ母集団分布に従う確率変数である．

一般に標本 $(X_1, \ldots, X_n)$ の関数 $T = T(X_1, \ldots, X_n)$ を**統計量**とよぶ．T も確率変数であるが, その分布を**標本分布**という．

例 2.（統計量）

(1) 標本 $(X_1, \ldots, X_n)$ が得られたとき

- $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ を**標本平均**,

- $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ を**標本分散**という.

標本分散の定義において分母を n でなく $n-1$ とする理由は後で説明する.

(2) 例 1.(1) の母集団から n 人を無作為抽出して, 疾患の有無に従って値 1, 0 を取る確率変数 Y_i $(i = 1, \ldots, n)$ を対応させる. このとき $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ は n 人のうち疾患を持つ人の数を表す. この場合の標本平均 $\overline{p} = \dfrac{X}{n}$ を**標本比率**という.

例 3.（標本分布）

(1) 例 2.(2) のようにして得られた統計量 X は 2 項分布 $B(n,p)$ に従う. $(P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n.)$ 2 項分布のまま処理することもあるが, n が大きいときは通常次のいずれかの近似を行う：

(1-1) 正規近似：$np > 5$ かつ $n(1-p) > 5$ のとき（すなわち n が大きく, さらに p が極端に 0 または 1 の方に偏っていないとき）, $\overline{p} = \frac{X}{n}$ はほぼ正規分布 $N(p, \frac{p(1-p)}{n})$ に従う. 従って $Z = \dfrac{\overline{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ はほぼ標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. （中心極限定理による. ）

(1-2) ポアソン近似：n は大きいが np が小さいとき（目安として $n > 100$, $np < 2$）, $\lambda = np$ として X はほぼポアソン分布 $Po(\lambda)$ に従う. 実際, $np = \lambda$ を一定に保って $n \to \infty$ とするとき任意の $k = 0, 1, \ldots$ に対して

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^k\Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^n \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^{-k}. \end{aligned}$$

最後の 2 つの因子は $n \to \infty$ とするとき 1 に収束する. また $(1 - \lambda/n)^n \to e^{-\lambda}$ である. よって n が大きければ $P(X = k) \fallingdotseq e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

(2) $(X_1, \ldots, X_n)$ が正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本のとき, 次が成立する：

(i) 正規分布の再生性により, 標本平均 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ に従う. よって $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う.

(ii) $Z_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$ $(i = 1, \ldots, n)$ は $N(0,1)$ に従い, 互いに独立だから

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

は自由度 n の χ^2 分布, χ_n^2, に従う.

(iii) (ii) において母平均 μ を標本平均 $\overline{X}$ で置き換えると

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{n-1}{\sigma^2}\,S^2$$

なる統計量が得られるが, これは $\overline{X}$ と独立な確率変数で, 自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従うことが知られている. （正規母集団に特有の性質である. 補注 1 参照.）

(iv) (i) の Z の定義における母分散 σ^2 を標本分散 S^2 で置き換えると $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}}$ なる統計量が得られるが

$$T=\frac{(\overline{X}-\mu)/\sqrt{\sigma^2/n}}{\sqrt{S^2/\sigma^2}}=\frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\,\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}}$$

と変形すると上記 (iii) より分母と分子は独立で, $Z\sim N(0,1)$, また $\dfrac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2_{n-1}$ だから T は自由度 $n-1$ の t 分布, t_{n-1} に従う.

(v) 互いに独立な正規母集団 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ と $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ からそれぞれ無作為抽出された標本 $(X_1,\ldots,X_{n_1})$, $(Y_1,\ldots,Y_{n_2})$ に対して

$$\frac{(n_1-1)}{\sigma_1^2}S_1^2=\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2\ ;\quad \frac{(n_2-1)}{\sigma_2^2}S_2^2=\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$$

は互いに独立で, それぞれ分布 $\chi^2_{n_1-1}$, $\chi^2_{n_2-1}$ に従う. ただし $\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$, $\overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i$ である. このことから

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\,\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{\frac{1}{n_1-1}\left\{\frac{(n_1-1)}{\sigma_1^2}S_1^2\right\}}{\frac{1}{n_2-1}\left\{\frac{(n_2-1)}{\sigma_2^2}S_2^2\right\}}$$

は自由度 n_1-1, n_2-1 の F 分布, F_{n_1-1,n_2-1} に従う. 特に $\sigma_1=\sigma_2$ のとき $S_1^2/S_2^2\sim F_{n_1-1,n_2-1}$ となる.

II. 推定

1. 点推定 $(X_1,\ldots,X_n)$ は母平均 μ と母分散 σ^2 を持つ母集団からの標本とする．標本の大きさ n が大きければ大数の法則から

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \doteqdot E[X]=\mu\ .$$

またこのことから

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\doteqdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\doteqdot E[(X-\mu)^2]=\sigma^2\ .$$

したがって大きな標本に対する標本平均 $\overline{X}$, 標本分散 S^2 はそれぞれ母平均 μ, 母分散 σ^2 に近いと考えられる．この意味で $\overline{X}$, S^2 をそれぞれ μ, σ^2 の**点推定量**という．点推定量は統計量 $T(X_1,\ldots,X_n)$ の一種である．$(X_1,\ldots,X_n)$ に具体的な観測値 $(x_1,\ldots,x_n)$ を代入して得られる数値 $T(x_1,\ldots,x_n)$ を**点推定値**という．特に母平均の点推定値は $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ で表して確率変数としての標本平均 $\overline{X}$ と区別するが, 他の場合は推定量とそれに対する推定値は文脈において区別するものとし, 記号上の書き分けは（文字が足りなくなるので）あえて行わないこともある．

標本平均の標準偏差 $\sqrt{V[\overline{X}]}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ は標本抽出を行う際の $\overline{X}$ のバラつきの度合いを表す．これを $\dfrac{S}{\sqrt{n}}$ で点推定したものを**（平均値の）標準誤差**（standard error (S.E.) または standard error of mean (S.E.M)）と呼ぶ．これを用いて, 母平均 μ に対する点推定は単に $\overline{x}$ と書くのではなく,

$$\overline{x}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}\quad(\text{mean}\pm\text{S.E.})$$

のように表示する．

点推定量 $\overline{X}$, S^2 は次の 2 つの性質を持つ．

(i) 一致性 $n\to\infty$ とするとき, 推定量 $\to$ 真値: 実際大数の法則を用いて上に説明したように $\overline{X}\to\mu$, $S^2\to\sigma^2$ である．

(ii) 不偏性 系統的な偏りがない：E[推定量] = 真値．実際標本平均については

$$E[\overline{X}]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[X_i]=\frac{1}{n}\times n\mu=\mu$$

により明らか．標本分散について $E[S^2]=\sigma^2$ が成り立つことは次のようにして示す：

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j^2-2X_j\overline{X}+\overline{X}^2)=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}X_j^2-n\overline{X}^2\right)\ ,$$

$E[X_j^2] = \sigma^2 + \mu^2$ $(j = 1, \ldots, n)$, また $X_1, \ldots, X_n$ の独立性より $V[\overline{X}] = \frac{1}{n} V[X]$ となるから

$$E[\overline{X}^2] = V[\overline{X}] + (E[\overline{X}])^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \ .$$

よって

$$E[S^2] = \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] - nE[\overline{X}^2]\Big) = \frac{1}{n-1}\{n(\sigma^2+\mu^2) - (\sigma^2 + n\mu^2)\} = \sigma^2 \ .$$

標本分散の定義において分母が n ではなく $n-1$ になっているのは, 推定量 S^2 に不偏性を持たせるためなのである.

2. 区間推定（ここでは母平均 μ に対する区間推定のみ扱う. 他のパラメータ（例えば母分散 σ^2) に対する区間推定も基本的な考え方は共通である. ）

小さな確率の値 α をあらかじめ指定し,

$$P(L_n(\alpha) < \mu < R_n(\alpha)) = 1 - \alpha$$

が成り立つような統計量 $L_n(\alpha)$, $R_n(\alpha)$ を標本 $(X_1, \ldots, X_n)$ に基づいて作ることを**区間推定**という. $1-\alpha$ はこの区間推定の**信頼度**と呼ばれ, α としては 0.05 または 0.01 がよく用いられる. また上記のように作られた区間 $(L_n(\alpha), R_n(\alpha))$ を母平均 μ に対する $100(1-\alpha)$ % **信頼区間**という.

以下, 例を通じて計算の仕方を学ぶ.

例 4. (1) 母分散 σ^2 が既知の正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本を $(X_1, \ldots, X_n)$ とする. $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ を標本平均として $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ とおくと, 例 3.(2)(i) により Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. $P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$ となるような $z_{\alpha/2}$ を正規分布表から求めると $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ が成り立つ. （$\alpha = 0.05$ ならば $z_{\alpha/2} = 1.95996 \doteqdot 1.96$, $\alpha = 0.01$ ならば $z_{\alpha/2} = 2.57583 \doteqdot 2.576$ である. ）

不等式 $|Z| < z_{\alpha/2}$ を Z の定義を用いて書き換えると

$$P\Big(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) = 1 - \alpha \ .$$

従って μ に対する $100(1-\alpha)$% 信頼区間は

$$\Big(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)$$

である.

(2) 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ の母分散 σ^2 が未知の場合は (1) で用いた統計量 Z の定義において σ を $S = \sqrt{S^2}$（標本標準偏差）で置き換えて得られる統計量 T を考える. 即ち

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \ , \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \ .$$

T が自由度 $n-1$ の t 分布に従うことに注意して, $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ となるような $t_{\alpha/2}$ を t 分布表から求めると $P(|T| < t_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ が成り立つ. 不等式 $|T| < t_{\alpha/2}$ を書き換えれば

$$P\Big(\overline{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\Big) = 1-\alpha\ .$$

従って μ に対する $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間として

$$\Big(\overline{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\Big)$$

を得る.

(3) 母比率の区間推定：ある特性（例えば特定の疾患）を持つ個体が母集団 Ω に占める割合が p であるとき, Ω から大きさ n の標本を無作為抽出すると, その特性をもつ個体の数 X は 2 項分布 $B(n,p)$ に従う. X の観測値から母比率 p を区間推定したい.

例 3.(1) に述べたように, n, np, $n(1-p)$ がいずれも大きいとき, $Z = \dfrac{\overline{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ はほぼ標準正規分布に従う. ただし, 今は p が未知であるから p の代わりにその点推定値 $\overline{p} = \dfrac{X}{n}$ を用い, $n\overline{p} = X > 5$, $n(1-\overline{p}) = n - X > 5$ であれば正規近似の条件が満たされたと考える. $P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$ となるような $z_{\alpha/2}$ を正規分布表から求めると $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$.

さて, 不等式 $|Z| < z_{\alpha/2}$ は $n(\overline{p}-p)^2 < z_{\alpha/2}^2 p(1-p)$ と同等であり, これはさらに

$$f(p) = (n + z_{\alpha/2}^2)p^2 - (2n\overline{p} + z_{\alpha/2}^2)p + n\overline{p}^2 < 0$$

と同等である. そこで p に関する 2 次方程式 $f(p) = 0$ の 2 実解を $L_n(\alpha)$, $R_n(\alpha)$ とすれば $f(p) < 0 \Leftrightarrow L_n(\alpha) < p < R_n(\alpha)$ より

$$P(L_n(\alpha) < p < R_n(\alpha)) = P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

となり, p に対する $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間 $(L_n(\alpha),\ R_n(\alpha))$ が得られる.

$L_n(\alpha)$, $R_n(\alpha)$ は $\overline{p}$, n, $z_{\alpha/2}$ を含む複雑な式になるので, 通常は次の簡単な近似的方法を取る：

$|Z| < z_{\alpha/2}$ を再び書き換えて

$$\overline{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < \overline{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

を得るが, この不等式の両辺には未知の p が現れるので, それを点推定値 $\overline{p}$ で近似して

$$\Big(\overline{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}},\ \overline{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\Big)$$

を求める信頼区間とする.

(4) $(X_1, \ldots, X_n)$ が対数正規母集団 $LN(\mu, \sigma^2)$ からの標本であるときは, $(\log X_1, \ldots, \log X_n)$ が正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本とみなされることを用いて (1) または (2) の方法で μ に対する区間推定を行うことができる.

III. 統計的仮説検定 仮説検定とは定理の証明における背理法と似たところのある論法で, 次のような手順から成る：

(i) 真実でないと想定される仮説を**帰無仮説** H_0 としてたてる.（これに対立する検出したいと考えている仮説も **対立仮説** H_1 として通常たてる.)

(ii) H_0 に基づいて, 実際に得られたデータ値以上に極端な値が出現する確率 P（**p 値**という）を計算する.

(iii) あらかじめ設定した小さな数 α $(0 < \alpha < 1)$ に対して, $P < \alpha$ ならば H_0 の下では稀にしか出現しないデータ値が観測されたとして H_0 を棄却し, $P > \alpha$ ならば H_0 を受容する. α は**有意水準**と呼ばれ, 多くの場合 $\alpha = 0.05$ または 0.01 に設定する.

以上の手続きを「有意水準 α での帰無仮説 H_0 の検定」という. $P < \alpha$ という結果を得て H_0 を棄却する場合でも, なお α 未満の確率で H_0 が真実である可能性は残っている. 一方, $P > \alpha$ となって H_0 を受容するとは, H_0 と観測データの間に矛盾が見られないというだけのことであって, H_0 の正しさが積極的に示されたことを意味しない.

以下, 具体例を通じて種々の検定技法を学ぶ.

例 5. 母比率に対する検定. アトピー性皮膚炎の全国保有率は $p_0 = 0.1$ である.（あくまでもフィクション.）A 地域の住民の中から無作為に選ばれた $10,000$ 人のうち, $1,055$ 人にアトピー性皮膚炎が見られた.

(1) A 地域のアトピー性皮膚炎保有率 p は全国値 p_0 と異なるといえるだろうか.

(2) A 地域ではアトピー性皮膚炎の原因物質に触れる機会が多いと考えられている. A 地域のアトピー性皮膚炎保有率は全国値よりも高いといえるだろうか.

いずれも有意水準 5% で仮説検定せよ.

解 (1) 帰無仮説 $H_0 : p = p_0$ を検定する. (対立仮説は $H_1 : p \neq p_0$.) H_0 の下では, 無作為抽出された n 人中のアトピー性皮膚炎保有者数 X は 2 項分布 $B(n, p_0)$ に従うが, 今 $n = 10,000 > 100$, $np_0 = 1,000 > 5$, $n(1-p_0) = 9,000 > 5$ だから, $\overline{p} = X/n$ とおくとき

$$Z = \frac{\overline{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{\overline{p} - 0.1}{3 \times 10^{-3}}$$

はほぼ標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. よって観測された $\overline{p}$ の値 $1055/10000 = 0.1055$ よりもはずれた値が出現する確率（p 値）は, 正規分布表より

$$P = P(|\overline{p} - 0.1| \geq |0.1055 - 0.1|) = P\Big(|Z| \geq |\frac{0.1055 - 0.1}{3 \times 10^{-3}}|\Big) = P(|Z| \geq 1.83) = 0.067\ .$$

よって $P > \alpha = 0.05$ となり, 帰無仮説 H_0 は棄却されない（受容される）. 従って, A 地域のアトピー性皮膚炎保有率は全国値と異なるとはいえない.

(2) この場合は帰無仮説 $H_0 : p \leq p_0$ を検定することになる. (対立仮説は $H_1 : p > p_0$.)

一般に確率変数 X , Y がそれぞれ 2 項分布 $B(n, p)$, $B(n, p_0)$ に従っていて $p \leq p_0$ ならば, 任意の $r = 0, 1, \ldots, n$ に対して $P_p(X \geq r) \leq P_{p_0}(Y \geq r)$ である.（証明には少し工夫を要

する．補注 2 参照.）ここで P_p, P_{p_0} はそれぞれの 2 項分布に対する確率とする．このことから, H_0 の下では任意の x $(0 < x < 1)$ に対して

$$\begin{aligned} P &= P_p(\overline{p} \geq x) \leq P_{p_0}(\overline{p} \geq x) = P\Big(\frac{\overline{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \geq \frac{x-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\Big) \\ &= P_{p_0}\Big(Z \geq \frac{x-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\Big) \ . \end{aligned}$$

ここで $n = 10,000$, $x = 0.1055$ とすると $H_0 : p \leq p_0$ の下では

$$P_p(\overline{p} \geq x) \leq P_{p_0}(Z \geq 1.83) = 0.0336 \ .$$

よって $P < \alpha = 0.05$ となり, H_0 は棄却され, H_1 が受容される．従って, A 地域のアトピー性皮膚炎保有率は全国値よりも高いといえる.

問題 (2) では, 帰無仮説を (1) と同じく $H_0 : p = p_0$ (対立仮説は $H_1 : p > p_0$) と書いて, $\overline{p}$ が $p_0 = 0.1$ をかなり上回った場合のみ H_0 を棄却すると考えてもよい．この意味で (2) のような仮説検定を**片側検定**と呼ぶ.

これに対して (1) においては A 地域のアトピー性皮膚炎保有率が単に p_0 と異なるかどうかを問題にしているので, $\overline{p}$ の観測値が $p_0 = 0.1$ をかなり下回った場合にも H_0 は棄却される．このような仮説検定を**両側検定**と呼ぶ.

一般に p 値を求めるためには, この例題における Z のように分布のよく知られた統計量を調べる必要がある．このような統計量を**検定統計量**と呼ぶ.

p 値と棄却域. $P(Z \geq z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ を満たす $z_{\alpha/2}$ を正規分布表から求めておく．A 地域の住民から無作為抽出された n 人中, x 人にアトピー性皮膚炎が見られたとする．このとき問題 (1) の帰無仮説 H_0 が有意水準 α で棄却されるための条件は

$$P = P\Big(|Z| \geq \Big|\frac{\frac{x}{n}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\Big|\Big) < \alpha$$

である．このことと $P(|Z| \geq z_{\alpha/2}) = \alpha$ とから, 観測値 x/n が

$$\Big|\frac{\frac{x}{n}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\Big| > z_{\alpha/2}$$

を満たせば, いいかえると, x/n が集合

$$\Big(-\infty,\, p_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\Big) \cup \Big(p_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}},\, \infty\Big)$$

に属せば H_0 は棄却される．このような集合を**棄却域**という．逆に観測値 x/n が区間

$$\Bigg[p_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}},\ p_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\Bigg]$$

に属するとき, H_0 は棄却されない. この範囲を H_0 の**受容域**という. 今の場合, 受容域は例 4.(3) における母比率 p の信頼区間と形は似ているが, 意味は異なるので注意すること. 特に根号の中の p_0 を「点推定値」x/n で置き換えるのはナンセンスである.

仮説検定には母集団分布, 標本の大きさ, 検定統計量のちがい, 検定の目的のちがいなどに応じて他にもさまざまな技法がある. 以下では有意水準 α が与えられたものとして話を進める.

例 6. 正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ の母平均 μ に対する帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ の両側検定を考える.(対立仮説は $H_1: \mu \neq \mu_0$.) (データが正規分布に従っているかどうかがあらかじめ明らかでない場合は標本に基づいてそれをチェックする方法があるが, ここでは立ち入らない.) 正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ からの無作為標本を $(X_1,\dots,X_n)$ とする.

(i) 現実的ではないが母分散 σ^2 が既知の場合は, $H_0: \mu = \mu_0$ の下で検定統計量 $Z = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うことを用いる. ただし $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ は標本平均である. $(X_1,\dots,X_n)$ の実現値が $(x_1,\dots,x_n)$, 従って $\overline{X}$ の実現値が $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ であるとき,

$$P = P\Big(|Z| > \Big|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big|\Big)$$

で求められる p 値が $P < \alpha$ であれば H_0 を棄却し, $P > \alpha$ ならば H_0 を受容する.

$P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ となるような $z_{\alpha/2}$ を正規分布表から求めておくと, $P < \alpha$ となるための必要十分条件は $\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}$ である. したがって $\overline{X}$ の実現値 $\overline{x}$ が棄却域

$$R = \Big\{\overline{x};\ |\overline{x}-\mu_0| > z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Big\}$$

に属するとき H_0 を棄却すると言っても同じである.

(ii) 母分散 σ^2 が未知の場合は $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2$ を標本分散として, 検定統計量 $T = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ を考える. 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ の下で T は自由度 $n-1$ の t 分布に従う: $T \sim t_{n-1}$. $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i-\overline{x})^2$ を S^2 の実現値とするとき

$$P = P\Big(|T| > \Big|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\Big|\Big)$$

で求められる p 値が $P < \alpha$ であれば H_0 を棄却し, $P > \alpha$ であれば H_0 を受容する.

$P(t_{n-1} > t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ となる $t_{\alpha/2}$ を t 分布表から求めると, $P < \alpha$ となることと, 標本平均, 標本分散の実現値 $(\overline{x}, s^2)$ が棄却域

$$R = \Big\{(\overline{x}, s^2);\ \Big|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\Big| > t_{\alpha/2}\Big\}$$

に属することとは同値である.

補注 1.　標本平均と標本分散の独立性. $X_1, \ldots . X_n$ が互いに独立で, それぞれ標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとする. $N(0,1)$ の確率密度関数を $p(x) = (1/\sqrt{2\pi})\exp[-x^2/2]$ とすると $(X_1, \ldots, X_n)$ の同時密度関数は

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big]$$

である. いま T を n 次の直交行列として, $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$ とおくと, $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ が成り立つ. (ただし $\mathbf{x} = {}^t[x_1, \ldots, x_n]$, $\mathbf{y} = {}^t[y_1, \ldots, y_n]$.) また ${}^tTT = E$ (単位行列) より $\det T = \pm 1 = \partial(x_n, \ldots, x_n)/\partial(y_1, \ldots, y_n)$ (ヤコビアン). そこで $\mathbf{X} = {}^t[X_1, \ldots, X_n]$, $\mathbf{Y} = {}^t[Y_1, \ldots, Y_n]$, $\mathbf{X} = T\mathbf{Y}$ とすると $(Y_1, \ldots, Y_n)$ の同時密度関数もまた

$$f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) = p(y_1)p(y_2)\cdots p(y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big]$$

である. さて, n 次正方行列 T を $T = [\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n]$ のように n 個の列ベクトルに分割して表すとき, T が直交行列であるためには, $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$ が $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底であること, すなわち $(\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j) = 0$ $(i \neq j)$, $= 1$ $(i = j)$ であることが必要十分条件である. 特別な場合として $\mathbf{t}_1 = {}^t[1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n}]$ とすると $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_1) = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = 1$. $\mathbf{R}^n$ は n 次元だからこの $\mathbf{t}_1$ にベクトル $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ を追加して $\mathbf{t}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ を $\mathbf{R}^n$ の基底とすることができる. これを数学 I (線形代数学) テキスト第 3 章定理 3.4 の方法で正規直交基底 $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n$ に作りかえて, 直交行列 $T = [\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n]$ が得られる. ここで $\mathbf{X} = T\mathbf{Y}$ すなわち $\mathbf{Y} = {}^tT\mathbf{X}$ とすると $\mathbf{t}_1$ の与えられた形から $Y_1 = \sqrt{n}\overline{X}$ である. また

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - Y_1^2 = \sum_{i=2}^{n} Y_i^2$$

だから $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ は $\overline{X} = \frac{1}{\sqrt{n}}Y_1$ と独立であり, $Y_i \sim N(0,1)$ より

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=2}^{n} Y_i^2 \ \sim\ \chi^2_{n-1}\ .$$

補注 2. X, Y **がそれぞれ** $B(n,p)$, $B(n,p_0)$ **に従うとき,** $p \le p_0$ **ならば** $P(X \ge r) \le P(Y \ge r)$ $(r = 0, 1, \ldots, n)$ **となることの証明.**

$U_1, \ldots, U_n$ は互いに独立で一様分布 $U(0,1)$ に従う確率変数とする. ここで $f_p(x)$ を $x \le p$ に対しては $f_p(x) = 1$, $x > p$ に対しては $f_p(x) = 0$ となる関数とすると, $0 < p < 1$ および $i = 1, \ldots, n$ に対して

$$P(f_p(U_i) = 1) = P(U_i \le p) = p\ ,\ P(f_p(U_i) = 0) = P(U_i > p) = 1 - p$$

だから確率変数

$$X = \sum_{i=0}^{n} f_p(U_i)\ ,\ Y = \sum_{i=0}^{n} f_{p_0}(U_i)$$

はそれぞれ 2 項分布 $B(n,p)$, $B(n,p_0)$ に従う. 一方 $p \le p_0$ ならば $f_p(x) \le f_{p_0}(x)$ だから $X \le Y$. すなわち $X \ge r$ ならば $Y \ge r$ である. よって $P(X \ge r) \le P(Y \ge r)$ となる.

数学 III 練習問題
担当者名：南就将　鈴木由紀

[1] (1) 3 次元空間内 $\mathbf{R}^3$ の有界領域 D で表される物体の各点 (x,y,z) に密度 $m(x,y,z)$ にしたがって質量が分布している. 今, この物体を, 点 $(X,Y,0)$ を通って z 軸に平行な直線 ℓ のまわりに一定の角速度 ω で回転させるとき, 物体の回転運動のエネルギー $E(X,Y)$ を 3 重積分を用いて表せ. ただし, 一般に質量 μ の質点が速度 v で運動しているとき, 質点はエネルギー $\frac{1}{2}\mu v^2$ を持つ.
(2) $E(X,Y)$ を最小にするような点 (X,Y) を求めよ.

[2] 閉区間 $[0,1]$ で定義された次の関数について $\sup\limits_{0\leq x\leq 1} f(x)$ を求めよ．またその理由を説明せよ．
(1) $f(x)=x(1-x)$
(2) $f(x)=\begin{cases} 1-x+\sin\frac{1}{x} & (0<x\leq 1) \\ 1-x & (x=0) \end{cases}$
(3) $f(x)=\begin{cases} \mathrm{Tan}^{-1}(\frac{2}{2x-1}) & (x\neq 1/2) \\ 0 & (x=1/2) \end{cases}$

[3] 関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ は長方形領域 $D=[a,b]\times[c,d]$ において連続（より一般には積分可能）とする.
(1) $f(x,y)\leq g(x,y)$ ならば $\iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy$ であることを示せ.
(2) 任意の実数 k, l に対して

$$\iint_D \{kf(x,y)+lg(x,y)\}dxdy = k\iint_D f(x,y)dxdy + l\iint_D g(x,y)dxdy$$

となることを示せ.

[4] (1) 区間 $[0,1]$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

により定義すると, $f(x)$ は定積分可能でないことを示せ.
(2) 正方形領域 $[0,1]\times[0,1]$ 上の関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & (x,y \text{ はともに有理数}) \\ 0 & (x,y \text{ の少なくとも一方は無理数}) \end{cases}$$

により定義すると, $f(x,y)$ は $[0,1]\times[0,1]$ 上で重積分可能でないことを示せ.

[5] 次の重積分を求めよ.

(1) $I = \iint_D xe^{xy}dxdy$, $D = [a,b] \times [c,d]$（ただし $a > 0,\ c > 0$ とする．）

(2) $I = \iint_D xe^{y^2}dxdy$, $D = \{(x,y);\ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\}$

[6] 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1} ydxdy$ (2) $\displaystyle\iint_{y\le x\le 2y, 0\le y\le 1} \sqrt{xy-y^2}dxdy$

[7] 次の累次積分の順序を交換せよ $(a > 0)$: $I = \displaystyle\int_0^a dx \int_0^{ax-x^2} f(x,y)dy$

[8] 次の積分の順序を交換せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^4 dx \int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} f(r,\theta)dr \quad (a > 0)$

(3) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

[9] 次の積分の値を求めよ: $\displaystyle\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 ye^{xy}dy$

[10] 次の 3 重積分を計算せよ：

$$J = \iiint_E zdxdydz\ ,\quad E = \{(x,y,z);\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 1-(x+y)\}\ .$$

[11] 次の重積分を計算せよ：

(1) $I = \iint_D e^{x+y}dxdy$, $D = \{(x,y):\ 0 \le y \le x \le a\}$（ただし $a > 0$ とする．）

(2) $I = \iint_D (x+y)^2dxdy$, $D = \{(x,y);\ y \ge 0,\ x^2+2xy+2y^2 \le 1\}$

(3) $I = \displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^n}}$, $D = \{(x,y);\ a^2 \le x^2+y^2 \le b^2\}$

（ただし $0 < a < b$ とする．）

[12] 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iiint_D \sin(x+y+z)dxdydz,\quad D = \{(x,y,z) : x,y,z \ge 0, x+y+z \le \pi\}$

(2) $\displaystyle\iiint_D z^2dxdydz,\quad D = \{(x,y,z) : 0 \le x^2+y^2 \le z \le 4\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{x-y}{(x^2+y^2)^2}dxdy,\quad D = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4, -x \le y \le x\}$

[13] 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy\ (a,b > 0),\quad D = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy, \quad D=\{(x,y): x^2+y^2 \le 2y\}$

(3) $\displaystyle\iiint_D xe^{x^2+y^2+z^2}dxdydz, \quad D=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \le 1,\, 0 \le x\}$

(4) $\displaystyle\iiint_D \frac{yz}{1+x^2+y^2}dxdydz, \quad D=\{(x,y,z): x^2+y^2 \le 1,\, 0 \le y,\, 0 \le z \le 1\}$

重積分については教科書の次の問題も解いてみること：
問題 5.1: 2 (1), (3), (5), (8). 問題 5.2: 1 (2); 2 (1); 3 (1). 問題 5.4: 1.
問題 5.5: 2 (2), (3), (6); 3 (1), (2).

[14] 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos(x^2)dx$ が存在することを示せ.

[15] $D=\{(x,y);\ x^2+y^2 \ge 1\}$ とするとき, 広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}}$ が存在するような実数 α の範囲を定めよ.

[16] 次の広義積分をガンマ関数, またはベータ関数を用いて表せ. 可能ならばその値も求めよ. （ただし (1), (3) では $a>0,\ b>0$ とし, (4) では $a-b+2>0$ かつ $b+1>0$ とする. ）

$$(1)\quad \int_0^1 \frac{x^b dx}{\sqrt{1-x^a}} \qquad (2)\quad \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}x^{-1/3}dx \qquad (3)\quad \int_0^1 x^{a-1}\Big(\log\frac{1}{x}\Big)^{b-1}dx$$

$$(4)\quad \int_0^\infty \frac{x^b}{(1+x)^{a+3}}dx$$

[17] 次の正項級数の収束・発散を判定せよ. （ただし (4) においては $\alpha>0$ とする. ）

$$(1)\quad \sum_{n=1}^\infty \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n^2}3^{-n} \qquad (2)\quad \sum_{n=1}^\infty \frac{n!}{n^n} \qquad (3)\quad \sum_{n=1}^\infty \frac{n^n}{n!} \qquad (4)\quad \sum_{n=1}^\infty e^{-n^\alpha}$$

[18] 次の級数の収束・発散を判定せよ.

$$(1)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} \quad (2)\sum_{n=1}^\infty \frac{n+2}{n(n+1)} \quad (3)\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \quad (4)\sum_{n=1}^\infty \frac{\log n}{n^2} \quad (5)\sum_{n=1}^\infty \frac{n^3}{2^n}$$

[19] 次の関数の与えられた点における整級数展開を求めよ.

$$(1)\quad f(x)=e^x \qquad (x=a\ne 0) \qquad (2)\quad f(x)=\frac{1}{1-x} \qquad (x=-1)$$

[20] $|x|<1$ なる x に対して級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty n^2x^n$ の和を求めよ.

[21] 非負整数値確率変数 X の確率関数が

$$f(k) = P(X = k) = p(1-p)^k \ (k = 0, 1, 2, \dots)$$

で与えられているとする. ただし $0 < p < 1$ である.

(1) X の確率母関数 $G_X(t)$ およびその定義域を求めよ.

(2) X の期待値と分散を求めよ.

[22] X は非負整数値確率変数, $p_k = P(X = k)$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ とする. $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$ で定義される X の確率母関数について次の問いに答えよ.

(1) $E\left[\dfrac{1}{1+X}\right] = \displaystyle\int_0^1 G_X(t)dt$ を示せ.

(2) $G_X(t) = \dfrac{(1-p)^2}{(1-pt)^2}$（ただし $0 < p < 1$）のとき, $E[X]$, $E\left[\dfrac{1}{1+X}\right]$, および $P(X = 1)$ を求めよ.

[23] 連続型の 2 次元確率変数 (X, Y) の確率密度関数を $f(x, y)$ とする. 次の確率を適当な領域における $f(x, y)$ の重積分として表せ. ただし $f(x, y)$ は連続関数とする.

(1) $P(0 \leq Y \leq X \leq a)$（ただし $a > 0$）

(2) $P(X \geq 0,\ Y \geq 0,\ X + Y \leq z)$（ただし $z > 0$）

[24] 連続型の 2 次元確率変数 (X, Y) が確率密度関数 $f(x, y)$ を持つとき確率変数 $Z = X + Y$ の密度関数 $g(z)$ を関数 f を用いて表せ.

[25]（続き） 特に

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda\mu \exp(-\lambda x - \mu y), & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

のとき, 確率変数 $Z = X + Y$ の密度関数 $g(z)$ を求めよ. ただし $\lambda > 0$, $\mu > 0$ は定数である.

[26] 2 次元確率変数 (X, Y)（ただし $X > 0, Y > 0$ とする）の密度関数が $f(x, y)$ であるとき, $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, $\Theta = \mathrm{Tan}^{-1}(Y/X)$ で定義される 2 次元確率変数 (R, Θ) の密度関数 $h(r, \theta)$ を求めよ.

[27] 2 次元確率変数 (X, Y) の同時密度関数 f が次のように与えられているとする.

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, x + y < 1, \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

(1) X の平均, 分散を求めよ.

(2) X と Y の共分散を求めよ.

(3) X と Y の相関係数を求めよ.

[28] 確率変数 X は $-1, 0, 1$ という値を確率 $\dfrac{1}{3}$ ずつでとるとする．また, $Y = X^2$ とする．

(1) X と Y の共分散を求めよ．

(2) X と Y は独立であるかどうか調べよ．

[29] 確率変数 X は一様分布 $U(-1, 1)$ に従って分布するとする．また, $Y = X^2$ とする．

(1) X と Y の共分散を求めよ．

(2) X と Y は独立であるかどうか調べよ．

[30] 確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき, $E[X] = \mu$, $V[X] = \sigma^2$ であることを確かめよ．

[31] 正の確率変数 X に対して $Z = \log X$ が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき, X 自体は対数正規分布 $LN(\mu, \sigma^2)$ に従うという．このとき次を確かめよ：

- X の確率密度関数は $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ である．（ただし $x > 0$.）
- $E[X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$.
- $V[X] = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

[32] $\lambda > 0$ に対して 2 次元確率変数 (X, Y) の同時確率密度関数 f が次のように与えられているとする．

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda x e^{-\lambda x - xy} & (x, y > 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(1) X および Y の周辺密度関数 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 確率変数 X と XY は独立であることを示せ．

[33] 2 次元確率変数 (X, Y) は連続型で, その密度関数は

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1 - \rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right]$$

であるとする．ただし $-1 < \rho < 1$ である．このとき X, Y の周辺密度関数 $f_1(x)$, $f_2(y)$ を求めよ．

[34] 2 次元確率変数 (X, Y) は問題 [33] と同じ正規分布に従うとする．

(1) $S = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$, $T = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$ とおくと確率変数 S, T は独立で, それぞれ正規分布 $N(0, 1 - \rho)$, $N(0, 1 + \rho)$ に従うことを示せ．

(2) X と Y の相関係数を $\rho_{X,Y}$ とするとき $\rho_{X,Y} = \rho$ を示せ．

[35] 2 次元確率変数 (X, Y) は一般の 2 次元正規分布に従うとする．すなわちその同時密度関数は

$$\begin{aligned} & f(x,y) \\ = \quad & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}\right] \end{aligned}$$

であるとする．ただし $\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $-1 < \rho < 1$ とする．

(1) $X' = \dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}$, $Y' = \dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2}$ とおくとき (X', Y') の同時密度関数 $g(x', y')$ を求めよ．

(2) X, Y の周辺密度関数 $f_1(x)$, $f_2(y)$ をそれぞれ求めよ．

(3) X と Y の共分散 $\mathrm{Cov}[X, Y]$ および相関係数 $\rho_{X,Y}$ を求めよ．

[36] 確率変数 X, Y は独立でそれぞれ正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従うとする．このとき $Z = X + Y$ は $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ に従うことを示せ．（正規分布の再生性）

[37] (X, Y) は一般の 2 次元確率変数, $V[X] > 0$, $V[Y] > 0$ とする．このとき X, Y の相関係数 $\rho_{X,Y}$ は $|\rho_{X,Y}| \leq 1$ を満たすことを示せ．

[38] 全国の男子大学生の身長は平均 $\mu = 171.3$ (cm), 標準偏差 $\sigma = 5.0$ (cm) の正規分布に従うとする．

(1) 男子大学生 200 人のうちで, 身長が 168 cm 以上 173 cm 以下のものはおよそ何人か．

(2) 男子大学生 100 人を無作為に選ぶとき, その平均身長が 171.3 cm から 1 cm 以上異なる確率を求めよ．

(3) 男子大学生 2 人を無作為に選ぶとき, 2 人の身長の差が 5 cm を超える確率を求めよ．

[39] 120 回サイコロを投げて 6 の目が出る回数が 15 回以上 24 回以下である確率の近似値を，まず正規近似により，次に半数補正を入れた正規近似により求めよ．適当な計算ソフトウェアを用いて 2 項分布を直接計算し，半数補正の効果を確かめよ．

[40] (1) ある集団では 1 % の人が胃癌にかかっているという．この集団からの無作為抽出により胃癌患者を少なくとも一人見出す確率が 95 % を超えるためには少なくとも何人抽出しなければならないか. 集団は十分大きいとする．

(2) 上記の集団から $n = 150$ 人を無作為抽出するとき, その中に含まれる胃癌患者が 3 人以下である確率を近似的に求めよ．

[41] 疾病 C の患者 150 人を新薬 D で治療したところ, 90 人に症状の改善が見られた．新薬 D の有効率 p の 95% 信頼区間を求めよ．

[42] ある疾病の治療薬の有効率 p を調べるために，n 人の患者を無作為抽出してこの薬で治療する．有効率 p に対する 95% 信頼区間の幅を 0.1 以下とするためには被験者の数 n をどの程度とすればよいか．

[43] 母平均 $\mu = 4$, 母分散 $\sigma^2 = 0.4$ の正規母集団から大きさ $n = 10$ の標本を抽出する.

(1) 標本平均 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ が 3.95 と 4.03 の間にある確率を求めよ.

(2) 標本分散 $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2$ について $P(s^2 > a) = 0.05$ となるような定数 a を求めよ.

(3) $P(\frac{\overline{X}-4}{s} > b) = 0.01$ となるような定数 b を求めよ.

[44] 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から大きさ $n = 5$ の標本

$$X_1 = 9.75,\ X_2 = 7.95,\ X_3 = 12.80,\ X_4 = 8.25,\ X_5 = 9.86$$

が得られた.

(1) 標本平均 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ および標本分散 $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2$ を求めよ.

(2) 母分散 $\sigma^2 = 4$ が既知のとき, 母平均 μ に対する 95% 信頼区間を求めよ.

(3) 母分散 σ^2 が未知のとき母平均 μ に対する 95% 信頼区間を求めよ.

(4) 母分散 σ^2 および母標準偏差 σ に対する 95% 信頼区間を求めよ.

[45] 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から大きさ $n = 25$ の標本を採ったところ, 標本平均 $\overline{X} = 11.8$, 標本分散 $s^2 = 15.8$ を得た.

(1) 母分散 $\sigma^2 = 16$ を既知として, 帰無仮説 $H_0:\ \mu = 10$ を有意水準 $\alpha = 0.05$ で両側検定せよ.

(2) 母分散 σ^2 が未知のとき, 同じ帰無仮説 $H_0:\ \mu = 10$ を有意水準 $\alpha = 0.05$ で両側検定せよ.

[46] 新生児の自然な男女比率は 105 : 100 といわれている. ある国で一年間に生まれた新生児から 5000 人を無作為抽出したところ, そのうち 2450 人が男の子だった. この国の男女出生比率は自然な比率と異なるといえるか？有意水準 5 % で両側検定せよ.

[47] a は実数として, 関数

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \text{ かつ } (a+1)x - 1 \leq y \leq (a-1)x + 1 \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

を同時確率密度関数とする 2 次元確率変数 (X_a, Y_a) を考える.

(1) $\mathrm{Cov}(X_a, Y_a) = 0$ となる a の値を予想し, それを計算により確かめよ.

(2) a を任意に固定して $U = X_a$, $V = Y_a - aX_a$ とするとき, 2 次元確率変数 (U, V) の同時確率密度関数 $g(u, v)$ を求めよ.

(3) 一般の a に対して $\mathrm{Cov}(X_a, Y_a)$ を求めよ.

[48] $f_1(x)$, $f_2(x)$ はそれぞれ $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ 上の確率密度関数とし, 次の 3 つの広義積分

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{\infty} x f_i(x) dx \quad (i = 1, 2), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x) dx$$

はいずれも収束するとする.

(1) 任意の a に対して $f(x, y) = f_1(x) f_2(y - ax)$ はある 2 次元確率変数の同時確率密度関数であることを確かめよ.

(2) (X, Y) が (1) の $f(x, y)$ を同時確率密度関数とする 2 次元確率変数のとき, $E[X] = \mu_1$, $E[Y] = \mu_2 + a\mu_1$ を示せ.

(3)$\mathrm{Cov}(X, Y) = aV[X]$ を示せ. ただし $V[X]$ は 確率変数 X の分散を表す.

[49] X, Y, Z を確率変数とし, a, b, c を定数とするとき

$$\mathrm{Cov}(aX + bY + c, Z) = a\mathrm{Cov}(X, Z) + b\mathrm{Cov}(Y, Z)$$

が成り立つことを示せ.

[50] 確率変数 X, Y に対して $E[X] = \mu_1, E[Y] = \mu_2, V[X] = \sigma_1^2, V[Y] = \sigma_2^2, \mathrm{Cov}(X, Y) = s_{12}$ とおく. さらに $T = 2X + Y$, $U = X - 2Y$ とおくとき

$$E[T]\ , \quad V[T]\ , \quad V[U]\ , \quad \mathrm{Cov}(T, U)$$

を μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2, s_{12} を用いて表せ.

[51] 母分散既知の正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の標本 $X_1, \ldots, X_n$ の標本平均を $\overline{X}$ とする．また $0 < \alpha < 1/2$ に対して $z(\alpha) > 0$ を

$$\int_{z(\alpha)}^{\infty} p(x) dx = \alpha$$

により定義する．ただし $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ の確率密度関数である．

(1) $0 < \beta < \alpha$ ならば区間

$$\left(\overline{X} - z(\beta) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X} + z(\alpha - \beta) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

は母平均 μ に対する $100(1 - \alpha)\%$ 信頼区間であることを示せ．

(2) この信頼区間の幅は $\beta = \alpha/2$ のとき最小になることを示せ．

[52] ある工場で機械を製造するために部品を大量に仕入れた．不良品率は 0.1% 以下だと納入業者は言っていたが，500 個使用した中に不良品が 3 個あった．納入業者の言葉を信じてよいだろうか．有意水準 5%で検定せよ．なお，必要ならば $e^{-0.5} \fallingdotseq 0.60653$ を用いてよい．

[53] ある国の 14 歳男子の平均身長は $\mu_0 = 162.5$ cm であるという．この国の一地方で 14 歳男子を無作為に 16 人選んで調査したところ，その身長データの標本平均は 159.5 cm, 標本分散は 36.0 cm^2 であった．

(1) 身長が分散未知の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとして，この地方の 14 歳男子の平均身長 μ は全国平均と異なると言えるか．有意水準 5% で両側検定せよ．

(2) 母分散 $\sigma^2 = 36.0$ cm^2 が既知のとき，同じ検定を行え．結果の違いは何によると考えられるか？

[54] (X, Y) は連続型の 2 次元確率変数で，その同時確率密度関数は $f(x, y)$ であるとする．

$$U = \max\{X, Y\}\ , \quad V = \min\{X, Y\}$$

とするとき，(U, V) の同時確率密度関数 $g(u, v)$ を求めよ．

[55] 確率変数 X, Y は独立かつ同じ分布に従うとする.（連続型でも離散型でもよい.）

$$U = \max\{X, Y\}\ , \quad V = \min\{X, Y\}$$

とするとき，$\mathrm{Cov}(U, V) \geq 0$ であることを示せ．また等号が成立するのは $X = Y =$ 定数 のときに限ることを示せ.

[56]（t 分布について）

(1) $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}B(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})}\Big(1 + \dfrac{x^2}{n}\Big)^{-(n+1)/2}$ $(-\infty < x < \infty)$ が確率密度関数になっていることを確かめよ.

(2) 自由度 n が非常に大きな t 分布は標準正規分布と殆ど区別がつかない. その理由を考えよ.

[57] 確率変数 X, Y は独立で, ともに同じ確率密度関数 $f(x)$ を持っている. また $E[X] = E[Y] = \mu$, $V[X] = V[Y] = \sigma^2 > 0$ とする.

(1) $S = aX + bY$, $T = cX + dY$ とおくとき, 2 次元確率変数 (S, T) の共分散 $\mathrm{Cov}(S, T)$ を求めよ.

(2) $a^2 + b^2 > 0$ かつ $c^2 + d^2 > 0$ のとき (S, T) の相関係数 $\rho_{S,T}$ を求めよ. また $|\rho_{S,T}| < 1$ となるためには行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が正則であることが必要十分であることを示せ.

(3) 行列 A が正則のとき, 2 次元確率変数 (S, T) の同時確率密度関数 $g(s, t)$ を求めよ.

[58] 来場者 100 人のイベントで 2 種の弁当を販売する. 洋食弁当は必要個数を随時補充できるが, 和食弁当は朝のうちに決めた個数をまとめて仕入れなければならない.

(1) 各々の来場者は確率 1/2 ずつで和食弁当か洋食弁当を選ぶと想定した場合, 和食弁当が売り切れる確率を 0.1 におさえるためには和食弁当をいくつ仕入れておく必要があるか？

(2) 和食弁当を 65 個仕入れておいたのに売切れてしまった. 洋食より和食の方が好まれるといえるだろうか. 適切な帰無仮説を有意水準 5%で検定することにより答えよ.

(3) (1) の設定に話を戻す. 売れ残った和食弁当は 10 人の運営スタッフが引き受けるので, たくさん余ると食べ切れなくて困る. 和食弁当が売り切れず, かつ売れ残りが 10 個以内である確率 P_0 を最大にするには和食弁当を何個仕入れればよいか. またそのときの P_0 の近似値を求めよ.

数学 III 練習問題解答例

担当者名：南就将　鈴木由紀

[1] (1) D の点 $P=(x,y,z)$ の周りの体積要素 $dxdydz$ の質量は近似的に $m(x,y,z)dxdydz$ で与えられる．一方，直線 ℓ と点 P との距離は $d=\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}$ だから点 P の速さは $\omega d=\omega\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}$，したがって体積要素 $dxdydz$ の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}m(x,y,z)dxdydz\{\omega\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}\}^2=\frac{\omega^2}{2}m(x,y,z)\{(x-X)^2+(y-Y)^2\}dxdydz$$

である．物体の回転エネルギー $E(X,Y)$ はこれらの運動エネルギーの総和だから

$$E(X,Y)=\frac{\omega^2}{2}\iiint_D\{(x-X)^2+(y-Y)^2\}m(x,y,z)dxdydz\ .$$

(2) $M=\iiint_D m(x,y,z)dxdydz$ とおくと M は物体 D の質量を表す．また

$$G_x=\iiint_D xm(x,y,z)dxdydz,\quad G_y=\iiint_D ym(x,y,z)dxdydz\ ;$$

$$I_x=\iiint_D x^2m(x,y,z)dxdydz,\quad I_y=\iiint_D y^2m(x,y,z)dxdydz$$

とおくと (1) の結果から

$$E(X,Y)=\frac{\omega^2}{2}\Big\{M(X^2+Y^2)-2XG_x-2YG_y+I_x+I_y\Big\}\ .$$

$X^2+Y^2\to\infty$ とすると $E(X,Y)\to\infty$ となるから $E(X,Y)$ はある (X,Y) に対して最小値をとる．その (X,Y) は条件

$$\frac{\partial E}{\partial X}=\frac{\partial E}{\partial Y}=0$$

すなわち

$$MX-G_x=0\ ,\quad MY-G_y=0$$

から求められる．よって $E(X,Y)$ は $X=G_x/M,\ Y=G_y/M$ において最小値をとる．

[2] 区間 J を定義域とし，上に有界な関数 $f(x)$ について，$\sup\limits_{x\in J}f(x)=\alpha$ とは，次の 2 つの条件が成り立つことである：

1. $f(x)\le\alpha\ (x\in J)$;
2. 任意の $\varepsilon>0$ に対して，$f(x)>\alpha-\varepsilon$ をみたす $x\in J$ が存在する．

以下，$J=[0,1]$, $\alpha=\sup\limits_{x\in J}f(x)$ とおく．

(1) $f(x)=x(1-x)$ は $x=1/2$ において最大値 $1/4$ をとる．最大値が存在するとき，それは上限でもあるから，$\alpha=1/4$.

(2) 明らかに $f(x)\le 2\ (x\in J)$ であるが，$f(x)=2$ となるような $x\in J$ は存在しない．一方 $x=\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^{-1}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ に対して

$$f(x)=1-x+1=2-\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^{-1}<2$$

であり，$n\to\infty$ において右辺は 2 に収束する．したがって $\alpha=2$.

(3) $f(x) < \pi/2$ であり，$x \to \frac{1}{2}+0$ とすると $f(x) \to \pi/2$ だから $\alpha = \pi/2$.

[3] 長方形 D の分割 Δ により D を小長方形 $\delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ に分ける．Δ_{ij} からの代表点 $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$ の任意の取り方に対して

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\alpha_{ij}, \beta_{ij})(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1})$$

が成り立つ．（教科書 109 ページ，定理 5.1.）(1), (2) はこのことから殆ど明らかである．

重積分の定義を直接用いて照明することも可能だが，議論はやや複雑になる．

[4] どちらの問題も考え方は同様なので (1) のみ示す．

区間 $[0,1]$ の任意の分割

$$\Delta:\ 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$$

を考える．この分割における任意の小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ は有理数も無理数も含むから（後述）

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = 1\ ,\quad m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = 0\ .$$

従って

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = 1\ ;$$

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0\ .$$

以上のことは任意の分割に対して成立するから，$S(f) = 1$ かつ $s(f) = 0$ となって両者は一致せず，$f(x)$ は積分可能でない．

任意の区間が有理数と無理数を含むことの証明： 区間 $[a,b]$ $(a < b)$ は任意とする．自然数 m と整数 n を

$$m(b-a) > 1\ ,\quad n - 1 \le ma < n$$

を満たすようにとると

$$ma < n \le ma + 1 < mb$$

が成り立つ．全体を m で割ると

$$a < \frac{n}{m} < b$$

となる．よって $[a,b]$ は有理数をかならず含む．

次に $[a,b]$ が有理数のみを含むとすると，特に a, b, $(a+b)/2$ も有理数だから，与えられた区間を $(a+b)/2$ だけ左にずらした区間 $I = [-(b-a)/2, (b-a)/2]$ も有理数のみを含み，I を n 倍した区間 $I_n = [-n(b-a)/2, n(b-a)/2]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ についてもそうであるが，任意の実数はある I_n に含まれるのだから，結局すべての実数は有理数ということになり矛盾を生ずる．よって $[a,b]$ は無理数を必ず含む．

[5] (1)

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b dx \int_c^d xe^{xy}dy = \int_a^b \left([e^{xy}]_{y=c}^{y=d} \right) dx = \int_a^b (e^{dx} - e^{cx})dx \\ &= \frac{1}{d}(e^{bd} - e^{ad}) - \frac{1}{c}(e^{bc} - e^{ac})\ . \end{aligned}$$

$I=\displaystyle\int_c^d dy\int_a^b xe^{xy}dx$ としても計算できるが, 部分積分を行う必要がある.

(2) $D=\{(x,y);\ 0\le y\le 1,\ 0\le x\le\sqrt{y}\}$（$y$ に関して単純な領域）の形に書き換えて累次積分すると

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2}dx=\int_0^1 e^{y^2}\Big(\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_{x=0}^{x=\sqrt{y}}\Big)dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}ye^{y^2}dy=\frac{1}{4}\int_0^1 e^t dt=\frac{1}{4}(e-1)\ .\text{（}y^2=t\text{ と置換）} \end{aligned}$$

註. 関数 e^{x^2} の不定積分は初等関数では表されないことが知られているから, $I=\displaystyle\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 xe^{y^2}dy$ のように計算しようとすると行き詰る.

[6] (1) 与式 $=\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^{(1-\sqrt{x})^2} ydy=\frac{1}{2}\int_0^1(1-\sqrt{x})^4dx=\frac{1}{30}$（$1-\sqrt{x}=t$ と置換せよ.）

(2) 与式 $=\displaystyle\int_0^1 dy\int_y^{2y}\sqrt{xy-y^2}dx=\int_0^1\left[\frac{2}{3y}(xy-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=y}^{x=2y}dy=\int_0^1\frac{2}{3}y^2dy=\frac{2}{9}$

[7] 条件

$$0\le x\le a\quad \text{かつ}\quad 0\le y\le ax-x^2$$

は

$$0\le y\le\frac{1}{4}a^2\quad\text{かつ}\quad \frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-y}\le x\le\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-y}$$

と同等だから,

$$I=\int_0^{a^2/4}dy\int_{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-y}}^{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-y}} f(x,y)dx$$

[8] (1) 与式 $=\displaystyle\int_0^4 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x,y)dx$　　(2) 与式 $=\displaystyle\int_0^a dr\int_0^{\mathrm{Cos}^{-1}\frac{r}{a}} f(r,\theta)d\theta$

(3) 与式 $=\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dx\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

[9] 与式 $=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 dy\int_{\frac{1}{y}}^2 ye^{xy}dx+\int_1^2 dy\int_1^2 ye^{xy}dx=\frac{e^4}{2}-e^2$

（積分順序を交換しないまま計算する場合はやや見通しの悪い部分積分を行うことになる.）

[10] $D=\{(x,y);\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$ とおくと $E=\{(x,y,z);\ (x,y)\in D,\ 0\le z\le 1-(x+y)\}$ と書けるから

$$\begin{aligned} J &= \iint_D dxdy\int_0^{1-x-y} zdz=\iint_D\frac{1}{2}\{1-(x+y)\}^2dxdy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2dy=\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3dx=\frac{1}{24}\ . \end{aligned}$$

[11] (1)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a dx\int_0^x e^xe^ydy=\int_0^a e^x[e^y]_{y=0}^{y=x}dx=\int_0^a(e^{2x}-e^x)dx \\ &= \Big[\frac{1}{2}e^{2x}-e^x\Big]_0^a=\frac{1}{2}e^{2a}-e^a+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(e^a-1)^2\ . \end{aligned}$$

別解 $D' = \{(x,y);\ 0 \leq x \leq y \leq a\}$ とおくと x, y に関する対称性から $I = \iint_{D'} e^{x+y}dxdy$. 一方 D と D' は境界以外を共有せず, $D \cup D' = [0,a]\times[0,a]$（一辺の長さ a の正方形）だから

$$I = \frac{1}{2}\iint_{[0,a]\times[0,a]} e^{x+y}dxdy = \frac{1}{2}\int_0^a e^x dx \int_0^a e^y dy = \frac{1}{2}\left(\int_0^a e^x dx\right)^2 = \frac{1}{2}(e^a - 1)^2\ .$$

(2) $x^2 + 2xy + 2y^2 = (x+y)^2 + y^2$ に注意して $x + y = u$, $y = v$ と変数変換すると $x = u - v$, $y = v$ より

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1\ , \quad \text{従って } dxdy = 1\cdot dudv = dudv\ .$$

またこの変換で領域 D は領域 $E = \{(u,v);\ v \geq 0,\ u^2+v^2 \leq 1\}$ （半径 1 の半円）に移るから, さらに極座標により $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$ と表せば $dudv = rdrd\theta$, かつ E は $E' = \{(r,\theta);\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$ に移る. 以上により

$$I = \iint_E u^2 dudv = \int_0^\pi \cos^2\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}\ .$$

(3) 極座標に変換すると $x^2+y^2 = r^2$, $dxdy = rdrd\theta$ となり, 積分領域は $D' = \{(r,\theta);\ a \leq r \leq b,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ に移るから

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \frac{r}{r^n}dr = 2\pi\int_a^b r^{-n+1}dr\ .$$

したがって $n = 2$ ならば $I = 2\pi\log(b/a)$, $n \neq 2$ ならば $I = \frac{2\pi}{2-n}(b^{2-n} - a^{2-n})$ となる.

[12] (1)　与式 $= \displaystyle\int_0^\pi dx \int_0^{\pi-x} dy \int_0^{\pi-x-y} \sin(x+y+z)dz = \frac{\pi^2}{2} - 2$

(2)　$z > 0$ に対して $D_z = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq z\}$ とおくと D_z の面積は πz だから

与式 $= \displaystyle\int_0^4 z^2 dz \int\int_{D_z} dxdy = \int_0^4 \pi z^3 dz = 64\pi$

別解 $E = \{(x,y) :\ x^2+y^2 \leq 4\}$ とおくと

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \iint_E dxdy \int_{(x^2+y^2)}^4 z^2 dz = \frac{1}{3}\iint_E (64 - (x^2+y^2)^3)dxdy \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (64 - r^6)rdr = \frac{2\pi}{3}\Big[64\times\frac{r^2}{2} - \frac{r^8}{8}\Big]_0^2 = 64\pi\ . \end{aligned}$$

(3)　$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$とおくと

与式 $= \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 \frac{r\cos\theta - r\sin\theta}{r^4} rdr = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos\theta - \sin\theta)d\theta \int_1^2 \frac{1}{r^2}dr = \frac{1}{\sqrt{2}}$

[13] (1)　$x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$とおくと 与式 $= \displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,abrdr = \frac{2}{3}\pi ab.$

(2)　$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$とおくと 与式 $= \displaystyle\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2 dr = \frac{32}{9}.$

(3)　$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$とおくと

与式 $= \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta \int_0^1 r^3 e^{r^2} dr = \frac{\pi}{2}.$

(4)　$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z$ とおくと

与式 $= \displaystyle\int_0^\pi d\varphi \int_0^1 d\rho \int_0^1 \frac{z\rho\sin\varphi}{1+\rho^2}\rho dz = \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^1 (1 - \frac{1}{1+\rho^2})d\rho \int_0^1 zdz$

$= 2(1 - \mathrm{Tan}^{-1}1)\dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{\pi}{4}.$

重積分については教科書の次の問題も解いてみること：
問題 5.1: 2 (1), (3), (5), (8). 問題 5.2: 1 (2); 2 (1); 3 (1). 問題 5.4: 1.
問題 5.5: 2 (2), (3), (6); 3 (1), (2).

[14] 一般に

$$\int_0^\infty |f(x)|dx = \lim_{T\to\infty}\int_0^T |f(x)|dx < \infty$$

ならば $\int_0^\infty f(x)dx$ は存在する. 何となれば, 今

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}\ , \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

とおけば, $f^+(x) \geq 0$, $f^-(x) \geq 0$ であって, $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ が成立する. 従って $\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty$ ならば $\int_0^\infty f^+(x)dx < \infty$ かつ $\int_0^\infty f^-(x)dx < \infty$ となるから

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{T\to\infty}\int_0^T f(x)dx = \int_0^\infty f^+(x)dx - \int_0^\infty f^-(x)dx$$

は存在する.

この判定条件を用いると,

$$\int_0^\infty |e^{-x}\cos(x^2)|dx \leq \int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-x}dx = 1 < \infty$$

により $\int_0^\infty e^{-x}\cos(x^2)dx$ は存在することがわかる.

[15] $D_R = \{(x, y);\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq R\}$ とするとき

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}} = \lim_{R\to\infty}\iint_{D_R} \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}}$$

であるが, 極座標を用いて計算すればわかるように

$$\iint_{D_R} \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}} = \begin{cases} 2\pi\log R & (\alpha = 2) \\ \frac{2\pi}{2-\alpha}(R^{2-\alpha} - 1) & (\alpha \neq 2) \end{cases}$$

だから $\alpha > 2$ のときに限り $\lim\limits_{R\to\infty}$ は存在して $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}} = \frac{2\pi}{\alpha - 2}$ が得られる.

[16] (1) $x^a = t$ とおくと $x = t^{1/a}$, $dx = \frac{1}{a}t^{(1/a)-1}dt$, また $x = 0 \to 1$ に応じて $t = 0 \to 1$ だから

$$\text{与式} = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{t^{b/a}}{\sqrt{1-t}} t^{(1/a)-1}dt = \frac{1}{a}\int_0^1 t^{\frac{1+b}{a}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}dt = \frac{1}{a}B\Big(\frac{1+b}{a}, \frac{1}{2}\Big)\ .$$

(2) $\sqrt{x} = t$ とおくと $x = t^2$, $dx = 2tdt$, また $x = 0 \to \infty$ に応じて $t = 0 \to \infty$ だから

$$\text{与式} = 2\int_0^\infty e^{-t}t^{1/3}dt = 2\Gamma\Big(\frac{1}{3} + 1\Big) = \frac{2}{3}\Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big)\ .$$

(3) $\log\frac{1}{x} = t$ とおくと $x = e^{-t}$, $dx = -e^{-t}dt$, また $x = 0 \to 1$ に応じて $t = \infty \to 0$ だから

$$\text{与式} = -\int_\infty^0 e^{-(a-1)t}t^{b-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty e^{-at}t^{b-1}dt = a^{-b}\int_0^\infty e^{-s}s^{b-1}ds = a^{-b}\Gamma(b)\ .$$

(4) $1/(1+x)=t$ とおくと $x=(1-t)/t$, $dx=-t^{-2}dt$, また $x=0\to\infty$ に応じて $t=1\to 0$ となるから

$$\text{与式} = -\int_1^0 t^{a+3}\Big(\frac{1-t}{t}\Big)^b \frac{1}{t^2}dt = \int_0^1 t^{a-b+1}(1-t)^b dt = B(a-b+2, b+1)\ .$$

[17] (1) $a_n = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n^2} 3^{-n}$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n 3^{-1} = \frac{e}{3}\ .$$

$e \fallingdotseq 2.72$, 特に $2<e<3$ より $0<e/3<1$. よってコーシーの判定法より級数は収束する.

(2) $a_n = n!/n^n$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-n} = \frac{1}{e} < 1\ .$$

よってダランベールの判定法より級数は収束する.

(3) 明らかに $n^n/n! \geq 1$ $(n=1,2,\ldots)$ であり, $\lim_{n\to\infty} n^n/n! = 0$ とはならないから, 級数は発散する.

(4) $f(x) = e^{-x^\alpha}$ $(x>0)$ とおくと $f(x)$ は単調減少かつ正であり, $e^{-n^\alpha} = f(n)$. さらに

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty e^{-x^\alpha}dx = \frac{1}{\alpha}\int_1^\infty e^{-t}t^{\frac{1}{\alpha}-1}dt < \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{1}{\alpha}-1}dt = \frac{1}{\alpha}\Gamma\Big(\frac{1}{\alpha}\Big) < \infty$$

だから, この広義積分は収束する. （教科書 70 ページ・例 11 参照. ）よって $\sum_{n=1}^\infty e^{-n^\alpha}$ も収束する. （教科書 146 ページ問題 6.1.5 参照. ）

[18] (1) $a_n = \dfrac{1}{n!}$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1\ .$$

よってダランベールの判定法より級数は収束する. あるいは比較判定法を直接用いると $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$, かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^{n-1}} = 2 < \infty$ より $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!}$ は収束することがわかる.

(2) $\dfrac{n+2}{n(n+1)} > \dfrac{1}{n} > 0$, であるが $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ は発散する. よって $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n+2}{n(n+1)}$ も発散する.

(3) $\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1} < \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ は収束する. よって $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ は収束する.

(4) $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ $(x>0)$ とおく. $f(x)$ は $[2,\infty)$ で単調減少だから

$\displaystyle\sum_{k=3}^n f(k) \leq \int_2^n f(x)dx \leq \sum_{k=2}^{n-1} f(k)$ が成り立つ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_2^n f(x)dx = \frac{\log 2}{2} + \frac{1}{2} < \infty$ だから $\displaystyle\sum_{k=3}^\infty f(k)$ は収束する. よって $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty f(k)$ は収束する.

(5) $a_n = n^3/2^n$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1\ .$$

よってダランベールの判定法により級数は収束する.

[19] (1) 任意の t に対して $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ であることを用いて

$$f(x) = e^a e^{x-a} = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} \ .$$

これはすべての実数 x に対して収束する.

(2) $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ $(|t| < 1)$ であることを用いて

$$f(x) = \frac{1}{2-(x+1)} = \frac{1}{2(1-\frac{x+1}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n} \ .$$

これは $-3 < x < 1$ に対して収束する.

[20] $|x| < 1$ において, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ が項別微分可能であることを用いて

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n &= \sum_{n=1}^{\infty}\{n(n-1)+n\}x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \\ &= x^2\frac{d^2}{dx^2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big) + x\frac{d}{dx}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big) = x^2\frac{d^2}{dx^2}(1-x)^{-1} + x\frac{d}{dx}(1-x)^{-1} \\ &= \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \ .\end{aligned}$$

[21] (1) $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k t^k$ である. $|(1-p)t| < 1$ なる限りこの級数は収束して $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p\{(1-p)t\}^k = \dfrac{p}{1-(1-p)t}$ となり, その定義域は $\{t;\ |t| < 1/(1-p)\}$.

(2) $G'_X(t) = \dfrac{p(1-p)}{(1-(1-p)t)^2}$ より $E[X] = G'_X(1) = \dfrac{1-p}{p}$. また $G''_X(t) = \dfrac{2p(1-p)^2}{(1-(1-p)t)^3}$ より

$$V[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = \frac{2(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \ .$$

[22] (1) $G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$ を項別積分して

$$\int_0^1 G_X(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} p_k = E\Big[\frac{1}{1+X}\Big] \ .$$

(2) $G_X(t) = (1-p)^2/(1-pt)^2$ ならば

$$G'_X(t) = \frac{2p(1-p)^2}{(1-pt)^3} \ , \quad \int G_X(t)dt = \frac{(1-p)^2}{p(1-pt)} + C$$

だから

$$E[X] = G'_X(1) = \frac{2p}{1-p} \ , \quad E\Big[\frac{1}{1+X}\Big] = \int_0^1 G_X(t)dt = \Big[\frac{(1-p)^2}{p(1-pt)}\Big]_{t=0}^{t=1} = 1-p \ ,$$

$$P(X=1) = G'_X(0) = 2p(1-p)^2 \ .$$

[23] (1) $D = \{(u,v);\ 0 \le v \le u \le a\}$ として

$$P(0 \le Y \le X \le a) = \iint_D f(u,v)dudv = \int_0^a du \int_0^u f(u,v)dv \ .$$

(2) $D_z = \{(u,v);\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ u+v \leq z\}$ として

$$P(X \geq 0,\ Y \geq 0,\ X+Y \leq z) = \iint_{D_z} f(u,v)dudv = \int_0^z du \int_0^{z-u} f(u,v)dv\ .$$

[24] $D_z = \{(x,y);\ x+y \leq z\}$ とすると

$$P(Z \leq z) = \iint_{D_z} f(u,v)dudv\ .$$

ここで $u+v=x$, $v=y$ とおくと $u=x-y$, $v=y$ となり

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1\ .$$

また D_z は $E_z = \{(x,y);\ x \leq z,\ -\infty < y < \infty\}$ に移る. 従って

$$P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y,y)dy\ .$$

積分上端で微分して

$$g(z) = \frac{d}{dz}P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)dy$$

を得る.

[25] 問題 [24] の結果より $g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)dy$ であるが, 実際の積分範囲は $0 \leq y \leq z$ である. 特に $z<0$ ならば積分範囲は空となり $g(z)=0$. $z \geq 0$ ならば

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^z \lambda\mu \exp\left[-\lambda(z-y)-\mu y\right] dy \\ &= \begin{cases} \mu^2 z e^{-\mu z} & (\lambda = \mu \text{ のとき}) \\ \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}(e^{-\mu z}-e^{-\lambda z}) & (\lambda \neq \mu \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

[26] 任意の $r_1 > 0$, $0 < \theta_1 < \pi/2$ に対して

$$D = \{(x,y);\ 0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq r_1,\ 0 \leq \mathrm{Tan}^{-1}(y/x) \leq \theta_1\}\ ;$$

$$E = \{(r,\theta);\ 0 \leq r \leq r_1,\ 0 \leq \theta \leq \theta_1\}$$

とおくと

$$P(0 \leq R \leq r_1\ ,\ 0 \leq \Theta \leq \theta_1) = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta\ .$$

これより $h(r,\theta) = rf(r\cos\theta, r\sin\theta)$ $(r>0,\ 0<\theta<\pi/2)$ である.

[27] (1) X の周辺確率密度関数 $f_1(x)$ を求めると

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^{1-x} 2\ dy = 2(1-x), & 0<x<1 \\ 0, & \text{その他}. \end{cases}$$

したがって $E[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx = \int_0^1 2x(1-x)dx = \frac{1}{3}$.

$E[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx=\int_0^1 2x^2(1-x)dx=\dfrac{1}{6}$ より $V[X]=\dfrac{1}{6}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{18}$.

$f(x,y)$ は文字 x, y の入れ替えについて対称だから, 上の計算より Y の周辺確率密度関数は $f_2(y)=f_1(y)$ であり, $E[Y]=1/3=E[X]$, $E[Y^2]=1/6=E[X^2]$, $V[Y]=1/18=V[Y]$ であることもただちにわかる.

(2) $E[XY]=\int\int_{\mathbf{R}^2} xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} 2xydy=\dfrac{1}{12}$ より

$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=\dfrac{1}{12}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=-\dfrac{1}{36}$.

(3) $Corr(X,Y)=\rho_{X,Y}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V[X]V[Y]}}=-\dfrac{1}{2}$.

[28] (1) $E[X]=0, E[Y]=E[X^2]=\dfrac{2}{3}, E[XY]=E[X^3]=0$ より $Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=0$.

(2) $P(X=1,Y=1)=P(X=1)=\dfrac{1}{3}$, $P(Y=1)=\dfrac{2}{3}$ より
$P(X=1,Y=1)\neq P(X=1)P(Y=1)$. よって X と Y は独立ではない.

[29] (1) $E[X]=\int_{-1}^1 x\dfrac{1}{2}dx=0$, $E[Y]=E[X^2]=\int_{-1}^1 x^2\dfrac{1}{2}dx=\dfrac{1}{3}$, $E[XY]=E[X^3]=\int_{-1}^1 x^3\dfrac{1}{2}dx=0$ より $Cov(X,Y)=0$.

(2) $P(0\le X\le\dfrac{1}{2}, 0\le Y\le\dfrac{1}{4})=P(0\le X\le\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}$,
$P(0\le Y\le\dfrac{1}{4})=P(-\dfrac{1}{2}\le X\le\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}$ より
$P(0\le X\le\dfrac{1}{2}, 0\le Y\le\dfrac{1}{4})\neq P(0\le X\le\dfrac{1}{2})P(0\le Y\le\dfrac{1}{4})$. よって X と Y は独立ではない.

[30] X の確率密度関数は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

であるから, $z=(x-\mu)/\sigma$ と変数変換して

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}(\mu+\sigma z)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz \\ &= \mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=\mu\cdot 1+\sigma\cdot 0=\mu\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V[X] &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}z^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz \\ &= \sigma^2\left\{\left[-z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right\} \\ &= \sigma^2(0+1)=\sigma^2\ . \end{aligned}$$

[31] まず X の分布関数 $F(x)$ を求める. 任意の $x>0$ に対して

$$F(x)=P(X\le x)=P(\log X\le\log x)=P(Z\le\log x)=\int_{-\infty}^{\log x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}dz\ .$$

従って

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

となる．X の期待値は

$$E[X]=E[e^Z]=\int_{-\infty}^{\infty}e^z\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(z-\mu)^2+z\right]dz$$

であるが, [ ] の中は

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\{(z-\mu)^2-2\sigma^2 z\}=-\frac{1}{2\sigma^2}\{(z-(\mu+\sigma^2))^2-2\mu\sigma^2-\sigma^4\}$$

と変形されるから

$$E[X]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(z-(\mu+\sigma^2))^2}dz=e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$$

となる．同様の計算で

$$E[X^2]=E(e^{2Z})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}dz=e^{2(\mu+\sigma^2)}$$

が得られるから

$$V[X]=E[X^2]-E[X]^2=e^{2(\mu+\sigma^2)}-e^{2\mu+\sigma^2}=e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)\ .$$

[32] (1) $f_X(x)=\int_0^{\infty}f(x,y)dy=\lambda e^{-\lambda x}\ (x>0),\ f_X(x)=0\ (x\le 0)$.
$f_Y(y)=\lambda/(\lambda+y)^2\ (y>0),\ f_Y(y)=0\ (y\le 0)$.
(2) $D=\{(x,y):\ 0<x\le u,\ 0<xy\le v\}$ とすると

$$P(X\le u,\ XY\le v)=\iint_D \lambda x e^{-\lambda x-xy}dxdy\ .$$

ここで $x=s,\ xy=t$ と変換すると $y=t/s$ かつ $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{s}$ となり, 積分範囲 D は

$$\{(s,t):\ 0<s\le u,\ 0<t\le v\}$$

に移る．したがって

$$P(X\le u,\ XY\le v)=\int_0^u ds\int_0^v \lambda s e^{-\lambda s-t}\ \frac{1}{s}dt=\int_0^u\lambda e^{-\lambda s}ds\int_0^v e^{-t}dt=(1-e^{-\lambda u})(1-e^{-v})\ .$$

この式で $v\to\infty$ とすれば $P(X\le u)=1-e^{-\lambda u}$ がわかり, $u\to\infty$ とすれば $P(XY\le v)=1-e^{-v}$ がわかる．したがって $P(X\le u,\ XY\le v)=P(X\le u)P(XY\le v)$. よって X と XY は独立である．

[33] $x^2-2\rho xy+y^2=(y-\rho x)^2+(1-\rho^2)x^2$ に注意して

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y-\rho x)^2\right]$$

と変形する．ところが第 2 因子を y の関数と見ると $N(\rho x,1-\rho^2)$ の密度関数であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y-\rho x)^2\right]dy=1\ .$$

従って X の周辺密度関数は

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

である. x と y の役割を交換すれば

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

であることもわかる. すなわち X, Y はそれぞれ標準正規分布 $N(0,1)$ に従う.

[34] (1) 任意の実数 s, t に対して $D_{s,t} = \{(x,y);\ (x-y)/\sqrt{2} \le s,\ (x+y)/\sqrt{2} \le t\}$ とすると

$$P(S \le s,\ T \le t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \iint_{D_{s,t}} \exp\Big[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\Big] dxdy\ .$$

ここで $u = (x-y)/\sqrt{2}, v = (x+y)/\sqrt{2}$ とおくと $x = (u+v)/\sqrt{2}, y = (-u+v)/\sqrt{2}$ であり, $\partial(x,y)/\partial(u,v) = 1$ により $dxdy = dudv$. またこの変換により積分領域 $D_{s,t}$ は $E_{s,t} = \{(u,v);\ u \le s,\ v \le t\}$ に移る. したがって

$$\begin{aligned} P(S \le s,\ T \le t) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \iint_{E_{s,t}} \exp\Big[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big\{\frac{(u+v)^2}{2} - \rho(u+v)(v-u) + \frac{(v-u)^2}{2}\Big\}\Big] dudv \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \iint_{E_{s,t}} \exp\Big[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big\{(1+\rho)u^2 + (1-\rho)v^2\Big\}\Big] dudv\ . \end{aligned}$$

よって 2 次元確率変数 (S,T) の同時密度関数 $g(s,t)$ は

$$g(s,t) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} P(S \le s,\ T \le t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho)}} \exp\Big\{-\frac{s^2}{2(1-\rho)}\Big\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\rho)}} \exp\Big\{-\frac{t^2}{2(1+\rho)}\Big\}\ .$$

この形より明らかに S と T は独立で, それぞれ正規分布 $N(0, 1-\rho)$, $N(0, 1+\rho)$ に従う.

(2) (1) の結果より $E[S] = E[T] = 0,\ V[S] = E[S^2] = 1-\rho,\ V[T] = E[T^2] = 1+\rho.$ また [31] より $E[X] = E[Y] = 0, V[X] = V[Y] = 1$ であるから

$$Cov[X,Y] = E[XY] = E\left[\frac{S+T}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-S+T}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{2}E[T^2 - S^2] = \frac{1}{2}\{(1+\rho) - (1-\rho)\} = \rho\ ,$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]}} = \rho\ .$$

[35] (1) $x' = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, y' = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$ と変数変換すると

$$g(x',y') = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x'^2 - 2\rho x'y' + y'^2)\right]\ .$$

これは問題 [33] の $f(x,y)$ と同じ形である.

(2) X の周辺密度関数は $f_1(x) = \dfrac{d}{dx}P(X \le x)$ で求められる. ところが $P(X \le x) = P(X' \le \frac{x-\mu_1}{\sigma_1})$ であり, 問題 [33] の結果より 2 次元確率変数 (X', Y') における X' の周辺密度関数は $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp[-\frac{x'^2}{2}]$ だったから

$$P(X' \le \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx' = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(u-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} du\ .$$

従って

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\ .$$

同様にして

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

もわかる．すなわち X, Y それぞれは $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従う．

(3) (1) と問題 [33] の結果より $Cov[X', Y'] = \rho_{X',Y'} = \rho$ である．一方 $X = \sigma_1 X' + \mu_1$, $Y = \sigma_2 Y' + \mu_2$ だから

$$Cov[X, Y] = E[(\sigma_1 X' + \mu_1 - \mu_1)(\sigma_2 Y' + \mu_2 - \mu_2)] = \sigma_1\sigma_2 E[X'Y'] = \sigma_1\sigma_2\rho\ .$$

また (2) の結果から $V[X] = \sigma_1^2$, $V[Y] = \sigma_2^2$ だから

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov[X, Y]}{\sigma_1\sigma_2} = \rho\ .$$

[36] $\mu_1 = \mu_2 = 0$ の場合のみ考えれば十分である．（X, Y の代わりに $X - \mu_1$, $Y - \mu_2$ を考えればよいから．）このとき X, Y の独立性により (X, Y) の同時密度関数は

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} - \frac{y^2}{2\sigma_2^2}\right]$$

である．[24] の結果より $Z = X + Y$ の密度関数 $g(z)$ は

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-u, u)du = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(z-u)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{u^2}{2\sigma_2^2}\right]du$$

で与えられる．exp[ ] の中身を A とおくと

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{2}\left\{\Big(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\Big)u^2 - \frac{2uz}{\sigma_1^2} + \frac{z^2}{\sigma_1^2}\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\left[\Big(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\Big)\left\{u^2 - 2\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}zu + \Big(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\Big)^2 z^2\right\} - \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}z^2 + \frac{1}{\sigma_1^2}z^2\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\Big(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\Big)\Big(u - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}z\Big)^2 + \frac{z^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right]\ .
\end{aligned}$$

したがって

$$g(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\Big[-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\Big]\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big[-\frac{1}{2}\frac{u^2}{\Big(\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\Big)}\Big]du = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}\exp\Big[-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\Big]$$

となり, Z は $N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ に従う．

[37] $E[X] = \mu_X$, $E[Y] = \mu_Y$, $\sqrt{V[X]} = \sigma_X$, $\sqrt{V[Y]} = \sigma_Y$ とおく．不等式

$$E\Big[\Big(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \pm \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\Big)^2\Big] \geq 0\ .$$

の左辺を変形すると

$$\begin{aligned}
&\frac{E[(X - \mu_X)^2]}{\sigma_X^2} \pm 2\frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{E[(Y - \mu_Y)^2]}{\sigma_Y^2} \\
=\ &\frac{V[X]}{\sigma_X^2} \pm 2\frac{Cov[X, Y]}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{V[Y]}{\sigma_Y^2} = 2(1 \pm \rho_{X,Y}) \geq 0\ .
\end{aligned}$$

これより $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$ を得る．

注： $\rho_{X,Y} = 1$ のときは $E[(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} - \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y})^2] = 0$ より

$$\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\ .$$

また $\rho_{X,Y} = -1$ のときは $E[(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} + \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y})^2] = 0$ より

$$\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} = -\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y} .$$

いいかえると, $|\rho_{X,Y}| = 1$ のとき, 確率変数 X と Y は互いに 1 次式で結ばれる.

[38] (1) 無作為に選ばれた男子大学生の身長を X cm とすると, $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-171.3}{5.0}$ は $N(0,1)$ に従う. さて, 無作為に選ばれた n 人の男子大学生の身長を測り, 身長が a cm 以上 b cm 以下であった者の人数を $n(a,b)$ とすると, 大数の法則から n が大きいとき

$$\frac{n(a,b)}{n} \doteqdot P(a \leq X \leq b) ,$$

すなわち

$$n(a,b) \doteqdot n \times P(a \leq X \leq b)$$

である. (この式の右辺を**期待度数**という.) 今 $n = 200$, $a = 168$, $b = 173$ として計算すると求める人数 (期待度数) は

$$\begin{aligned} & 200P(168 \leq X \leq 173) = 200P\left(\frac{168-171.3}{5.0} \leq Z \leq \frac{173-171.3}{5.0}\right) \\ = \quad & 200P(-0.66 \leq Z \leq 0.34) = 200\{1 - P(Z > 0.34) - P(Z > 0.66)\} . \end{aligned}$$

正規分布表からこれらの確率を読み取れば, 求める人数はおよそ

$$200 \times (1 - 0.36693 - 0.25463) \doteqdot 75.688$$

すなわち, およそ 76 人である.

(2) 無作為に選ばれた 100 人の身長データを $X_1, \ldots, X_{100}$ とし, その平均を $\overline{X} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$ とすると $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{100})$, 従って $Z = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/10} \sim N(0,1)$ だから, $\overline{X}$ が平均 μ と 1 cm 以上異なる確率は

$$P(|\overline{X}-\mu| \geq 1) = P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/10}\right| \geq \frac{10}{\sigma}\right) = P(|Z| \geq 10/5.0) = 2P(Z \geq 2) .$$

正規分布表から読み取ると右辺は $2 \times 0.02275 = 0.0455$ である.

(3) 無作為に選ばれた 2 人の身長データを X_1, X_2 とすると正規分布の再生性から $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$ となる. 従って $Z = \dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\,\sigma} \sim N(0,1)$. 求める確率は正規分布表から

$$P(|X_1 - X_2| > 5) = P\left(|Z| > \frac{5}{\sqrt{2} \times 5.0}\right) \doteqdot 2P(Z > 0.71) \doteqdot 2 \times 0.23885 = 0.478$$

である.

[39] 問題の回数を X とすると X は二項分布 $B(120, \dfrac{1}{6})$ に従う. $E[X] = 20, V[X] = \dfrac{50}{3}$ だから, 中心極限定理より, X は正規分布 $N(20, \dfrac{50}{3})$ にほぼ従う. つまり $Z = \dfrac{X-20}{\sqrt{50/3}}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ にほぼ従う. よって正規分布表を用いて

$$P(15 \leq X \leq 24) = P\Big(-\frac{\sqrt{6}}{2} \leq Z \leq \frac{2\sqrt{6}}{5}\Big) = 1 - P\Big(Z > \frac{\sqrt{6}}{2}\Big) - P\Big(Z > \frac{3\sqrt{6}}{5}\Big) \fallingdotseq 0.727.$$

半数補正を行う場合は

$$P(15 \leq X \leq 24) = P(14.5 < X < 24.5) = P\Big(-\frac{5.5\sqrt{6}}{10} \leq Z \leq \frac{4.5\sqrt{6}}{10}\Big) \fallingdotseq 0.776$$

となる．

２項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数 X に対して，確率 $P(X \leq k)$ を直接求めるには，たとえば Excel で =BINOMDIST(k,n,p,TRUE) と入力すればよい．すると $B(120, 1/6)$ に従う X について

$$P(15 \leq X \leq 24) = P(X \leq 24) - P(X \leq 14) = 0.77925406 \fallingdotseq 0.779$$

なる値が得られる．これと正規近似の結果を見比べると，半数補正を行ったほうが精度がよいことは明らかである．実際，近似値の相対誤差は，補正を行わないときに約 7%であるのに対し，補正を行った場合は約 0.3%である．

[40] (1) n 人を無作為抽出するときに胃癌患者が一人も見出されない確率は 0.99^n である．これが 5 % 以下でなければならないから, $0.99^n \leq 0.05$ の両辺の対数をとって

$$n \geq \log 0.05/\log 0.99 = 298.1\ .$$

したがって少なくとも 299 人抽出する必要がある．

(2) 1 回の抽出で胃癌患者を見出す確率は $p = 0.01$ である．無作為抽出された n 人中に含まれる患者数 X は本来は 2 項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数だが, $n = 150$ が大きく, $\lambda = np = 1.5$ が小さいのでこれをポアソン分布で近似して

$$P(X \leq 3) \doteqdot e^{-1.5}(1 + 1.5 + \frac{1.5^2}{2!} + \frac{1.5^3}{3!}) \doteqdot 0.934$$

を得る．

[41] 標本の大きさを n, 母比率を p, 標本比率を $\overline{p}$ として統計量 $Z = (\overline{p} - p)/\sqrt{p(1-p)/n}$ を定義する．今 $n = 150$ であり, p を $\overline{p} = 90/150 = 0.6$ で点推定すると $n\overline{p} = 90 > 5$, $n(1-\overline{p}) = 60 > 5$ だから Z は標準正規分布すると考えてよい．正規分布表より $P(|Z| < 1.96) = 0.95$ かつ $|Z| < 1.96$ は $|\overline{p} - p| < 1.96\sqrt{p(1-p)/n}$ と同値である．右辺の根号の中の p を点推定値 $\overline{p} = 0.6$ で近似すると

$$1.96\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} = 1.96\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{150}} = 0.0784\ .$$

よって求める信頼区間は $(0.6 - 0.0784,\ 0.6 + 0.0784)$ あるいは $(0.52,\ 0.68)$.

[42] $0 \leq \overline{p} \leq 1$ ならば $0 \leq \overline{p}(1-\overline{p}) \leq 1/4$ だから 95% 信頼区間の幅は一般に $2 \times 1.96 \times \sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})/n} \leq 1.96/\sqrt{n}$ である．これを 0.1 以下にするためには $\sqrt{n} \geq 1.96/0.1 = 19.6$, すなわち $n \geq (19.6)^2 = 384.16$ であればよい．すなわち被験者が 385 人以上いればよい．

[43] (1) 確率変数 $Z = (\overline{X} - \mu)/\sqrt{\sigma^2/n} = 5(\overline{X} - 4)$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う．一方 $3.95 < \overline{X} < 4.03$ は $-0.25 < Z < 0.15$ と同値だから, 正規分布表より

$$\begin{aligned} & P(3.95 < \overline{X} < 4.03) = P(-0.25 < Z < 0.15) = 1 - P(Z > 0.15) - P(Z > 0.25) \\ = \ & 1 - 0.4404 - 0.4013 = 0.158\ . \end{aligned}$$

(2) 確率変数 $\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う．一方 $s^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2 = \frac{0.4}{9}\chi^2$ だから条件は

$$P(s^2 > a) = P(\chi^2 > \frac{9}{0.4}a) = 0.05\ .$$

χ^2 分布の表から $P(\chi^2 > 16.92) = 0.05$. よって $a = 0.752$.

(3) 確率変数

$$T = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{s} = \sqrt{10}\frac{\overline{X}-4}{s}$$

は自由度 $n-1=9$ の t 分布に従う. 一方

$$P(\frac{\overline{X}-4}{s} > b) = P(\sqrt{10}\frac{\overline{X}-4}{s} > \sqrt{10}b) = 0.01 \ .$$

t 分布の表より $\sqrt{10}b = 2.821$. よって $b = 0.892$.

[44] (1) $\overline{X} = 9.722$. また関係式

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - \frac{n}{n-1}\overline{X}^2$$

を用いて計算すると $s^2 = 3.700$.

(2) $Z = (\overline{X}-\mu)/\sqrt{\sigma^2/n} = \sqrt{5/4}(\overline{X}-\mu)$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. 正規分布表より $P(|Z|<z) = 0.95$, すなわち $P(Z>z) = 0.025$ を満たす z を求めると $z = 1.95996 = 1.960$. 従って

$$P(|\frac{\sqrt{5}}{2}(\overline{X}-\mu)| < 1.96) = 0.95 \ .$$

カッコ内の不等式を μ について解くと

$$\overline{X} - \frac{2}{\sqrt{5}} \times 1.96 < \mu < \overline{X} + \frac{2}{\sqrt{5}} \times 1.96 \ .$$

観測値 $\overline{X} = 9.722$ を代入して μ に対する信頼区間 $(7.97, 11.48)$ を得る.

(3) 確率変数

$$T = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} = \sqrt{5}\frac{\overline{X}-\mu}{s}$$

は自由度 $n-1=4$ の t 分布に従う. $P(|T|<t_0) = 0.95$, すなわち $P(T>t_0) = 0.025$ を満たす t_0 を t 分布表から求めると $t_0 = 2.776$. 従って

$$P\left(\left|\sqrt{5}\frac{\overline{X}-\mu}{s}\right| < 2.776\right) = 0.95 \ .$$

カッコ内の不等式を μ について解いて

$$\overline{X} - \frac{s}{\sqrt{5}} \times 2.776 < \mu < \overline{X} + \frac{s}{\sqrt{5}} \times 2.776 \ .$$

(1) の結果を代入して信頼区間 $(7.33, 12.11)$ を得る.

(4) 正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ からの標本 $X_1,\ldots,X_n$ により作られた標本分散を S^2 とすると $Y = \dfrac{n-1}{\sigma^2}S^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2-分布に従う。χ^2-分布の表を用いて $P(Y>b) = \alpha/2$ をみたす b, および $P(Y>a) = 1-\alpha/2$ をみたす a を求めると

$$P\Big(a < \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 < b\Big) = P(Y>a) - P(Y>b) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1-\alpha \ .$$

ところが不等式 $a < \dfrac{n-1}{\sigma^2}S^2 < b$ は $\dfrac{n-1}{b}S^2 < \sigma^2 < \dfrac{n-1}{a}S^2$ と同値だから, 母分散 σ^2 に対する $100\times(1-\alpha)\%$ 信頼区間として $\Big(\dfrac{n-1}{b}S^2, \dfrac{n-1}{a}S^2\Big)$ が得られる.

$n = 5$, $\alpha = 0.05$ のとき $\frac{\alpha}{2} = 0.025$, $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$ だから χ^2-分布表より $a = 0.48$, $b = 11.14$. また $S^2 = 3.700$ だから σ^2 に対する 95% 信頼区間は $(1.33, 30.83)$ と求められる. 両端点の平方根をとると母標準偏差 σ に対する 95% 信頼区間 $(1.15, 5.55)$ も得られる.

[45] (1) 仮説 H_0; $\mu = 10$ の下で

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{5}{4}(\overline{X} - 10)$$

は標準正規分布に従う. 一方 $\overline{X} = 11.8$ のとき $\frac{5}{4}(\overline{X} - 10) = 2.25$ であり, p 値を求めると

$$P(|Z| \geq 2.25) = 0.0244 < \alpha\ .$$

つまり $\overline{X} = 11.8$ は帰無仮説 H_0: $\mu = 10$ の下では α よりも小さな確率でしか起こらないまれな観測値である. よって仮説 H_0 は棄却される.

(2) 同じ帰無仮説の下で

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} = 5\frac{\overline{X} - 10}{s}$$

は自由度 $n - 1 = 24$ の t 分布に従う. ところが $\overline{X} = 11.8$, $s^2 = 15.8$ のとき $5(\overline{X} - 10)/s = 2.264$. t 分布表より

$$P(|T| \geq 2.26) = 2P(T \geq 2.26) < 2P(T > 2.064) = 2 \times 0.025 = 0.05 = \alpha$$

となり, p 値は α より小さく, やはり仮説は棄却される.

[46] 新生児中の男児の比率を p とし, 帰無仮説 H_0: $p = 105/205$ を有意水準 $\alpha = 0.05$ で両側検定する. 大きさ n の標本中の男児の数を X とすると, X は二項分布 $B(n, p)$ に従うが, 今 $n = 5000$ と大きく, また帰無仮説 $p = 105/205$ の下で np, $n(1-p)$ ともに大きいので, $Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとしてよい. $n = 5000$, $p = 105/205$, $X = 2450$ のとき

$$\frac{2450 - 5000 \times \frac{105}{205}}{\sqrt{5000 \times \frac{105}{205} \times \frac{100}{205}}} = -3.14$$

であるが, $P(|Z| \geq 3.14) = 0.0017 < \alpha = 0.05$ だから H_0 は棄却される.

[47] (1) $a = 0$ と予想される. 実際 $a = 0$ ならば同時確率密度関数は x 軸に関して対称となるから $E[Y_0] = 0$ である. また

$$E[X_0 Y_0] = \int_0^1 dx \int_{x-1}^{-x+1} xy dy = \int_0^1 x \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x-1}^{-(x-1)} dx = 0\ .$$

よって明らかに $\mathrm{Cov}(X_0, Y_0) = 0$ である.

(2) $a \neq 0$ の場合のみ考えればよいが, このとき

$$P(U \leq u,\ V \leq v) = P(X_a \leq u,\ Y_a - aX_a \leq v) = \int_{-\infty}^{u} dx \int_{-\infty}^{v+ax} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{u} dx \int_{-\infty}^{v} f(x, z + ax) dx dz\ .$$

したがって

$$g(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} P(U \leq u,\ V \leq v) = f(u, v + au)$$

となるが, これは (X_0, Y_0) の同時確率密度関数と同じものである.

(3) 上記の結果より $\mathrm{Cov}(U, V) = 0$. したがって

$$\mathrm{Cov}(X_a, Y_a - aX_a) = \mathrm{Cov}(X_a, Y_a) - a\mathrm{Cov}(X_a, X_a) = 0\ .$$

よって

$$\mathrm{Cov}(X_a, Y_a) = a\mathrm{Cov}(X_a, X_a) = aV[X_a]\ .$$

一方

$$E[X_a] = \int_0^1 xdx \int_{(a+1)x-1}^{(a-1)x+1} dy = \int_0^1 2(1-x)xdx = \Big[x^2 - \frac{2}{3}x^3\Big]_0^1 = \frac{1}{3}\ ,$$

$$E[X_a^2] = \int_0^1 x^2dx \int_{(a+1)x-1}^{(a-1)x+1} dy = \int_0^1 2(1-x)x^2dx = 2\Big[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^3\Big]_0^1 = \frac{1}{6}\ .$$

以上により $V[X_a] = (1/6) - (1/3)^2 = 1/18$, よって $\mathrm{Cov}(X_a, Y_a) = a/18$.

[48] (1) $f_1(x) \geq 0$, $f_2(x) \geq 0$ より明らかに $f(x,y) \geq 0$ であり, $z = y - ax$ とおくことにより

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(y-ax)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} f_2(z)dz = 1 \times 1 = 1\ .$$

よって $f(x,y)$ はある 2 次元確率変数の同時確率密度関数である.

(2) 以下の計算からわかる：

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)f_2(y-ax)dy = \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} f_2(z)dz = \mu_1\ .$$

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} yf_1(x)f_2(y-ax)dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} (z+ax)f_1(x)f_2(z)dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} zf_2(z)dz + a\int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} f_2(z)dz = \mu_2 + a\mu_1\ . \end{aligned}$$

(3) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$ かつ

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} xyf_1(x)f_2(y-ax)dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} x(z+ax)f_1(x)f_2(z)dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} zf_2(z)dz + a\int_{-\infty}^{\infty} x^2f_1(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} f_2(z)dz \\ &= \mu_1\mu_2 + aE[X^2] \end{aligned}$$

だから (2) の結果と合わせて

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = (\mu_1\mu_2 + aE[X^2]) - \mu_1(\mu_2 + a\mu_1) = a(E[X^2] - \mu_1^2) = aV[X]\ .$$

[49] $E[X] = \mu_x$, $E[Y] = \mu_y$, $E[Z] = \mu_z$ とすると $E[aX + bY + c] = a\mu_x + b\mu_y + c$ だから

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cov}(aX + bY + c, Z) = E[\{(aX + bY + c) - (a\mu_x + b\mu_y + c)\}(Z - \mu_z)] \\ =\ & E[\{a(X - \mu_x) + b(Y - \mu_y)\}(Z - \mu_z)] = aE[(X - \mu_x)(Z - \mu_z)] + bE[(Y - \mu_y)(Z - \mu_z)] \\ =\ & a\mathrm{Cov}(X, Z) + b\mathrm{Cov}(Y, Z)\ . \end{aligned}$$

一般に $\mathrm{Cov}(X,Z) = \mathrm{Cov}(Z,X)$ だから, 今示したことから $\mathrm{Cov}(Z, aX + bY + c) = a\mathrm{Cov}(X,Z) + b\mathrm{Cov}(Y,Z)$ もわかる.

[50] 明らかに $E[T] = 2\mu_1 + \mu_2$ である. 一般に $V[X] = \mathrm{Cov}(X,X)$ だから [48] の結果を繰り返し用いて

$$\begin{aligned} V[T] &= \mathrm{Cov}(T,T) = \mathrm{Cov}(2X+Y, 2X+Y) = 2\mathrm{Cov}(X, 2X+Y) + \mathrm{Cov}(Y, 2X+Y) \\ &= 4\mathrm{Cov}(X,X) + 4\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Y) \\ &= 4\sigma_1^2 + 4s_{12} + \sigma_2^2\ . \end{aligned}$$

同様にして $V[U]=\sigma_1^2-4s_{12}+4\sigma_2^2$. また

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(T,U) &= \mathrm{Cov}(2X+Y,X-2Y)=2\mathrm{Cov}(X,X-2Y)+\mathrm{Cov}(Y,X-2Y)\\ &= 2\mathrm{Cov}(X,X)-4\mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,Y)-2\mathrm{Cov}(Y,Y)=2\sigma_1^2-3s_{12}-2\sigma_2^2\end{aligned}$$

である.

[51] $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ が標準正規分布の確率密度関数であることに注意する.

(1) $L_n=\overline{X}-z(\beta)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $R_n=\overline{X}+z(\alpha-\beta)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ とすると $Z=(\overline{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ が $N(0,1)$ に従うことから

$$\begin{aligned}P(L_n<\mu<R_n) &= P\Big(-z(\alpha-\beta)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\overline{X}-\mu<z(\beta)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)\\ &= P(-z(\alpha-\beta)<Z<z(\beta))\\ &= 1-P(Z>z(\beta))-P(Z>z(\alpha-\beta))=1-\beta-(\alpha-\beta)=1-\alpha\end{aligned}$$

となり，(L_n,R_n) は確かに μ に対する $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間である.

(2) $z>0$ に対して $\alpha(z)=\displaystyle\int_z^\infty p(x)dx$ とすると $\alpha(z)$ と $z(\alpha)$ は互いに逆関数であり，$\displaystyle\lim_{z\to\infty}\alpha(z)=0$ より $\displaystyle\lim_{\alpha\to+0}z(\alpha)=\infty$ となる．(1) の信頼区間の幅は $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\{z(\alpha-\beta)+z(\beta)\}$ だから $f(\beta)=z(\alpha-\beta)+z(\beta)$ の最小値を考えればよい．$\beta\to+0$, $\beta\to\alpha-0$ とすると $f(\beta)\to\infty$ だから $f(\beta)$ は開区間 $(0,\alpha)$ において最小値をとる．最小値を与える β は条件 $f'(\beta)=0$ から求められるが，$p(x)$ が単調すなわち 1 対 1 であることなどに注意すると

$$\begin{aligned}& f'(\beta)=\frac{d}{d\beta}\{z(\alpha-\beta)+z(\beta)\}=\frac{-1}{p(z(\alpha-\beta))}+\frac{1}{p(z(\beta))}=0\\ \Leftrightarrow\ & p(z(\alpha-\beta))=p(z(\beta))\\ \Leftrightarrow\ & z(\alpha-\beta)=z(\beta)\\ \Leftrightarrow\ & \alpha-\beta=\beta\ .\end{aligned}$$

よって $\beta=\alpha/2$ のとき信頼区間の長さは最小になる.

[52] 業者が主張する不良品率を $p_0=0.001=0.1\%$ とおく．仕入れた部品の山（ロット）から無作為に選ばれた $n=500$ 個の中の不良品の個数を X とすると X は 2 項分布 $B(n,p_0)$ にしたがう．ところで $np_0=0.5<1$ だから X は正規近似ではなくむしろポアソン近似されるべきである．すなわち帰無仮説 $H_0:\ p=p_0$ の下で X はポアソン分布 $Po(\lambda)$ に近似的に従う．ただし $\lambda=np_0=0.5$. ここでの問題は不良品率が業者が言う程度に小さいかどうかであるから，帰無仮説 H_0 を片側検定することになる．その p-値は

$$\begin{aligned}p &= P(X\geq 3)=1-P(X\leq 2)\\ &= 1-e^{-\lambda}\Big(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}\Big)=1-e^{-0.5}\Big(1+0.5+\frac{0.25}{2}\Big)=0.0144<0.05\end{aligned}$$

だから H_0 は棄却される．不良品率は 0.1%よりも大きいと考えられる.

[53] この地方の 14 歳男子の平均身長を μ とする．帰無仮説 $H_0:\ \mu=\mu_0$ を両側検定する問題である.

(1) $\overline{X}$, S^2 をそれぞれ身長データの標本平均，標本分散とすると，H_0 の下で $T=(\overline{X}-\mu_0)/(S/\sqrt{n})$ は自由度 $n-1=15$ の t-分布に従う．p-値を計算すると

$$p=P\Big(|T|\geq|(159.5-162.5)/\sqrt{36/16}|\Big)=2P(T\geq 2)>2P(T\geq 2.131)=0.05$$

したがって H_0 は受容され，μ は全国平均値 μ_0 と異なるとはいえない．

(2) 母分散が $\sigma^2 = 36.0\ \mathrm{cm}^2$ ならば H_0 の下で $Z = (\overline{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うから，p-値は

$$p = P\Big(|Z| \geq |(159.5 - 162.5)/\sqrt{36/16}|\Big) = 2P(Z \geq 2) = 0.0455 < 0.05$$

となり，H_0 は棄却される．

(1) における t-分布は正規分布に比べてより拡がった分布になっているため，H_0 が正しくても偶然の揺らぎにより $\overline{X}$ の観測値が μ_0 から大きく外れることが珍しくない．したがって帰無仮説 H_0 は (2) の場合より棄却されにくいと考えられる．

[54] (X,Y) が連続型の 2 次元確率変数ならば

$$P(X=Y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_x^x f(x,y)dy = 0$$

であることに注意する．任意の u,v に対して

$$\begin{aligned} P(U \leq u,\ V \leq v) &= P(X > Y,\ X \leq u,\ Y \leq v) + P(X < Y,\ Y \leq u,\ X \leq v) \\ &= \iint_{\{x>y, x\leq u, y \leq v\}} f(x,y)dxdy + \iint_{\{x<y, y\leq u, x \leq v\}} f(x,y)dxdy \\ &= \iint_{\{x>y, x\leq u, y \leq v\}} \{f(x,y) + f(y,x)\}dxdy \end{aligned}$$

ここで

$$g(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f(v,u) & (x > y) \\ 0 & (x \leq y) \end{cases}$$

と定義すると

$$P(U \leq u,\ V \leq v) = \int_{-\infty}^{u} dx \int_{-\infty}^{v} g(x,y)dy$$

と書ける．よってこの $g(u,v)$ が求める同時確率密度関数である．

[55] $UV = XY$, $U + V = X + Y$ に注意すると

$$Cov(U,V) = E[UV] - E[U]E[V] = E[XY] - E[U](E[X] + E[Y] - E[U])\ .$$

X, Y が独立で同じ分布に従うことから

$$E[XY] = E[X]E[Y] = E[X]^2\ , \quad E[X] + E[Y] = 2E[X]$$

となる．よって

$$Cov(U,V) = E[X]^2 - E[U](2E[X] - E[U]) = E[X]^2 - 2E[X]E[U] + E[U]^2 = (E[X] - E[U])^2 \geq 0\ .$$

$X = Y = \text{定数} = c$ ならば $U = V = c$ となり $Cov(U,V) = 0$ である．逆に $Cov(U,V) = 0$ ならば上にしましたことから

$$E[U] - E[X] = E[U - X] = 0\ .$$

ところがもともと $U - X \geq 0$ だから，このことは $U - X = 0$, すなわち $X \geq Y$ を示す．X と Y の対称性から $X \leq Y$ も成り立っている．よって $X = Y$ である．このとき $U = V = X$ となり，したがって $Cov(U,V) = Cov(X,X) = V[X]$ であるが，これが $= 0$ ならば $X = E[X] = \text{定数}$ である．

[56] (1) $f_n(x)$ が偶関数であることに注意して $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = 2\int_0^{\infty} f_n(x)dx = 1$ を示せばよい．そのために $u = \Big(1+\dfrac{x^2}{n}\Big)^{-1}$ と置換すると $x = \sqrt{n}\Big(\dfrac{1}{u}-1\Big)^{1/2}$, $dx = \dfrac{\sqrt{n}}{2}\Big(\dfrac{1}{u}-1\Big)\Big(-\dfrac{1}{u^2}\Big)^{-1/2}du$ となり，

$$\begin{aligned} 2\int_0^{\infty}\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{2}}dx &= 2\frac{\sqrt{n}}{2}\int_0^1 u^{\frac{n+1}{2}}u^{\frac{1}{2}-2}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du \\ &= \sqrt{n}\int_0^1 u^{\frac{n}{2}-1}(1-u)^{\frac{1}{2}-1}du = \sqrt{n}B\Big(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\Big) \end{aligned}$$

となり，分母・分子がキャンセルする．

(2) **説明１：** $f_n(x)$ の定義式に現れる $\Big(1+\dfrac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{2}}$ は $n\to\infty$ とするとき $e^{-x^2/2}$ に収束する．これは標準正規分布の密度関数 $(1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$ の主要部分である．（$\sqrt{n}B(1/2,n/2)$ が $\sqrt{2\pi}$ に収束することも示されるが，難しいのでここでは気にしなくてよい．）

説明２： Z と χ_n^2 は独立な確率変数で，それぞれ標準正規分布と自由度 n のカイ 2 乗分布に従うとき，$T = Z/\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}$ で定まる確率変数の分布が自由度 n の t 分布なのであった．ところが $Z_1, Z_2, \ldots$ を独立でそれぞれ標準正規分布に従う確率変数の列とするとき $\chi_n^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} Z_j^2$ とみなされる．大数の法則より，n が大きければ

$$\frac{1}{n}\chi_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j^2 \fallingdotseq E[Z_j^2] = 1 \ .$$

したがって n が大きければ $T \fallingdotseq Z$ となり T はほぼ標準正規分布に従う．

[57] (1) $E[X^2] = E[Y^2]$ であることと，独立性により $E[XY] = E[X]E[Y] = \mu^2$ となることに注意すると

$$E[ST] = E[(aX+bY)(cX+dY)] = E[acX^2 + (ad+bc)XY + bdY^2] = (ac+bd)E[X^2] + (ad+bc)\mu^2 \ .$$

したがって $E[S] = a\mu + b\mu$, $E[T] = c\mu + d\mu$ により

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(S,T) &= E[ST] - E[S]E[T] \\ &= (ac+bd)E[X^2] + (ad+bc)\mu^2 - (a+b)(c+d)\mu^2 \\ &= (ac+bd)(E[X^2]-\mu^2) + (ad+bc)(\mu^2-\mu^2) = (ac+bd)\sigma^2 \ . \end{aligned}$$

(2) X と Y の独立性より

$$V[S] = a^2V[X] + b^2V[Y] = (a^2+b^2)\sigma^2 \ , \quad V[T] = c^2V[X] + d^2V[Y] = (c^2+d^2)\sigma^2$$

だから

$$\rho_{S,T} = \frac{\mathrm{Cov}(S,T)}{\sqrt{V[S]V[T]}} = \frac{ac+bd}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}} \ .$$

一方 $(a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2 = (ad-bc)^2 \geq 0$ だから $(\rho_{S,T})^2 \leqq 1$. 行列 A が正則とは $(ad-bc)^2 > 0$ のことだからそれは $|\rho_{S,T}| < 1$ と同値である．

(3) s, t を任意の実数とする．重積分

$$P(S \leq s, T \leq t) = P(aX + bY \leq s,\ cX + dY \leq t) = \iint_D f(x)f(y)dxdy \ ;$$

$$D = \{(x,y) |\ ax + by \leq s,\ cx + dy \leq t\}$$

において変数変換 $ax+by=u,\ cx+dy=v$ を行うと $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ より $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ となる．$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ とおくと $x=\alpha u+\beta v,\ y=\gamma u+\delta v$ かつ $dxdy = \dfrac{1}{|\det A|}dudv$ であり，領域 D は $\{(u,v)|\ u\le s,\ v\le\ t\}$ に対応する．よって

$$P(S\le s, T\le t) = \int_{-\infty}^{s}du\int_{-\infty}^{t}g(u,v)dv = \int_{-\infty}^{s}du\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{|\det A|}f(\alpha u+\beta v)f(\gamma u+\delta v)dv\ .$$

これを s, t で偏微分すれば

$$\begin{aligned} g(s,t) &= \frac{1}{|\det A|}f(\alpha s+\beta t)f(\gamma s+\delta t) \\ &= \frac{1}{|\det A|}f\Big(\frac{ds-bt}{|\det A|}\Big)f\Big(\frac{-cs+at}{|\det A|}\Big) \end{aligned}$$

が得られる．

[58] (1) 和食希望者の数を X とすると，$p=1/2,\ n=100$ として X は 2 項分布 $B(n,p)$ に従う．$np=n(1-p)=50>5$ より正規近似が可能で，$Z=(X-np)/\sqrt{np(1-p)}=(X-50)/5$ は近似的に標準正規分布 $N(0,1)$ に従う．和食弁当の仕入れ数を k とすると売り切れる確率は

$$P(X\ge k) = P\Big(Z\ge\frac{k-50}{5}\Big) = 0.1\ .$$

正規分布表より $P(Z\ge 1.28155)=0.1$ だから $\dfrac{k-50}{5}\ge 1.28155$，すなわち $k\ge 56.4$ であればよい．よって 57 個仕入れておけばよい．

(2) 来場者が和食を選ぶ確率を p とし，「特に和食を好むことはない」という帰無仮説，すなわち $H_0:\ p\le\frac{1}{2}$ を有意水準 5% で片側検定する．p-値は，H_0 の下で 65 個の和食弁当が売り切れる確率であるが，その確率は $p=1/2$ のときが最大だから (1) と同じ正規近似により

$$P\le P_{1/2}(X\ge 65) = P\Big(Z\ge\frac{65-50}{5}\Big) = P(Z\ge 3) = 0.00135$$

となる．P は 0.05 よりはるかに小さいから H_0 は棄却され，このイベントでは和食弁当が好まれたといえる．

(3) k 個仕入れた弁当が売り切れもせず，売れ残りも 10 個以内である確率は $P(k-10\le X\le k)$ である．いま $p=1/2$ としているので (1) と同じ正規近似により $Z=(X-50)/5$ はほぼ標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとしてよい．

$$P(k-10\le Z\le k) = P\Big(\frac{k-60}{5}\le Z\le\frac{k-50}{5}\Big)$$

であるが，標準正規分布の確率密度関数は原点について左右対称で単峰（ひと山）だから，区間 $((k-60)/5,\ (k-50)/5)$ が原点について左右対称のとき確率は最大になる（絵を描いて考えてみよ）．すなわち $k-60=-(k-50)$，$k=55$ のとき最大．そのとき

$$P(k-10\le X\le k) = P(-1\le Z\le 1) = 1-2P(Z>1) = 1-2\times 0.15866 \fallingdotseq 0.68$$

である．売り切れるか余りすぎるかのリスクはどうしても 32%程度はあることになる．